

XLVI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

23 января 1999 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 1 = xy \\ (x + y)^2 - 1 = 2xy \end{cases}$$

в действительных числах.

2. Найти все такие целые числа, при сложении которых с произвольным простым числом получается простое число.
3. Точка D , симметричная середине гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC относительно прямой BC , находится на биссектрисе угла CAB . Найти величины острых углов треугольника ABC .
4. Из первых $2n$ положительных целых чисел отмечают больше половины чисел. Доказать, что найдутся два отмеченных числа, сумма которых равна $2n + 1$.
5. Коля хочет заменить в записи

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9$$

каждый квадратик знаком $+$ или $-$ и найти значение получающегося выражения. Сколько различных результатов он может получить?

XLVI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

23 января 1999 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Опытный рыбак рассказывал друзьям около костра: “Ну и улов был у меня в тот день! Щук и окуней получил вместе 28 штук, из них взрослых рыб было 25. Окуней и лещей было вместе 24 штуки, из них взрослых 22. Лещей и щук поймал вместе 28, из них взрослых 21.”

Однако друзья рыбака утверждали, что он лжет. Доказать, что они были правы.

2. Первый член последовательности 7, второй $7^2 = 49$, третий $(4 + 9) + 1 = 14$, четвертый $14^2 = 196$, пятый $(1 + 9 + 6) + 1 = 17$ и т.д., то есть следующим членом последовательности берем по-очередно квадрат предыдущего члена или число, на единицу больше суммы цифр предыдущего члена. Найти 1999-ый член этой последовательности.
3. На плоскости задана окружность C с диаметром AB и такая точка D , что $|AD| = |BD|$. Отрезок AD пересекает окружность C в точке E , а F такая точка на хорде AE , что $|DE| = |FE|$. Доказать, что $\angle AFB = 2\angle BAE$.
4. Даны пары чисел $(1, 1999)$, $(2, 1998)$, $(3, 1997)$, \dots , $(1998, 2)$, $(1999, 1)$. В скольких парах первое число делится на второе?
5. В Верховном Совете Ада каждый депутат принадлежит ровно одной из 666 фракций. В каждой фракции четыре депутата, из которых один — глава фракции. По Конституции Ада группа депутатов может образовать комиссию, если в этой группе есть ровно по одному члену от каждой фракции и не более одного такого, который не является главой фракции.

Сколько различных комиссий возможно образовать в Верховном Совете Ада?

XLVI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА, РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

23 января 1999 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Учитель обнаружил, что 88 процентов вещей в портфеле у Коли и грязные и бесполезные. Еще он заметил, что 75 процентов чистых вещей бесполезны, а 80 процентов полезных вещей грязные. Сколько вещей должно было быть по меньшей мере в портфеле у Коли, если известно, что портфель никогда не пустует?
2. Пусть x и y острые углы и $\sin x + \sin y = \cos x + \cos y$. Доказать, что $x + y = 90^\circ$.
3. На плоскости задана окружность C с диаметром AB и такая точка D , что $|AB| = |AD|$. Луч AD пересекает окружность C в точке E , а F такая точка на хорде AE , что $|DE| = |FE|$. Пусть G точка пересечения луча BF с окружностью C . Доказать, что $\angle BAE = 2\angle GAE$.
4. Герой превосходно владеет четырьмя способами нанести удар мечом, с помощью которых может отрубить у дракона 1, 15, 48 или 67 голов соответственно, но при этом вместо срубленных голов сразу вырастает 349, 0, 57 или 16 новых голов соответственно. Если последним ударом герой срубает все головы дракона, то новые головы не вырастают — но к последнему удару у дракона должно оставаться ровно столько голов, сколько можно срубить за один удар.

Может ли герой победить дракона, если у дракона:

- а) 1999 голов;
 - б) 2000 голов?
5. В пространстве заданы прямые a , b , c и d , среди которых нет параллельных. Прямые a и b , a и c , a и d , b и c , b и d пересекаются, причем все эти точки пересечения различны. Доказать что прямые c и d тоже пересекаются.