XLVII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

12 февраля 2000 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В ромб вписывают окружность, касающуюся всех его сторон. Найти площадь ромба, если точки касания окружности со сторонами ромба делят каждую сторону на отрезки длиной 1 и 2.

2. Доказать, что для любых положительных действительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство

$$ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}\ .$$

3. Радиус описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности равен R, а радиус вписанной окружности равен r. Найти площадь этого треугольника.

4. У Миши есть шесть фотографий размеров 1×1 дм, 1×2 дм, 1×3 дм, 2×1 дм, 2×2 дм и 1×4 дм — и рамка, в которую помещается картинка размера 4×4 дм. Миша хочет составить из имеющихся фотографий коллаж, который точно подходил бы под размеры рамки. Сколько существует различных возможностей для расположения фотографий? (Все фотографии должны находиться в правильном положении.)

5. Найдется ли положительное целое число, которое
   а) больше суммы своих цифр в 2000 раз;
   б) больше суммы своих цифр на 2000?

   В каждом случае найти наименьшее число с таким свойством или обосновать, почему не существует такого числа.

XLVII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

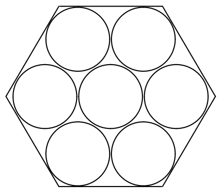
МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

12 февраля 2000 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В правильный шестиугольник вписывают семь окружностей одинакового радиуса так, что каждая из шести внешних окружностей касается двух сторон шестиугольника, двух соседних окружностей и внутренней окружности (см. рисунок). Найти радиус окружностей, если длина стороны шестиугольника равна 1.



2. Доказать, что для любых положительных действительных чисел a и b выполняется неравенство $a^5 + b^5 \geqslant a^3b^2 + b^3a^2$.

3. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC окружность касается гипотенузы AB в точке D. Доказать, что площадь треугольника ABC равна произведению длин отрезков AD и BD.

4. Некоторые вершины куба красят в синий цвет, а все остальные — в красный цвет так, чтобы по крайней мере одна вершина каждого ребра куба была бы синей. Каково наименьшее возможное число синих вершин и сколькими различными способами можно выбрать такое количество вершин, окрашиваемых в синий цвет?

5. Больше ли среди целых чисел от 1 до 2000 таких чисел, которые отличаются от суммы своих цифр на четное число, или таких, которые отличаются от суммы своих цифр на нечетное число? (Число 0 считается четным.)

XLVII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

12 февраля 2000 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что любое не менее чем двухзначное положительное целое число больше произведения своих цифр.

2. Найти все действительные решения уравнения $\dfrac{x^2}{2} = 1 - 2^x$.

3. Биссектрисы треугольника ABC продолжают до пересечения с описанной окружностью. Треугольник, вершинами которого являются полученные точки пересечения, подобен треугольнику ABC. Доказать, что треугольник ABC равносторонний.

4. Покажите, что при любом натуральном числе $n \geqslant 6$ равносторонний треугольник можно разделить на n равносторонних треугольников (не обязательно равной величины).

5. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр положительного целого числа n, тогда $S(S(n))$ обозначает сумму цифр числа $S(n)$, а $S(S(S(n)))$ — сумму цифр числа $S(S(n))$. Найти
   а) наименьшее положительное целое число, для которого $S(S(n)) \neq S(n)$;
   б) наименьшее положительное целое число, для которого $S(S(S(n))) \neq S(S(n))$.