Eesti koolinoorte XLVII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

12. veebruaril 2000. a.

X klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Rombi sisse joonestatakse ringjoon, mis puutub selle kõiki külgi. Leia rombi pindala, kui ringjoone puutepunktid rombi külgedega jaotavad iga külje lõikudeks pikkustega 1 ja 2.

2. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a, b, c, d korral kehtib võrratus

$$ab + cd \leqslant \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}\ .$$

3. Täisnurkse kolmnurga ümberringjoone raadius on R ja siseringjoone raadius r. Leia selle kolmnurga pindala.

4. Mardil on kuus fotot mõõtmetega 1×1dm, 1×2dm, 1×3dm, 2×1dm, 2×2dm ja 1×4dm ning fotoraam, mille sisse mahub pilt mõõtmetega 4×4dm. Mart tahab neist fotodest kokku panna kollaaži, mis sobiks täpselt olemasoleva raami sisse. Mitu erinevat võimalust on tal fotode paigutamiseks? (Kõik fotod peavad olema raamis õigetpidi.)

5. Kas leidub positiivne täisarv, mis
   a) on oma numbrite summast 2000 korda suurem;
   b) on oma numbrite summast 2000 võrra suurem?

   Kummalgi juhul leia vähim sellise omadusega arv või põhjenda, miks niisugust arvu ei leidu.

Eesti koolinoorte XLVII täppisteaduste olümpiaad

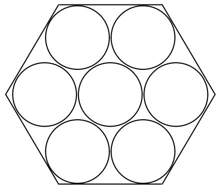
MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

12. veebruaril 2000. a.

XI klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Korrapärase kuusnurga sisse joonestatakse seitse võrdse raadiusega ringjoont nii, et igaüks kuuest välimisest puutub kuusnurga kaht külge, kaht naaberringjoont ja sisemist ringjoont (vt. joonist). Leia ringjoonte raadius, kui kuusnurga küljepikkus on 1.



2. Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude a ja b korral kehtib võrratus $a^5 + b^5 \geqslant a^3b^2 + b^3a^2$.

3. Täisnurkse kolmnurga ABC siseringjoon puutub hüpotenuusi AB punktis D. Tõesta, et kolmnurga ABC pindala on võrdne lõikude AD ja BD pikkuste korrutisega.

4. Kuubi mõned tipud värvitakse siniseks ja kõik ülejäänud punaseks nii, et kuubi iga serva otspunktidest vähemalt üks on sinine. Milline on siniste tippude vähim võimalik arv ning mitmel erineval viisil on selline arv siniseks värvitavaid tippe võimalik valida?

5. Kas täisarvude 1 kuni 2000 hulgas on rohkem selliseid, mis erinevad oma numbrite summast paarisarvu võrra, või selliseid, mis erinevad oma numbrite summast paaritu arvu võrra? (Arv 0 loetakse paarisarvuks.)

Eesti koolinoorte XLVII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

12. veebruaril 2000. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Tõesta, et mistahes vähemalt kahekohaline positiivne täisarv on suurem oma numbrite korrutisest.

2. Leia võrrandi $\dfrac{x^2}{2} = 1 - 2^x$ kõik reaalarvulised lahendid.

3. Kolmnurga ABC nurgapoolitajaid pikendatakse lõikumiseni ümberringjoonega. Kolmnurk, mille tippudeks on saadavad lõikepunktid, on sarnane kolmnurgaga ABC. Tõesta, et kolmnurk ABC on võrdkülgne.

4. Näita, et mistahes naturaalarvu $n \geqslant 6$ korral on võrdkülgset kolmnurka võimalik jaotada n võrdkülgseks kolmnurgaks (need ei tarvitse olla võrdse suurusega).

5. Tähistagu positiivse täisarvu n korral $S(n)$ arvu n numbrite summat, siis $S(S(n))$ tähistab arvu $S(n)$ numbrite summat ning $S(S(S(n)))$ arvu $S(S(n))$ numbrite summat. Leia
   a) vähim positiivne täisarv, mille korral $S(S(n)) \neq S(n)$;
   b) vähim positiivne täisarv, mille korral $S(S(S(n))) \neq S(S(n))$.