Eesti koolinoorte XLVIII täppisteaduste olümpiaad

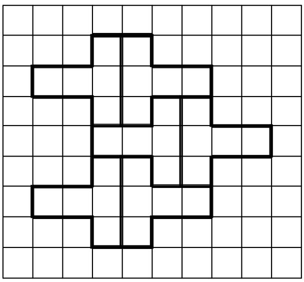
MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

27. jaanuaril 2001. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1. 9,8 ja $-9{,}8$. 2. 7.45. 3. 13. 4. 46 ja 55. 5. 2,5 korda. 6. $-1\dfrac{1}{7}$.
7. 60°, 60°, 60°. 8. $6\pi\,\mathrm{cm}$. 9. $200\,\mathrm{cm}^3$. 10. vt. joonist 1.



Joonis 1

VII klass, II osa

1. *Vastus:* 165.

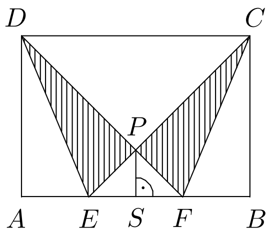
   Olgu müntide arvud, mis isa andis noorimale, keskmisele ja vanimale pojale, vastavalt N, K ja V. Ülesande tingimustest saame võrdused $V = N + 15$, $K + 30 = N$ ja $V - 30 = 45$, kust $V = 75$, $N = 60$ ja $K = 30$ ning müntide koguarv $N + K + V = 165$.

2. *Vastus:* $20\,\mathrm{cm}^2$.

   Olgu P ristküliku nurgapoolitajate CE ja DF lõikepunkt ning S punktist P ristküliku küljele AB tõmmatud ristlõigu aluspunkt (vt. joonist 2). Viirutatud kujund koosneb kolmnurkadest

DEP ja CFP, mis sümmeetria tõttu on ilmselt võrdsed. Kuna $\angle ADF = \angle BCE = 45°$, siis täisnurksed kolmnurgad DAF, CBE, ESP ja FSP on võrdhaarsed ning $|AF| = |AD| = 7\,\mathrm{cm}$ ja $|BF| = |AB| - |AF| = 3\,\mathrm{cm}$. Samuti $|AE| = 3\,\mathrm{cm}$ ning seega $|EF| = 4\,\mathrm{cm}$ ja $|ES| = |FS| = |PS| = 2\,\mathrm{cm}$. Viirutatud osa pindalaks saame niisiis

$$2 \cdot (S_{EDF} - S_{EPF}) = 2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 7}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2}\right) = 20\,\mathrm{cm}^2\ .$$



Joonis 2

3. *Vastus:* 138 ja 777.

   Ainsad 10-st väiksemad algarvud on 2, 3, 5 ja 7. Et ka $10a + b$ oleks algarv, ei tohi b olla 2 ega 5. Kui $b = 3$, siis sobib ainsana $a = 2$; kui $b = 7$, siis sobib ainult $a = 3$. Korrutise $ab \cdot (10a + b)$ võimalikud väärtused on niisiis $2 \cdot 3 \cdot 23 = 138$ ja $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

VIII klass, I osa

1. $m = 25$, $n = 8$. 2. 25. 3. $(2^3)^4 = (4^3)^2 < (3^2)^4$; võib kirjutada ka $(4^3)^2 = (2^3)^4 < (3^2)^4$. 4. 7,7 ja −10,3. 5. 53 võrra. 6. $67{,}5\,\mathrm{cm}^2$. 7. $2b - a$. 8. 2π. 9. $60°$. 10. 108.

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* 29.

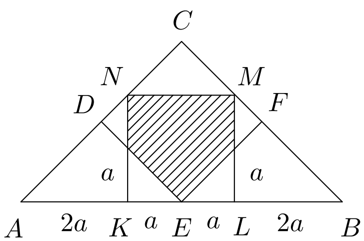
   Paneme tähele, et $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, kus 3, 23 ja 29 on kõik algarvud. Et Meelise arvuti mängiks arvu n sisestamisel muusikat, peab korrutis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ sisaldama teguritena kõiki neid kolme algarvu: vähim sobiv n on seega 29.

2. *Vastus:* 640 krooni.

Olgu Taavi teenitud rahasumma x krooni, siis disketide ostuks kulus tal $\frac{1}{4}x$ krooni, bussiekskursioonile $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{3}{16}x$ krooni ning jõulukinkide ostmiseks $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16}x = \frac{1}{8}x$ krooni. Kõige selle peale kokku kulus Taavil seega $\frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x + \frac{1}{8}x = \frac{9}{16}x$ krooni ja alles jäi veel $x - \frac{9}{16}x = \frac{7}{16}x$ krooni. Võrrandist

$$\frac{9}{16}x - \frac{7}{16}x = 80$$

leiame $x = 8 \cdot 80 = 640$ krooni.



Joonis 3

3. *Vastus:* $\frac{1}{3}$.

Olgu ruudu $KLMN$ küljepikkus $2a$. Et täisnurksed kolmnurgad AKN ja BLM on võrdhaarsed ning $KLMN$ on ruut, siis $|AK| = |KN| = |KL| = 2a$ ning samuti $|BL| = 2a$ (vt. joonist 3). Seega $|AB| = 6a$ ning $|AE| = |EB| = 3a$. Et $CDEF$ on ruut, siis $\angle KED = \angle LEF = 45^\circ$ ning ruudu $KLMN$ viirutamata osa koosneb kahest võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast kaatetite pikkusega $|KE| = |EL| = a$. Viirutatud osa pindala on seega $(2a)^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{2} = 3a^2$. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ABC kogupindala on $\frac{|AB| \cdot |EC|}{2} = \frac{6a \cdot 3a}{2} = 9a^2$ ning viirutatud osa moodustab sellest ühe kolmandiku.

IX klass, I osa

1. 2. 2. 8000 kr. 3. 19. 4. 15. 5. D. 6. 2. 7. $\dfrac{(2b-a)^2}{4}$. 8. 100°. 9. $4:1$. 10. 54.

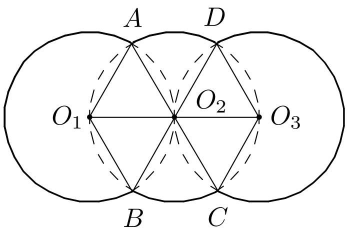
IX klass, II osa

1. *Vastus:* Julius saab 44 ja Juuli 38 aastat vanaks.

   Olgu otsitav sünniaasta number $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$, siis ülesande tingimustest saame

   $$2001 - (1000a + 100b + 10c + d) = 2 \cdot (a + b + c + d)$$

   ehk $1002a+102b+12c+3d = 2001$. Arvestades, et $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 9$ leiame kergesti, et $a = 1$ ja $b = 9$ ning $12c + 3d = 81$ ehk $4c + d = 27$. Et $0 \leqslant d \leqslant 9$, siis $18 \leqslant 4c \leqslant 27$, kust $c = 5$ või $c = 6$ ning vastavalt $d = 7$ või $d = 3$. Seega peab Juliuse sünniaasta olema 1957 ja Juulil 1963 ning 2001. aastal saavad nad vastavalt $2001 - 1957 = 44$ ja $2001 - 1963 = 38$ aastat vanaks.



Joonis 4

2. *Vastus:* $\dfrac{10\pi r}{3}$.

   Olgu vaadeldavate ringjoonte keskpunktid O_1, O_2 ja O_3 ja lõikepunktid A, B, C ja D, nagu joonisel 4 näidatud. Moodustuva kujundi rajajoon koosneb neljast ringjoone kaarest $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ ja $\overset{\frown}{DA}$. Et kolmnurgad O_1AO_2, O_1BO_2, O_2CO_3 ja O_2DO_3 on võrdkülgsed (nende kõik küljed on pikkusega r), siis on kaarte $\overset{\frown}{BC}$

ja $\overset{\frown}{DA}$ pikkus $\frac{1}{6}$ ringjoone ümbermõõdust ning kaarte $\overset{\frown}{AB}$ ja $\overset{\frown}{BC}$ pikkus $\frac{2}{3}$ ringjoone ümbermõõdust. Kujundi ümbermõõt on seega

$$\left(2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 2\pi r = \frac{10\pi r}{3} .$$

3. Arv $k^2 - k = k(k-1)$ kui kahe erineva paarsusega täisarvu korrutis on alati paarisarv. Kui k või $k-1$ jagub 3-ga, siis $k(k-1)$ jagub 3-ga ning järelikult ka 6-ga. Seega sobivad ülesande tingimustega ainult sellised täisarvud k, mis annavad 3-ga jagamisel jäägi 2. Olgu nüüd $k = 3a + 2$, siis

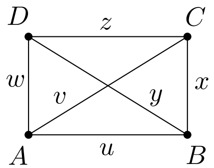
$$k^2 - k - 2 = (9a^2 + 12a + 4) - (3a + 2) - 2 = 9(a^2 + a)$$

jagub 18-ga, sest $a^2 + a = a(a+1)$ on paarisarv.

4. *Vastus:* 6, 7 või 9 raamatut.

Tähistame õpilased tähtedega A, B, C ja D ning vaatleme kolme võimalikku juhtu.

a) Ühegi õpilaste paari ostetud ühesugune raamat ei lange kokku ühegi teise paari ostetud ühesuguse raamatuga. Sel juhul on iga õpilase ostetud kolmest raamatust igaüks tema ühiseks raamatuks ühega ülejäänud kolmest õpilasest, s.t. rohkem raamatuid peale nende keegi õpilastest ei ostnud. Kuna neljast õpilasest moodustub kokku 6 erinevat paari, ostsid õpilased sel juhul kokku 6 erinevat raamatut. (nt. A ostis raamatud u, v, w, B ostis raamatud u, x, y, C ostis raamatud v, x, z ning D ostis raamatud w, y, z: vt. joonist 5).



Joonis 5

b) Kolm õpilast (näiteks A, B ja C) ostsid ühesuguse raamatu, mida neljas õpilane (sel juhul D) ei ostnud. Õpilaste A ja D,

B ja D ning C ja D ostetud ühised raamatud erinevad siis sellest raamatust ning on erinevad ka omavahel (sest vastasel korral ostnuks mõni paar õpilastest A, B ja C rohkem kui ühe ühise raamatu). Et igaüks õpilastest A, B ja C pidi ostma veel ühe raamatu ning need peavad olema erinevad nii omavahel kui ka eespool mainitutest, D aga rohkem raamatuid ei ostnud, siis osteti sel juhul 7 erinevat raamatut.

c) Kõik neli õpilast ostsid ühe ja sama raamatu. Siis on lihtne veenduda, et ülejäänud $4 \cdot 2$ ostetud raamatut on kõik erinevad ning järelikult osteti sel juhul kokku 9 erinevat raamatut.

X klass

1. *Vastus:* 0.

Lahendus 1. Teisendame võrrandi kujule

$$\sqrt{x+a} + (x+a) + (b-a) = 0$$

ning paneme tähele, et kui see võrdus kehtib mingi reaalarvu x jaoks, siis $x + a \geqslant 0$ ja $\sqrt{x+a} \geqslant 0$. Seega $b - a \leqslant 0$. Teisalt on $b - a = 0$ korral võrrandil ilmselt olemas reaalarvuline lahend $x = -a$.

Lahendus 2. Teisendame võrrandi kujule

$$\sqrt{x+a} + (x+a) + (b-a) = 0$$

ning tähistame $y = \sqrt{x+a}$ ja $c = b - a$. Saadud ruutvõrrandi $y^2 + y + c = 0$ suurem lahend on $y = \dfrac{-1+\sqrt{1-4c}}{2}$, mis on mittenegatiivne, kui $c \leqslant 0$. Mistahes mittenegatiivse y väärtuse korral saame seosest $y = \sqrt{x+a}$ leida ka sobiva x väärtuse, mis on esialgse võrrandi lahendiks.

Lahendus 3. Viies antud võrrandis $x + b$ teisele poole ning tõstes saadud võrduse mõlemad pooled ruutu, saame

$$x + a = (x+b)^2 .$$

Teisendamisel saame siit ruutvõrrandi $x^2 + (2b-1)x + (b^2 - a) = 0$, mille diskriminant on $D = (2b-1)^2 - 4(b^2-a) = 1 - 4(b-a)$. Saadud ruutvõrrandil on olemas reaalarvulised lahendid

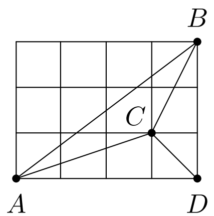
$$x = \frac{(1-2b) \pm \sqrt{D}}{2},$$

kui $D \geqslant 0$ ehk $b - a \leqslant \frac{1}{4}$. Selleks aga, et x oleks ka esialgse võrrandi lahend, peavad täiendavalt olema täidetud tingimused $x + a \geqslant 0$ ja $x + b \leqslant 0$. Asendades siin $x = \frac{(1-2b) - \sqrt{1-4(b-a)}}{2}$ näeme, et esimene neist tingimustest on täidetud alati ning teine parajasti siis, kui $b - a \leqslant 0$.

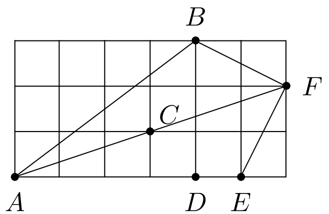
2. *Lahendus 1.* Näitame, et punkt C on võrdsel kaugusel sirgetest AB ja AD. Selleks lisame lõigud BC ja CD (vt. joonist 6) ning näitame, et kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrgus on 1. Tõepoolest, kolmnurga ABC pindala on

$$S_{ABC} = S_{ABD} - S_{ACD} - S_{BCD} = \frac{4 \cdot 3}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$$

ning Pythagorase teoreemist saame $|AB| = 5$, mistõttu tipust C tõmmatud kõrgus on 1.



Joonis 6



Joonis 7

Lahendus 2. Lisame punktid E ja F nii, nagu näidatud joonisel 7. Siis Pythagorase teoreemist saame $|AB| = 5 = |AE|$. Et ka $|BF| = |FE|$, siis kolmnurgad ABF ja AEF on võrdsed, mistõttu $\angle BAC = \angle BAF = \angle EAF = \angle CAD$.

Lahendus 3. Leiame $\tan\angle CAD = \frac{1}{3}$ ja $\tan\angle BAD = \frac{3}{4}$. Et

$$\tan 2\angle CAD = \frac{2\tan\angle CAD}{1-\tan^2\angle CAD} = \frac{3}{4} = \tan\angle BAD$$

ning $\angle BAD$ ja $2\angle CAD$ on mõlemad teravnurgad, siis peab olema $\angle BAD = 2\angle CAD$ ehk $\angle BAC = \angle CAD$.

Lahendus 4. Näitame jällegi, et punkt C on võrdsel kaugusel sirgetest AB ja AD. Võtame kasutusele ristkoordinaatide süsteemi, mille koordinaatide alguspunkt on punkt A ning koordinaattelgedeks on seda läbivad ruudustiku jooned — siis $C(3,1)$, sirge AB võrrand on $3x-4y=0$ ning sellele punktist C tõmmatud ristsirge võrrand on $4x+3y=15$. Nende sirgete lõikepunkti koordinaatideks saame $(2{,}4; 1{,}8)$ ning punkti C kaugus sirgest AB on seega $\sqrt{0{,}6^2+0{,}8^2}=1$.

3. *Vastus:* $(4,5)$, $(5,4)$, $(3,10)$ ja $(10,3)$.

Lahendus 1. Üldisust kitsendamata eeldame, et $a \geqslant b$. Siis

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} \leqslant \frac{2}{b} - \frac{1}{ab} < \frac{2}{b},$$

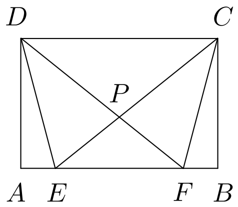
mistõttu $b < 5$. Avaldades ülesandes antud võrdusest a, saame $a = \frac{5b-5}{2b-5}$, kust a positiivsuse tõttu $b > 2$. Järelejäänud võimalused $b=3$ ja $b=4$ annavad vastavalt $a=10$ ja $a=5$; ülejäänud kaks sobivat arvupaari saame a ja b väärtuste vahetamisel.

Lahendus 2. Kirjutame võrduse $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} = \frac{2}{5}$ ümber kujul $\frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} = \frac{3}{5}$ ning paneme tähele, et avaldise $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ väärtus kasvab x kasvades. Seetõttu $a \geqslant 5$ ja $b \geqslant 5$ korral on $\frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \geqslant \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} > \frac{3}{5}$. Kui aga $a \leqslant 2$ või $b \leqslant 2$, siis $\frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} < 1 \cdot \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$. Seega üks arvudest a ja b peab olema 3 või 4. Neid võimalusi läbi vaadates leiamegi sobivad neli arvupaari.

4. Kolmnurga CDE pindala moodustab poole ristküliku $ABCD$ pindalast, sest selle alus CD ja sellele tõmmatud kõrgus on ühtlasi ristküliku aluseks ja kõrguseks (vt. joonist 8). Seega

$$S_{CDP} + S_{DPE} = S_{ADE} + S_{BCF} + S_{EFP} + S_{CPF}\ ,$$

millest järeldub nõutav võrdus $S_{CDP} = S_{ADE} + S_{BCF} + S_{EFP}$, kuna sümmeetria tõttu $S_{DPE} = S_{CPF}$.



Joonis 8

5. *Vastus:* Ei või.

Näitame, et kui Abababi keeles on kolm 4-tähelist, kümme 5-tähelist ja kolmkümmend 6-tähelist sõna, siis ei saa selles keeles olla rohkem kui neli 7-tähelist sõna.

Kuna Abababi keeles on ainult kaks tähte A ja B, siis erinevaid 4-tähelisi sõnu saab selles keeles olla ülimalt $2^4 = 16$. Kui selles keeles on kolm 4-tähelist sõna, siis need ei saa enam olla pikemate sõnade alguseks, s.t. 4-tähelisi järjendeid, millega saavad alata 5-tähelised sõnad, on ülimalt $16 - 3 = 13$. Kuna igale sellisele järjendile saab lõppu lisada kas A või B, siis 5-tähelisi sõnu ei saa olla rohkem kui $2 \cdot 13 = 26$. Kui tegelikult on kümme 5-tähelist sõna, siis üle jääb ülimalt $26 - 10 = 16$ sellist 5-tähelist järjendit, millega saavad alata 6-tähelised sõnad, ning 6-tähelisi sõnu ei saa seega olla rohkem kui $2 \cdot 16 = 32$. Kui nüüd kuuetähelisi sõnu on tegelikult kolmkümmend, siis 7-täheliste sõnade võimalikeks algusteks jääb 6-tähelisi järjendeid järele ülimalt $32 - 30 = 2$ ning 7-tähelisi sõnu võib seega olla ülimalt $2 \cdot 2 = 4$.

XI klass

1. *Vastus:* ei, sest valitsuse liikmete palk saab seaduse rakendumisel olema negatiivne ja seega väiksem lihtkodanike keskmisest palgast.

Olgu Kisanea valitsuse liikme palk uue seaduse rakendumisel b ning valitsusse mittekuuluvate palgasaajate arv $K = N - M$ (kuna ülesande tingimuste kohaselt on valitsusse mittekuuluvate palgasaajate keskmine palk $c > 0$, siis ilmselt kõik Kisanea palgasaajad ei kuulu valitsusse, s.t. $K > 0$). Siis kehtib võrdus

$$b : \frac{Mb + Kc}{N} = 7 \cdot (N : M) ,$$

ehk $7 \cdot (Mb + Kc) = Mb$, kust $7Kc = -6Mb$. Siit $b < 0$ ning seega $b < c$.

2. *Vastus:* ainus võimalik väärtus on $a + b + c = 52$.

   Ülesandes antud võrdusest saame

$$(a+1)(b+1)(c+1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = 2001 .$$

   Et $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, kus kõik tegurid on algarvud, ning arvude a, b, c positiivsuse tõttu on tegurid $a+1$, $b+1$ ja $c+1$ kõik ühest suuremad, siis peab olema $\{ a+1, b+1, c+1 \} = \{ 3, 23, 29 \}$, kust $a + b + c = 52$.

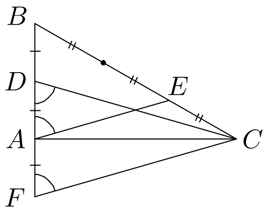
3. *Lahendus 1.* Olgu F selline punkt kolmnurga külje AB pikendusel üle tipu A, et $|FA| = |AD|$ (vt. joonist 9). Et

$$|BA| : |AF| = 2 : 1 = |BE| : |EC| ,$$

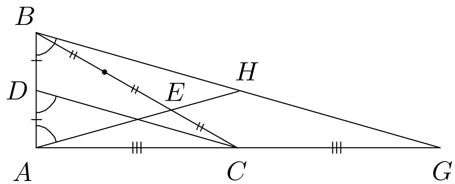
   siis lõigud AE ja FC on paralleelsed ning

$$\angle DFC = \angle BFC = \angle BAE = \angle ADC = \angle FDC .$$

   Seega on kolmnurk DCF võrdhaarne ning selle alusele DF tõmmatud mediaan CA on ühtlasi kõrguseks, s.t. $\angle CAB = 90°$.



Joonis 9



Joonis 10

Lahendus 2. Olgu G selline punkt kolmnurga külje AC pikendusel üle tipu C, et $|AC| = |GC|$, ning olgu H lõigu AE pikenduse lõikepunkt sirgega BG (vt. joonist 10). Et lõik BC on kolmnurga ABG mediaan, mille punkt E jaotab suhtes $2 : 1$, siis ka lõik AH on kolmnurga ABG mediaan ehk $|BH| = |GH|$. Kuna CD on kolmnurga ABG kesklõik, siis $\angle HBA = \angle CDA = \angle BAH$, s.t. kolmnurk AHB on võrdhaarne ning $|AH| = |BH| = |GH|$. Seega H on kolmnurga ABG ümberringjoone keskpunkt ja BG selle diameeter ning nurk BAG on diameetrile toetuv piirdenurk, mistõttu $\angle BAC = \angle BAG = 90^\circ$.

4. Vaadeldavate arvude võimalikud ühised algtegurid on ainult 2, 3, 5 ja 7, sest suuremate algarvudega saab jaguda ülimalt üks mistahes 10-st järjestikusest naturaalarvust. Nende 10 järjestikuse arvu viimased numbrid on kõik erinevad, s.t. igaüks numbritest 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 on viimaseks numbriks täpselt ühele neist arvudest. Arvud, mille viimane number on 1, 3, 7 ja 9, ei jagu 2-ga ega 5-ga ning ülimalt kaks neist võivad jaguda 3-ga ja ülimalt üks võib jaguda 7-ga (sest nende hulgas ei ole kolme arvu, mille vahed jaguksid 3-ga, ega kaht arvu, mille vahe jaguks 7-ga). Seega leidub vaadeldava 10 arvu hulgas vähemalt üks selline, mille algtegurite hulgas pole 2, 3, 5 ega 7 ning mis vastavalt lahenduse algul tehtud tähelepanekule on seega ülejäänutega ühistegurita.

5. *Vastus:* A_0, A_{n+1}, A_1, A_{n+2}, A_2, $\ldots$, A_{n-1}, A_{2n}, A_n, A_0 või sellele vastupidises järjekorras.

   Tõlgendame vaadeldava $(2n{+}1)$-nurga tippude indekseid "*modulo* $2n+1$" (s.t. loeme $A_{2n+1} = A_0$, $A_{2n+2} = A_1$ jne.) ning maksimaalse pikkusega murdjoone saamiseks püüame selle lülidena kasutada ainult $(2n{+}1)$-nurga maksimaalse pikkusega diagonaale, s.t. selliseid, mille otstippude indeksite vahe on n või $n{+}1$. Et vaadeldava hulknurga igal tipul on selliseid naabertippe täpselt kaks, siis olles valinud algustipu ja sellele järgneva tipu, on edasine tippude valik üheselt määratud. Näiteks, alustades tipust A_0 ja tõmmates sealt esimese lõigu tippu A_{n+1}, on järgmistena läbitavad tipud A_1, A_{n+2}, A_2, A_{n+3}, A_3, $\ldots$. Jääb veel tõestada, et saadav murdjoon on tõepoolest $2n+1$ lüliga, s.t. tippu A_0 jõuame tagasi alles pärast kõigi ülejäänud tippude läbimist. Selleks paneme tähele, et saadava murdjoone tippudeks "üle ühe" on A_0, A_1, A_2, $\ldots$ ning nende vahel läbitavateks tippudeks A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, ... Näeme, et tippu $A_0 = A_{2n+1}$ jõuame tagasi tõepoolest alles pärast tippude A_0, A_1, A_2, ..., A_n ja A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{2n-1} läbimist ning vahepeal läbime kõik ülejäänud tipud täpselt üks kord.

XII klass

1. *Vastus:* b) ka pöördlause (kui ab ja $a+b$ on ühistegurita, siis a ja b on samuti ühistegurita) kehtib.

   Oletame vastuväiteliselt, et arvudel ab ja $a+b$ leidub ühine algtegur p. Et algarv p on korrutise ab jagaja, peab ta olema a või b jagaja — oletame üldisust kitsendamata, et p on a jagaja. Kuna aga p on ka $a+b$ jagaja, siis on ta samuti arvu $b = (a+b) - a$ jagaja, mis on vastuolus eeldusega, et arvud a ja b on ühisteguri-ta. Saadud vastuolu näitab, et ükski algarv ei saa olla ab ja $a+b$ ühiseks teguriks, s.t. need arvud on samuti ühistegurita.

   Näitame nüüd, et kehtib ka tõestatud lause pöördlause. Tõepoolest, arvude a ja b mistahes ühine tegur d on ühiseks teguriks ka arvudele ab ja $a+b$ — seega juhul, kui ab ja $a+b$ on ühistegurita, on ka a ja b ühistegurita.

2. *Lahendus 1.* Paarisarvulise n korral

$$\begin{aligned} a_n &= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \ldots + \big((n-1)^2 - n^2\big) = \\ &= (1-2)\cdot(1+2) + (3-4)\cdot(3+4) + \ldots + \\ &\qquad + \big((n-1) - n\big)\cdot\big((n-1)+n\big) = \\ &= -\big(1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n\big)\,. \end{aligned}$$

   Paarituarvulise n korral

$$\begin{aligned} a_n &= 1^2 - (2^2 - 3^2) - (4^2 - 5^2) - \ldots - \big((n-1)^2 - n^2\big) = \\ &= 1^2 - (2-3)\cdot(2+3) - (4-5)\cdot(4+5) - \ldots - \\ &\qquad - \big((n-1) - n\big)\cdot\big((n-1)+n\big) = \\ &= 1 + \big(2+3+4+5+\ldots+(n-1)+n\big)\,. \end{aligned}$$

   Lahendus 2. Tõestame induktsiooniga n järgi, et

$$a_n = (-1)^{n-1}\cdot(1+2+\ldots+n)\,.$$

Ilmselt kehtib see $n = 1$ korral, kus $a_1 = 1 = (-1)^0 \cdot 1$. Eeldame nüüd, et

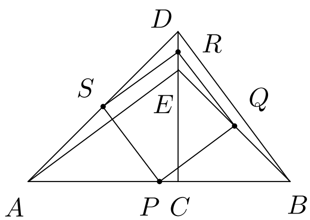
$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\ ,$$

ning leiame

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + (-1)^n \cdot (n+1)^2 = (-1)^n \cdot \left((n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}\right) = \\ &= (-1)^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = (-1)^n \cdot \big(1 + 2 + \ldots + (n+1)\big)\ . \end{aligned}$$

Seega kehtib võrdus $a_n = (-1)^{n-1} \cdot (1 + 2 + \ldots + n)$ iga n korral, ning $|a_n| = 1 + 2 + \ldots + n$.

3. *Lahendus 1.* Kui C ei ole lõigu AB keskpunkt, siis punktid D ja E on erinevad ning PQ, QR, RS ja SP on vastavalt kolmnurkade ABE, DEB, ADE ja DAB kesklõigud (vt. joonist 11), mistõttu lõigud PQ ja RS on paralleelsed lõiguga AE, lõigud QR ja SP on paralleelsed lõiguga DB ning $|PQ| = |RS| = \frac{1}{2}|AE|$ ja $|QR| = |SP| = \frac{1}{2}|DB|$. Seega on $PQRS$ rööpkülik. Et täisnurksed kolmnurgad ACE ja DCB on teineteisest saadavad pöördega 90° võrra, siis on nende hüpotenuusid AE ja DB võrdse pikkusega ja risti, mistõttu $PQRS$ on ruut.



Joonis 11

Kui C on lõigu AB keskpunkt, siis $R = D = E$ on võrdhaarse täisnurkse kolmnurga ADB täisnurga tipp ning $P = C$, Q ja S

on selle kolmnurga külgede keskpunktid — edasine arutlus jääb samaks.

Lahendus 2. Kasutame ristkoordinaatide süsteemi, kus koordinaatide alguspunkt on C ning koordinaattelgedeks on sirged AB ja CD. Olgu $|AC| = |DC| = 2a$ ja $|BC| = |EC| = 2b$, siis $A(-2a, 0)$, $B(2b, 0)$, $D(0, 2a)$ ja $E(0, 2b)$ ning $P(b-a, 0)$, $Q(b, b)$, $R(0, a+b)$ ja $S(-a, a)$. Nüüd on lihtne kontrollida, et

$$|PQ| = |QR| = |RS| = |SP| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ning

$$|PR| = |QS| = \sqrt{2a^2 + 2b^2}\ ,$$

mistõttu $PQRS$ on ruut.

4. Ülesande tingimustest saame

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc} = bc + ca + ab\ .$$

Seega

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 = 0,$$

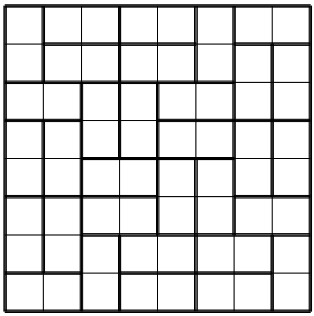
s.t. vähemalt üks arvudest a, b ja c on 1.

5. *Vastus:* $n = 8$.

Ilmselt saab $n \times n$ ruutu katta 1×2 doominokividega ainult paarisarvulise n korral. Kui mistahes seda ruutu kaheks osaks jaotav sirge jaotab kaheks osaks ka vähemalt ühe kivi, siis peab ruudustiku iga horisontaaljoon ja iga vertikaaljoon lõikama vähemalt üht kivi. Kui selline joon lõikaks aga ainult üht kivi, siis jääks kummalgi pool seda joont üle paaritu arv ruute, mida ei saaks katta ülejäänud kividega. Seega peab ruudustiku iga horisontaaljoon ja iga vertikaaljoon lõikama vähemalt kaht kivi. Kivide koguarv $\frac{n^2}{2}$ ei saa seetõttu olla väiksem kui $4 \cdot (n-1)$. Võrratuse $\frac{n^2}{2} \geqslant 4 \cdot (n-1)$

saame teisendada kujule $(n-4)^2 \geqslant 8$, mida vähima positiivse paarisarvuna rahuldab $n = 8$.

Sobiv kivide paigutus $n = 8$ korral, mille korral mistahes ruutu kaheks osaks jaotav sirge lõikab vähemalt ühte kivi, on näidatud joonisel 12.



Joonis 12