Eesti koolinoorte XLVII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

12. veebruaril 2000. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1. 1,77. 2. $m = 2$, $n = 4$. 3. 12. 4. 10234. 5. O. 6. $180°$. 7. 13,5 cm^2. 8. 9. 9. 13. 10. $n = 3$, sobivad mistahes kolm kiivsirgetel paiknevat serva.

VII klass, II osa

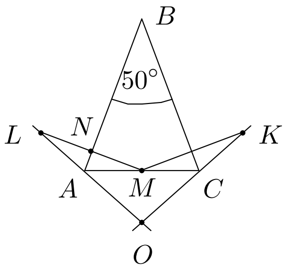
1. *Vastus:* $\dfrac{1}{2000}$.

   Paneme tähele, et $1 - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-1}{k}$. Seega on korrutise väärtus

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{1999}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2000}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{1998}{1999}\cdot\frac{1999}{2000} = \frac{1}{2000}\,.$$

2. *Vastus:* $80°$.

   Kolmnurk ABC on võrdhaarne, järelikult $\angle BAC = \angle BCA = 65°$. Olgu sirgete ML ja BA lõikepunkt N (vt. joonist 1). Et kolmnurgad MAN ja LAN on võrdsed, siis $\angle BAC = \angle BAL = 65°$ ning $\angle CAO = 180° - 2\cdot 65° = 50°$. Et kolmnurk COA on võrdhaarne, siis $\angle COA = 180° - 2\cdot 50° = 80°$.



Joonis 1

3. *Vastus:* Tommy sai kaptenilt lisaks 10, Annika 39 ja Pipi 52 pärlit.

   Tommy sai endale kõik karbid, mille number jagus 3-ga, kuid ei jagunud 4-ga ega 5-ga. Selliseid karpe oli seitse, numbritega 3, 6, 9, 18, 21, 27 ja 33. Vastavalt ülesande tingimustele oli neis karpides kokku $3+6+9+18+21+27+33 = 117$ pärlit. Annika sai endale kõik karbid, mille number jagus 4-ga, kuid ei jagunud 3-ga ega 5-ga. Selliseid karpe oli viis, numbritega 4, 8, 16, 28 ja 32 ning neis oli $4+8+16+28+32 = 88$ pärlit. Karpe, mille number jagus 5-ga, kuid ei jagunud 3-ga ega 4-ga, oli neli ja nad kandsid numbreid 5, 10, 25 ja 35. Pipi sai seega $5+10+25+35 = 75$ pärlit. Ülejäänud karpide seast leidis kapten Pikksukk veel viis karpi, mille number jagus kas 3-ga, 4-ga või 5-ga. Need olid karbid numbritega 12, 15, 20, 24 ja 30, milles oli kokku $12+15+20+24+30 = 101$ pärlit. Kokku läks jaotamisele $117+88+75+101 = 381$ pärlit, millest iga laps pidi saama $381 : 3 = 127$ pärlit. Seega sai Tommy kaptenilt lisaks $127-117 = 10$, Annika $127-88 = 39$ ja Pipi $127-75 = 52$ pärlit.

VIII klass, I osa

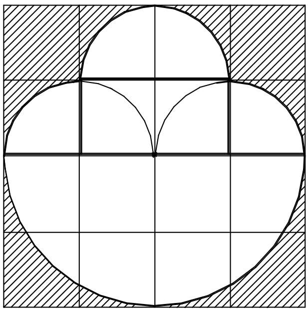
1. 7. 2. 125. 3. 1. 4. 4. 5. 161. 6. $105°$. 7. $30\,\mathrm{cm}^2$. 8. $2+\dfrac{\pi}{4}$.
9. 9. 10. 20.

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* 2222555, 224555, 25558 ja 44555.

Kui m on nõutud omadustega arv, siis selle iga number a on arvu 2000 tegur ning $2 \leqslant a \leqslant 9$. Arvu 2000 teguriteks lahutusest $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ näeme, et numbriks a võib olla kas 2, 4, 5 või 8 ning arvu m numbrite seas peab olema täpselt kolm numbrit 5. Arvu 2^4 esitamiseks numbrite korrutisena on neli erinevat võimalust: $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$. Seega on otsitava arvu m numbrite seas lisaks kolmele numbrile 5 veel kas numbrid 2, 2, 2 ja 2 või 2, 2 ja 4 või 2 ja 8 või 4 ja 4. Järjestades igas arvus numbrid nii, et igast kahest kõrvuti seisvast numbrist vasakpoolne ei oleks suurem parempoolsest, saame otsitavateks arvudeks 2222555, 224555, 25558 ja 44555.

2. *Vastus:* $14 - 3\pi$.



Joonis 2

Viirutatud kujundi pindala S saame, kui ruudu pindalast lahutame viirutamata kujundi pindala S_1. Jaotame ringjoonte kaartega piiratud viirutamata kujundi viieks osaks: poolringiks raadiusega 2, ristkülikuks mõõtmetega 2×1, kaheks veerandringiks raadiusega 1 ja poolringiks raadiusega 1 (vt. joonist 2). Leiame viirutamata kujundi pindala S_1:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = 2 + 3\pi \,.$$

Nüüd saame leida viirutatud kujundi pindala S:

$$S = 4^2 - S_1 = 16 - (2 + 3\pi) = 14 - 3\pi \,.$$

3. *Vastus:* 30.

Iga tõerääkija pidi jaatavalt vastama täpselt ühele küsimusele ja iga valetaja täpselt kahele. Et jaatavaid vastuseid saadi kokku 130, pidid 30 pärismaalast vastama jaatavalt kahele küsimusele, sest kokku on pärismaalasi 100. Järelikult elab saarel 30 valetajat.

IX klass, I osa

1. 21. 2. 24. 3. 9876432105. 4. 9. 5. 7211111. 6. $105°$. 7. $8:1$. 8. 0. 9. 15. 10. 54.

IX klass, II osa

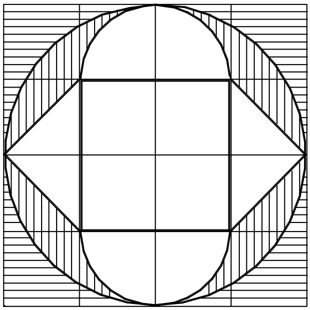
1. *Vastus:* $p = 2$, $q = 3$, $s = 5$, $t = 7$.

Võrduses $p + q = s$ ei saa kõik liikmed olla paaritud, järelikult peab vähemalt üks arvudest p, q ja s olema paarisarv. Et ainus paaris algarv on 2, siis on täpselt üks neist arvudest paaris ja võrdne 2-ga. Ilmselt ei saa selleks olla s, kuna see on kolmest arvust kõige suurem. Järelikult kas $p = 2$ või $q = 2$. Kui $q = 2$, siis peab süsteemi teise võrrandi põhjal olema t paarisarv, mis on suurem kui 2 ega saa järelikult olla algarv. Seega $p = 2$. Siis on arvud q, $s = q + 2$ ja $t = q + 4$ kolm järjestikust paaritut algarvu. Veendume, et vähemalt üks neist arvudest peab jaguma 3-ga. Tõepoolest, kui q ei jagu ise 3-ga, peab ta 3-ga jagades andma jäägi 1 või 2. Esimesel juhul jagub kolmega arv $q + 2$ ja teisel juhul arv $q + 4$. Et 3-ga jagub algarvudest vaid 3 ise, peab kehtima $q = 3$ ning järelikult $s = 5$ ja $t = 7$.

2. *Vastus:* $x = -1 \pm \sqrt{3}$, $y = 2$.

Ülesande teisest võrdusest $y = \dfrac{1}{1 - \dfrac{y}{4}}$ ehk $y = \dfrac{4}{4 - y}$. Korrutades võrduse pooled läbi arvuga $4 - y$, saame $y^2 - 4y + 4 = 0$ ehk $(y - 2)^2 = 0$, millest $y = 2$. Esimesest võrdusest saame nüüd $x = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{2}}$ ehk $x = \dfrac{2}{2 + x}$, millest $x^2 + 2x - 2 = 0$ ning $x = -1 \pm \sqrt{3}$.

3. *Vastus:* Horisontaalselt viirutatud kujundi pindala on suurem.



Joonis 3

Jaotame ringjoonte kaartega ja sirglõikudega piiratud viirutamata kujundi viieks osaks: ruuduks küljepikkusega 2, kaheks poolringiks raadiusega 1 ja kaheks võrdhaarseks täisnurkseks kolmnurgaks kaatetite pikkusega $\sqrt{2}$ (vt. joonist 3). Leiame viirutamata kujundi pindala S:

$$S = 2^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 4 + \pi + 2 = 6 + \pi \ .$$

Vertikaalselt viirutatud kujundi pindala S_v saame, lahutades pindala S ringi pindalast S_r:

$$S_v = S_r - S = 4\pi - (6 + \pi) = 3\pi - 6 \ .$$

Horisontaalselt viirutatud kujundi pindala S_h leiame, lahutades ringi pindala S_r ruudu pindalast:

$$S_h = 4^2 - S_r = 16 - 4\pi \ .$$

Leiame nüüd saadud pindalade vahe:

$$S_h - S_v = 16 - 4\pi - (3\pi - 6) = 22 - 7\pi \ .$$

Kuna $\pi < 3{,}142$, siis $7\pi < 21{,}994$ ning seega $22 - 7\pi > 0$. Järelikult on $S_h > S_v$.

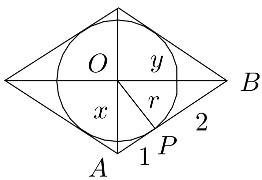
4. *Vastus:* Bettil peab olema vähemalt 7 kübarat.

   Näitame, et Betti ei saa kanda kahel nädalapäeval sama kübarat. Oletame näiteks, et esmaspäeval käis ta väljas punase kübaraga. Siis ei saa ta seda vastavalt ülesande tingimustele uuesti pähe panna enne kui reedel. Kui ta kannaks aga punast kübarat reedel, laupäeval või pühapäeval, peaks ta sellest loobuma järgmisel esmaspäeval. Analoogilise mõttekäigu saab läbi teha ka kõigi teiste päevade jaoks. Seega peab Betti kandma igal nädalapäeval erinevat kübarat ja järelikult peab tal kübaraid olema vähemalt seitse.

X klass

1. *Vastus:* $S = 6\sqrt{2}$.

   Olgu rombi kaks naabertippu A ja B, diagonaalide lõikepunkt O ja puutugu rombi siseringjoon külge AB punktis P. Vastavalt ülesande tingimustele olgu $|AP| = 1$ ja $|BP| = 2$; lisaks tähistame $|OP| = r$, $|AO| = x$ ja $|BO| = y$ (vt. joonist 4).



Joonis 4

   Kuna $\angle AOB = 90°$ ja $\angle APO = 90°$, siis on kolmnurgad AOB, APO ja OPB sarnased. Järelikult $\dfrac{|OP|}{|AP|} = \dfrac{|BP|}{|OP|}$ ehk $\dfrac{r}{1} = \dfrac{2}{r}$ ehk $r^2 = 2$ ja $r = \sqrt{2}$. Niisiis on rombi kõrgus $2r = 2\sqrt{2}$ ja küljepikkus 3 ning pindala seega $6\sqrt{2}$.

2. Et antud võrratuse mõlemad pooled on positiivsed, võime need ruutu tõsta:

$$(ab + cd)^2 = a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2$$

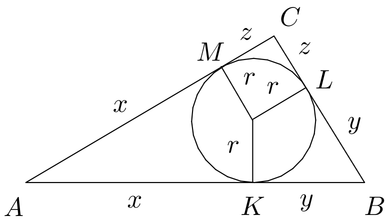
ja

$$\left(\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{b^2+d^2}\right)^2 = a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2\ .$$

Niiviisi saame esialgsega samaväärse võrratuse $2abcd \leqslant a^2d^2+c^2b^2$ ehk $(ad-bc)^2 \geqslant 0$, mis ilmselt kehtib.

3. *Vastus:* $S=(2R+r)\cdot r$.

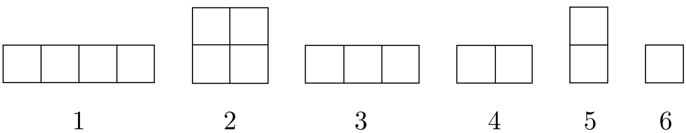
Olgu kolmnurgas ABC täisnurk tipu C juures ning puutugu siseringjoon kolmnurga külgi AB, BC ja CA vastavalt punktides K, L ja M. Olgu puutujalõikude pikkused $|AK|=|AM|=x$, $|BK|=|BL|=y$ ja $|CL|=|CM|=z$, siis $z=r$, $x+y=2R$ ning seega $S=pr=(x+y+z)\cdot r=(2R+r)\cdot r$.



Joonis 5

4. *Vastus:* 8 võimalust.

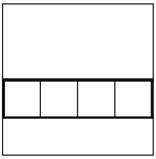
Nummerdame fotod nii, nagu näidatud joonisel 6.



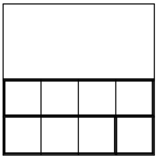
Joonis 6

Fotot 1 on võimalik raami paigutada kahel oluliselt erineval viisil: nii, et raami servas asub kaks või kolm foto 1 serva. Esimesel juhul võime üldisust kitsendamata eeldada, et foto 1 paikneb nii, nagu näidatud joonisel 7. Siis saame fotosid 2 ja 5 asetada ainult fotost

1 kõrgemale, foto 3 tuleb seega paigutada fotost 1 allapoole ning lisaks mahub foto 1 alla vaid foto 6 (vt. joonist 8). Et fotod 2 ja 5 hõivavad vabaks jääva ruumi laiusest kokku 3 dm, siis ei ole meil enam võimalik raami paigutada fotot 4.



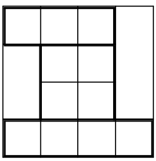
Joonis 7



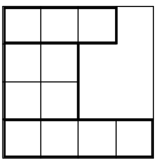
Joonis 8

Niisiis tuleb foto 1 paigutada raami ülemisse või alumisse serva: üldisust kitsendamata võime selleks valida alumise serva. Fotot 2 saame nüüd raami asetada kahel põhimõtteliselt erineval viisil: kas hõivates ühe vabaks jäänud ristküliku nurkadest või mitte. Teisel juhul saame foto 3 jaoks kaks võimalikku asukohta (üks neist on näidatud joonisel 9) ning kummalgi juhul ei saa me enam raami mahutada fotot 4.

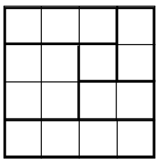
Niisiis tuleb foto 2 panna vabaks jäänud ristküliku ühte nurka, näiteks vasakusse alumisse nurka. Fotot 3 saame seejärel asetada veel vaid raami ülemisse serva. Kui paigutame ta paremale poole, ei saa me vabaks jäävale alale enam ära mahutada fotosid 4 ja 5. Seega tuleb foto 3 paigutada raami vasakusse ülemisse nurka, nagu näidatud joonisel 10.



Joonis 9



Joonis 10



Joonis 11

Foto 4 jaoks on meil nüüd kaks võimalikku asukohta, ühel juhul neist ei ole aga pärast enam võimalik raami paigutada fotot 5.

Seega on pärast fotode 1 ja 2 paigutamist valitud viisil ülejäänud fotode ainus võimalik asetus selline, nagu näidatud joonisel 11.

Et foto 1 asukoha valikuks on meil kaks võimalust (raami ülemisse või alumisse serva) ning pärast seda on foto 2 paigutamiseks kummalgi juhul neli võimalust (ühte neljast vabaksjäänud ristküliku nurkadest), siis on kokku $4+4=8$ erinevat võimalust fotode paigutamiseks.

5. *Vastus:* a) vähim selline arv on 18000; b) sellist arvu ei leidu.

Olgu otsitav arv n ja selle numbrite summa $S(n)$. Siis juhul a) saame võrduse $n=2000\cdot S(n)$, mistõttu arv n peab jaguma 2000-ga. Kui arvus n oleks üksainus nullist erinev number a, siis oleks $n=a\cdot 10^k$ ja $S(n)=a$, s.t. arv n oleks oma numbrite summast suurem 10^k korda — seega on võimalikeks kandidaatideks arvu 2000 kordsed alates 12000-st. Proovides leiame kergesti, et arvud 12000, 14000 ja 16000 ei ole nõutava omadusega, 18000 aga on.

Juhul b) otsime arvu n, mille korral $n=2000+S(n)$. Paneme tähele, et mistahes k-kohalise arvu $n=\overline{a_k\ldots a_3a_2a_1}$ korral on

$$n-S(n)=9a_2+99a_3+999a_4+\ldots+\underbrace{999\ldots9}_{k-1\text{ numbrit}}\,a_k\,.$$

Seega jagub vahe $n-S(n)$ alati 9-ga ega saa võrduda arvuga 2000.

XI klass

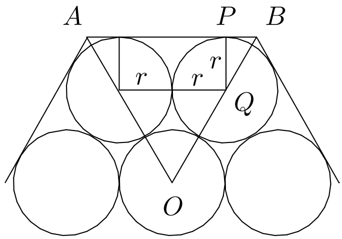
1. *Vastus:* $\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.

Olgu ringjoonte raadius r, keskmise ringjoone keskpunkt O ning kuusnurga kaks naabertippu A ja B (vt. joonist 12). Olgu veel Q tipust B lähtuvaid kuusnurga külgi puutuva ringjoone keskpunkt ja P selle ringjoone puutepunkt küljega AB.

Et kolmnurk ABO on võrdkülgne, siis $\angle PBQ=\angle ABO=60^\circ$ ning $|PB|=\dfrac{r}{\tan 60^\circ}=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$. Seega

$$1=|AB|=2r+2\cdot\frac{r}{\sqrt{3}}=2r\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$$

ning ringjoonte raadius on $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$.



Joonis 12

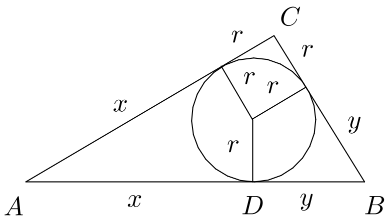
2. *Lahendus 1.* Viies antud võrratuses kõik liikmed ühele poole ja lahutades saadud avaldise teguriteks, saame esialgsega samaväärse võrratuse $a^5 + b^5 - a^3b^2 - b^3a^2 \geqslant 0$ ehk $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geqslant 0$. Kui $a \geqslant b$, siis $a^3 - b^3 \geqslant 0$ ning arvude a ja b positiivsuse tõttu ka $a^2 - b^2 \geqslant 0$; viimaseid võrratusi korrutades saamegi tõestatava võrratuse. Kui aga $a < b$, siis $a^3 - b^3 < 0$ ning $a^2 - b^2 < 0$, neid võrratusi korrutades saame koguni range võrratuse $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) > 0$.

   Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses teisendame tõestatava võrratuse kujule $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geqslant 0$. Lahutades siin sulgavaldised omakorda teguriteks ja kombineerides saadud tegureid, saame võrratuse esitada kujul $(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2) \geqslant 0$, mis arvude a ja b positiivsuse tõttu ilmselt kehtib.

   Lahendus 3. Kasutame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelist seost:

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &= \frac{a^5}{5}+\frac{a^5}{5}+\frac{a^5}{5}+\frac{a^5}{5}+\frac{a^5}{5}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^5}{5} = \\ &= \frac{a^5+a^5+a^5+b^5+b^5}{5} + \frac{b^5+b^5+b^5+a^5+a^5}{5} \geqslant \\ &\geqslant \sqrt[5]{a^5a^5a^5b^5b^5} + \sqrt[5]{b^5b^5b^5a^5a^5} = a^3b^2 + b^3a^2\ . \end{aligned}$$

3. Olgu kolmnurga ABC siseringjoone raadius r ning $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AD| = x$ ja $|BD| = y$ (vt joonist 13).



Joonis 13

Pythagorase teoreemist saame $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$ ja järelikult

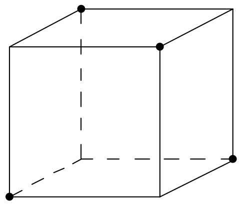
$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 + b^2 .$$

Võrdustest $r = b - x = a - y$ saame $x - y = b - a$ ning ruutu tõstes

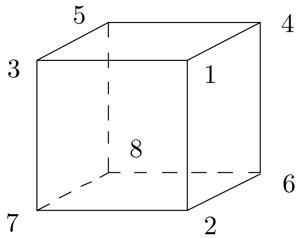
$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 2ab + b^2 .$$

Lahutades esimesest saadud võrdusest teise saame $4xy = 2ab$ ehk $xy = \frac{1}{2}ab$, mida oligi tarvis tõestada.

4. Et kuubil on 12 serva ja iga tipp on täpselt kolme serva otstipuks, siis peab siniseks värvitavaid tippe olema vähemalt neli, ning nelja sinise tipu korral peab igal serval olema üks otstipp sinine ja teine punane. Nelja tipu siniseks värvimisest ka tõepoolest piisab — üks sobiv värvitavate tippude valik on näidatud joonisel 14. Leidmaks võimalike niisuguste värvimiste arvu paneme tähele, et mistahes ühe tipu värvi valikuga on ka kõikide ülejäänud tippude värv üheselt määratud. Tõepoolest, kui valitud tipp (joonisel 15 tähistatud numbriga 1) värvida nt. siniseks, siis sellest lähtuvate servade teised otstipud (joonisel tipud 2, 3, 4) tuleb värvida punaseks, nendest tippudest lähtuvate servade veel värvimata otstipud (joonisel tipud 5, 6, 7 siniseks) ja omakorda nendest lähtuvate servade veel värvimata otstipud (joonisel tipp 8) punaseks. Sellega on kõik kuubi tipud ainsal võimalikul viisil ülesande nõuete kohaselt värvitud, ning et esimese tipu värvi valikuks on kaks võimalust, siis on ka kaks ülesande tingimusi rahuldavat värvimist, mille korral on siniseks värvitavaid tippe täpselt 4.



Joonis 14



Joonis 15

5. *Vastus:* mõlemat liiki arve on ühepalju.

Lahendus 1. Jaotame arvud 1 kuni 2000 paaridesse: $(1, 1001)$, $(2, 1002)$, $\ldots$, $(1000, 2000)$ ning veendume, et igas paaris erineb üks arv oma numbrite summast paarisarvu ja teine paaritu arvu võrra. Tõepoolest, arvu tuhandeliste numbri suurendamisel 1 võrra (jättes ülejäänud numbrid muutmata) suureneb see arv ise 1000 võrra, numbrite summa aga 1 võrra. Seetõttu on igas paaris teise arvu ja selle numbrite summa vahe 999 võrra suurem kui esimese arvu ja selle numbrite summa vahe, s.t. need vahed on erineva paarsusega.

Lahendus 2. Paneme tähele, et arvu ja selle numbrite summa vahe ei sõltu arvu üheliste numbrist, kümneliste numbri muutmisel 1 võrra aga muutub 9 võrra. Jaotame arvud 0 kuni 1999 kahesajaks rühmaks: esimesse rühma võtame arvud 0 kuni 9, teise rühma arvud 10 kuni 19, $\ldots$, 200-ndasse rühma arvud 1990 kuni 1999. Iga rühma piires on arvu ja selle numbrite summa vahe üks ja seesama ning mistahes $2k$. rühmas ($k = 1, \ldots, 100$) on see vahe 9 võrra suurem kui $(2k-1)$. rühmas, kuna nende kahe rühma arvudel on tuhandeliste ja sajaliste numbrid ühesugused, kümneliste numbrid aga erinevad 1 võrra. Niisiis on mistahes $2k$. ja $(2k-1)$. rühmas arvude ja nende numbrite summade vahed erineva paarsusega, ning kuna rühmi on kokku paarisarv, siis on ka arvude $0, \ldots, 1999$ hulgas mõlemat liiki arve ühepalju. Jääb veel üle veenduda, et arv 0 ja arv 2000 erinevad mõlemad oma numbrite summast paarisarvu võrra, s.t. ka arvude $1, \ldots, 2000$ hulgas on mõlemat liiki arve ühepalju.

Lahendus 3. Olgu $n = \overline{a_4 a_3 a_2 a_1}$ mistahes ülimalt neljakohaline arv ja $S(n) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1$ selle numbrite summa. Paneme tähele, et vahe $n - S_n = 999a_4 + 99a_3 + 9a_2$ on sama paarsusega nagu arv $a_4 + a_3 + a_2$. Seega piisab näidata, et arvude 1 kuni 2000 hulgas (ehk samaväärselt arvude 0 kuni 1999 hulgas, arvestades lahenduse 2 lõpus tehtud tähelepanekut) on ühepalju neid, mille *numbrite summa, arvestamata üheliste numbrit*, on paaris, ning neid, mille korral see summa on paaritu. Selles veendumiseks jaotame arvud 0 kuni 1999 rühmadesse 10 kaupa ning leiame iga rühma jaoks ülalmainitud summa: need summad on

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9,\\
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10,\\
2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11,\\
\multicolumn{10}{c}{\dotfill}\\
9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18,\\
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10,\\
2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11,\\
3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12,\\
\multicolumn{10}{c}{\dotfill}\\
10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19.
\end{array}
$$

Jääb üle tähele panna, et saadava tabeli igas reas on viis paaris- ja viis paaritut arvu.

XII klass

1. Tähistagu $P(n)$ arvu n numbrite korrutist. Olgu a arvu $n \geqslant 10$ esimene number, s.t. $n = a \cdot 10^k + b$, kus $1 \leqslant a \leqslant 9$, $k \geqslant 1$ ja $0 \leqslant b < 10^k$. Kuna arv b on ülimalt k-kohaline, siis kehtib võrratus $P(b) \leqslant 9^k < 10^k$. Arvu n numbrite korrutise jaoks saame nüüd võrratuse

$$P(n) = a \cdot P(b) < a \cdot 10^k \leqslant n ,$$

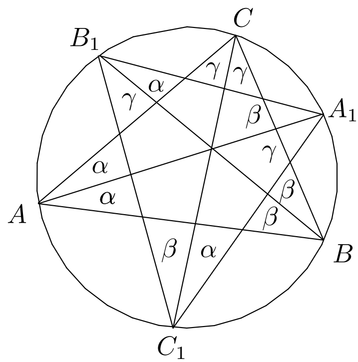
mida oligi tarvis tõestada.

2. *Vastus:* $x = 0$ ja $x = -1$.

Lahendus 1. Tähistame $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ ja $g(x) = 1 - 2^x$ ning näitame, et funktsioon f on kõikjal nõgus, funktsioon g aga kumer ning nende graafikutel saab seega olla ülimalt kaks ühist punkti. Selleks leiame funktsioonide f ja g esimesed ja teised tuletised: $f'(x) = x$ ja $f''(x) = 1 > 0$ ning $g'(x) = -2^x \cdot \ln 2$ ja $g''(x) = -2^x \cdot (\ln 2)^2 < 0$ mistahes reaalarvu x korral. Teisalt on lihtne veenduda, et $f(0) = g(0) = 0$ ning $f(-1) = g(-1) = \dfrac{1}{2}$.

Lahendus 2. Tähistame $h(x) = \dfrac{x^2}{2} - (1 - 2^x)$ ning otsime funktsiooni h nullkohti. Selleks leiame selle esimese ja teise tuletise: $h'(x) = x + 2^x \cdot \ln 2$ ja $h''(x) = 1 + 2^x \cdot (\ln 2)^2 > 0$. Et funktsiooni h teine tuletis on kõikjal positiivne, siis on esimene tuletis kõikjal kasvav ja sellel saab olla ülimalt üks nullkoht, mis on funktsiooni h miinimumkohaks. Seega võib funktsioonil h olla ülimalt kaks nullkohta — teisalt aga näeme, et $h(0) = h(-1) = 0$.

3. Olgu tippudest A, B ja C tõmmatud nurgapoolitajate lõikepunktid kolmnurga ümberringjoonega vastavalt A_1, B_1 ja C_1.



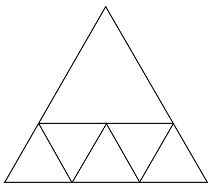
Joonis 16

Olgu $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ ja $\angle BCA = 2\gamma$ (vt. joonist 16). Siis $\angle BB_1A_1 = \angle BAA_1 = \alpha$ ja $\angle BB_1C_1 = \angle BCC_1 = \gamma$. Seega $\angle A_1B_1C_1 = \alpha+\gamma$; samuti $\angle B_1A_1C_1 = \beta+\gamma$ ja $\angle B_1C_1A_1 = \alpha+\beta$.

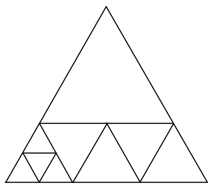
Kuna kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on sarnased, peavad nende nurgad mingis järjekorras võetuna vastavalt võrdsed olema. Olgu üldisust kitsendamata α kolmnurga ABC kõige väiksem ja γ

kõige suurem nurk. Kui $2\alpha = \beta + \gamma$ või $2\alpha = \alpha + \gamma$, siis on ainus võimalus $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Kui aga $2\alpha = \alpha + \beta$, siis $\alpha = \beta$ ja järelikult $2\beta = \beta + \gamma$, mistõttu jällegi $\alpha = \beta = \gamma$. Seega on kolmnurk ABC igal juhul võrdkülgne.

4. Mistahes paarisarvu $n \geqslant 4$ korral saame jaotada võrdkülgse kolmnurga küljepikkusega $(n-2) \cdot a$ üheks võrdkülgseks kolmurgaks küljepikkusega $(n-3) \cdot a$ ja $n-1$ võrdkülgseks kolmnurgaks küljepikkusega a (joonisel 17 on näidatud selline tükeldus $n = 6$ jaoks). Mistahes paaritu arvu $n \geqslant 7$ korral võime kõigepealt jaotada antud võrdkülgse kolmnurga ülalkirjeldatud viisil $n-3$ võrdkülgseks kolmnurgaks ning seejärel ühe neist omakorda 4 võrdkülgseks kolmnurgaks (joonisel 18 on näidatud üks võimalik selline tükeldus $n = 9$ jaoks).



Joonis 17



Joonis 18

5. *Vastus:* a) 19; b) 199.

   Paneme tähele, et vähim arv, mis erineb oma numbrite summast, on 10. Järelikult peab ülesande a) osa tingimusi rahuldava arvu numbrite summa olema vähemalt 10 ning vähim sellise numbrite summaga arv on 19. Et mistahes arv, mille numbrite summa on 11 või suurem, ei saa olla väiksem kui 29, siis on 19 ka tõepoolest vähim nõutava omadusega arv.

   Ülesande b) osas otsime vähimat arvu n, mille numbrite summa $S(n)$ on a) osas kirjeldatud omadusega. Vastavalt a) osa tulemusele on $S(n)$ vähim võimalik väärtus 19 ning vähim sellise numbrite summaga arv on 199. Et mistahes arv, mille numbrite summa on 20 või suurem, ei saa olla väiksem kui 299, siis on 199 ka tõepoolest vähim nõutava omadusega arv.