Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

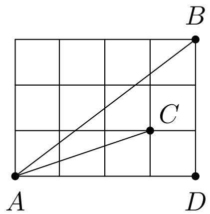
27. jaanuaril 2001. a.

X klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Võrrandil $\sqrt{x+a}+x+b=0$ leidub reaalarvuline lahend x. Leia vahe $b-a$ suurim võimalik väärtus.

2. Ruudulisel paberil võetakse punktid A, B, C ja D nii, nagu joonisel näidatud. Tõesta, et nurgad BAC ja CAD on võrdse suurusega.



3. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (a, b), mille korral

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}=\frac{2}{5} .$$

4. Ristküliku $ABCD$ küljel AB võetakse punktid E ja F nii, et $|AE|=|BF|$ ning lõigud CE ja DF lõikuvad punktis P. Tõesta, et kolmnurga CDP pindala on võrdne kolmnurkade ADE, BCF ja EFP pindalade summaga.

5. Aafrikas elav Abababi hõim kasutab tähestikku, milles on ainult tähed A ja B. Ükski Abababi keele sõna pole ühegi teise sõna alguseks. Kas Abababi keeles võib olla kolm 4-tähelist, kümme 5-tähelist, kolmkümmend 6-tähelist ja viis 7-tähelist sõna?

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

XI klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kisanea Vabariigi valitsus esitas parlamendile seaduseelnõu, mille kohaselt iga valitsuse liikme palga ja kõigi töötavate Kisanea kodanike keskmise palga suhe peab võrduma seitsmekordse Kisanea töötavate kodanike koguarvu ja valitsuse liikmete arvu suhtega. On teada, et Kisanea Vabariigis on N töötavat kodanikku, kellest M on valitsuse liikmed, ning valitsusse mittekuuluvate töötavate kodanike keskmine palk on $c > 0$ sõltumata sellest, kas uus seadus rakendub või mitte.

   Parlamendi opositsioon on aga oma valijatele lubanud, et ei lase tõsta valitsuse liikmete palka suuremaks ülejäänud Kisanea töötavate kodanike keskmisest palgast. Kas opositsioon peaks püüdma esitatud seaduseelnõu vastuvõtmist takistada?

2. Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et

   $$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 2000\ .$$

   Leia summa $a + b + c$ kõik võimalikud väärtused.

3. Olgu D kolmnurga ABC külje AB keskpunkt ja E selline punkt küljel BC, et $|BE| = 2 \cdot |EC|$, kusjuures $\angle ADC = \angle BAE$. Tõesta, et kolmnurk ABC on täisnurkne.

4. Tõesta, et mistahes 10 järjestikuse positiivse täisarvu hulgas leidub arv, mis on ülejäänutega ühistegurita.

5. Ringjoonel järjestikku paiknevad $2n + 1$ punkti A_0, A_1, $\ldots$, A_{2n} jaotavad ringjoone võrdseteks kaarteks. Kuidas tuleb need punktid sirglõikudega ühendada, et tekkiva $2n+1$ lüliga kinnise murdjoone pikkus oleks maksimaalne?

Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu a, b positiivsed täisarvud.
   a) Tõesta, et kui arvud a ja b on ühistegurita, siis ka ab ja $a+b$ on ühistegurita.
   b) Kas kehtib ka selle lause pöördlause?

2. Tähistagu a_n arvude 1, 2, 3, …, n ruutude vahelduvate märkidega summat: $a_1 = 1^2$, $a_2 = 1^2 - 2^2$, $a_3 = 1^2 - 2^2 + 3^2$, $a_4 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2$, jne. Tõesta, et mistahes positiivse täisarvu n korral kehtib võrdus

$$|a_n| = 1 + 2 + 3 + \ldots + n\,.$$

3. Lõigule AB selle sisepunktist C tõmmatud ristsirgel punktist C ühel ja samal pool valitakse punktid D ja E nii, et $|AC| = |DC|$ ja $|BC| = |EC|$. Olgu P, Q, R ja S vastavalt lõikude AB, BE, DE ja AD keskpunktid. Tõesta, et nelinurk $PQRS$ on ruut.

4. Reaalarvude a, b ja c korrutis on 1 ning nende arvude summa on võrdne nende pöördarvude summaga. Tõesta, et vähemalt üks arvudest a, b ja c on 1.

5. Leia vähim n väärtus, mille korral on võimalik katta $n \times n$ ruut 1×2 doominokividega nii, et mistahes seda ruutu kaheks osaks jaotav sirge jaotaks kaheks osaks ka vähemalt ühe doominokivi.