

Eesti koolinoorte XLVI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

23. jaanuaril 1999. a.

X klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^2 - 1 = xy \\ (x + y)^2 - 1 = 2xy \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

2. Leia kõik niisugused täisarvud, millele mistahes algarvu liitmisel saadakse tulemuseks algarv.
3. Täisnurkse kolmnurga ABC hüpotenuusi AB keskpunktiga sirge BC suhtes sümmeetriline punkt D asub nurga CAB poolitajal. Leia kolmnurga ABC teravnurkade suurused.
4. Esimesest $2n$ positiivsest täisarvust märgitakse ära rohkem kui pooled. Tõesta, et leiduvad kaks märgitud arvu, mille summa on $2n + 1$.
5. Juku tahab asendada kirjutises

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9$$

iga ruudu märgiga $+$ või $-$ ja leida tekkiva avaldise väärtuse. Mitu erinevat tulemust võib Juku saada?

Eesti koolinoorte XLVI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

23. jaanuaril 1999. a.

XI klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Kogenud kalamees jutustas lõkke ääres sõpradele: „Kus mul oli tol päeval alles saak! Hauge ja ahvenaid sain kokku 28, neist täiskasvanuid 25. Ahvenaid ja latikaid oli kokku 24, neist täiskasvanuid 22. Latikaid ja hauged püüdsin kokku 28, neist oli täiskasvanuid 21.“
Kalamehe sõbrad aga väitsid, et ta luiskab. Tõesta, et neil oli õigus.
2. Jada esimene liige on 7, teine $7^2 = 49$, kolmas $(4 + 9) + 1 = 14$, neljas $14^2 = 196$, viies $(1 + 9 + 6) + 1 = 17$ jne., s.t. jada järgmiseks liikmeks võtame vaheldumisi kas eelmise liikme ruudu või eelmise liikme ristsummast ühe võrra suurema arvu. Leia selle jada 1999. liige.
3. Tasandil on antud ringjoon \mathcal{C} diameetriga AB ja selline punkt D , et $|AD| = |BD|$. Lõik AD lõikab ringjoont \mathcal{C} punktis E ning F on selline punkt kõõlul AE , et $|DE| = |FE|$. Tõesta, et $\angle AFB = 2\angle BAE$.
4. Antud on arvupaarid $(1, 1999)$, $(2, 1998)$, $(3, 1997)$, \dots , $(1998, 2)$, $(1999, 1)$. Mitmes paaris jagub esimene arv teisega?
5. Põrgu Ülemnõukogu iga saadik kuulub täpselt ühte 666 fraktsioonist. Igas fraktsioonis on neli saadikut, kellest üks on fraktsiooni esimees. Põrgu Põhiseaduse kohaselt võib rühm saadikuid moodustada komisjoni, kui selles rühmas on igast fraktsioonist täpselt üks liige ning ülimalt üks neist pole fraktsiooni esimees.
Kui palju erinevaid komisjone on Põrgu Ülemnõukogus võimalik moodustada?

Eesti koolinoorte XLVI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

23. jaanuaril 1999. a.

XII klass

Lahendamiseks on aega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Õpetaja leidis, et 88 protsendil Juku koolikotis olevaist asjadest pole ei nägu ega tegu. Veel leidis ta, et 75 protsendil neist asjadest, millel on nägu, ei ole tegu ning 80 protsendil neist asjadest, millel on tegu, ei ole nägu. Mitu asja pidi vähemalt olema Juku koolikotis, kui on teada, et see pole kunagi tühi?
2. Olgu x ja y teravnurgad ning $\sin x + \sin y = \cos x + \cos y$. Tõesta, et $x + y = 90^\circ$.
3. Tasandil on antud ringjoon \mathcal{C} diameetriga AB ja selline punkt D , et $|AB| = |AD|$. Kiir AD lõikab ringjoont \mathcal{C} punktis E ning F on selline punkt kõõlul AE , et $|DE| = |FE|$. Olgu G kiire BF lõikepunkt ringjoonega \mathcal{C} . Tõesta, et $\angle BAE = 2\angle GAE$.
4. Kangelane valdab eeskujulikult nelja mõõgalööki, millega saab lohel maha raiuda vastavalt 1, 15, 48 või 67 pead, kuid seejuures kasvab mahalöödud peade asemele kohe vastavalt 349, 0, 57 või 16 uut pead. Kui viimase hoobiga saavad kõik lohe pead maha löödud, siis enam uusi päid juurde ei kasva — viimaseks löögiks peab aga jääma täpselt niipalju päid, kuipalju ühe löögiga maha raiuda saab.
Kas kangelasel on võimalik lohest jagu saada, kui lohel on:
 - a) 1999 pead;
 - b) 2000 pead?
5. Ruumis on antud sirged a , b , c ja d , mille hulgas ei ole paralleelseid. Sirged a ja b , a ja c , a ja d , b ja c , b ja d lõikuvad, kusjuures need lõikepunktid on kõik erinevad. Tõesta, et ka sirged c ja d lõikuvad.