Eesti koolinoorte XLVI täppisteaduste olümpiaad

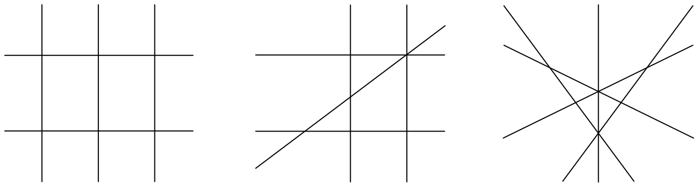
MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

23. jaanuaril 1999. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1. 4. 2. 9. 3. 15. 4. 15. 5. 3. 6. 3π. 7. $16\,\mathrm{cm}^2$. 8. 150°.
9. Sobivad nt. joonisel 1 kujutatud sirgete paigutused. 10. D.



Joonis 1

VII klass, II osa

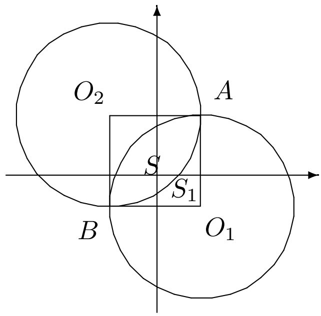
1. *Vastus:* 12, 16, 20, 24 või 28.

   Olgu 2×2 ruudu paremas alumises nurgas kuupäev n, siis ülejäänud kuupäevad selles ruudus on $n-1$, $n-7$ ja $n-8$. Nende summa $n+(n-1)+(n-7)+(n-8)=4n-16$ jagub arvuga 16 parajasti siis, kui n jagub arvuga 4. Et kuupäev 2×2 ruudu paremas alumises nurgas on mitte väiksem kui 9 ja mitte suurem kui 31, siis sobivad arvud 12, 16, 20, 24 ja 28.

2. *Vastus:* ringide ühise osa ümbermõõt on 4π ja pindala $8\pi - 16$.

   Tähistame ringjoonte keskpunktid $O_1(2;-1)$ ja $O_2(-2;3)$, nende lõikepunktid on siis $A(2;3)$ ja $B(-2;-1)$ (vt. joonist 2). Paneme tähele, et nelinurk AO_1BO_2 on ruut küljepikkusega 4. Järelikult moodustab kumbki kaar AB ühe neljandiku vastavast ringjoonest ning ringide ühise osa ümbermõõt on seega $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8\pi = 4\pi$.

Ringide ühise osa pindala leidmiseks paneme tähele, et sektori AO_1B teisest ringist väljapoole jääva osa pindala S_1 saame leida, lahutades ruudu AO_1BO_2 pindalast sektori AO_2B pindala: $S_1 = 4^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 = 16 - 4\pi$. Otsitava pindala S leiame nüüd, lahutades S_1 sektori AO_2B pindalast: $S = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2 - S_1 = 8\pi - 16$.



Joonis 2

3. *Vastus:* Mari oli 10, Jüri 13, Peeter 16, Karl 42 ja Leeni 84 aastat vana.

   Ülesande tingimustest saame, et viimasel kokkutulekul oli Mari Jürist kolm aastat noorem, Jüri Peetrist samuti kolm aastat noorem ja Leeni Karlist kaks korda vanem. Tähistades Peetri vanuse tähega P ja Karli vanuse tähega K, saame Jüri vanuseks $P - 3$, Mari vanuseks $P - 6$ ning Leeni vanuseks $2K$ aastat. Peetri öeldust saame lisaks võrduse $K - 3 = 3 \cdot (P - 3)$, kust $K = 3P - 6$. Mari, Jüri, Peetri, Karli ja Leeni vanuste summa on niisiis

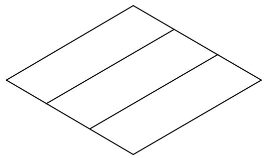
$$(P-6) + (P-3) + P + (3P-6) + 2 \cdot (3P-6) = 12P - 27$$

   aastat. Ülesande tingimuste kohaselt $12P - 27 = 165$, kust $P = 16$. Järelikult oli viimasel kokkutulekul Mari $16 - 6 = 10$, Jüri $16-3 = 13$, Peeter 16, Karl $3 \cdot 16 - 6 = 42$ ja Leeni $2 \cdot 42 = 84$ aasta vanune.

VIII klass, I osa

1. 6. 2. 22. 3. $26{,}25$. 4. $24x - 5y$. 5. 6 ja 24 või 12 ja 18.

6. $\dfrac{9\pi a^2}{4}$. 7. CD. 8. 15 dm. 9. Sobib joonisel 3 kujutatud jaotus ja selle peegelpilt. 10. C.



Joonis 3

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* kollakasoranži karvaga jänese villa müügist.

   Lahendus 1. Olgu x ühe helerohelise karvaga jänese aastane villasaak kilogrammides. Ülesande tingimuste põhjal

   $$5(4 \cdot 10 + 3x) = 4(3 \cdot 10 + 5x)$$

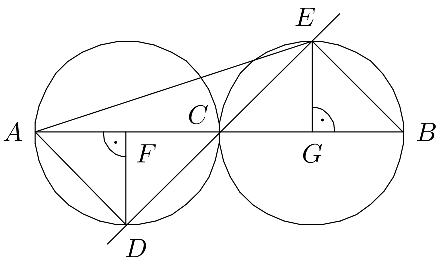
   ehk $200 + 15x = 120 + 20x$, millest $x = 16$. Niisiis on helerohelise karvaga jänesed saagikamad. Olgu helerohelise villa kilogrammi hind a krooni, siis kollakasoranži villa kilogrammi hind on $1{,}65a$ krooni ning tulu saame aastas ühe kollakasoranži jänese villast $10 \cdot 1{,}65a = 16{,}5a$, ühe helerohelise jänese villast aga $16a$ krooni. Järelikult on kasulikum pidada kollakasoranži villaga jäneseid.

   Lahendus 2. Leiame samuti nagu eelmises lahenduses, et üks helerohelise karvaga jänes annab aastas 16 kg villa. Seega heleroheliste jäneste villasaak ületab kollakasoranžide jäneste oma 60 protsendi võrra. Kuna kollakasoranži villa hind on aga 65 protsenti kõrgem helerohelise villa hinnast, siis kaalub see kõrgem hind üles heleroheliste jäneste suurema saagikuse.

   Märkus. Tingimus, et kollakasoranžilt jäneselt saab aastas 10 kg villa, ei ole tegelikult oluline. Võttes kollakasoranži jänese aastaseks villasaagiks z, leiame esimeses lahenduses tooduga sarnase arutluse abil, et helerohelise karvaga jänese aastane villasaak on $1{,}6z$; edasine lahenduskäik sellest ei muutu.

2. *Vastus:* 2.

Lahendus 1. Olgu F ja G vastavalt esimese ja teise ringjoone keskpunkt (vt. joonist 4). Kuna kolmnurk ADC on võrdhaarne, siis on lõik DF tema küljele AC tõmmatud kõrgus ning kolmnurga ADC pindala on $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Sümmeetria tõttu on kolmnurk CEB sarnane kolmnurgaga ADC, millest järeldub, et lõik EG on kolmnurga CEB kõrgus. Kuid siis on lõik EG ka kolmnurga ACE kõrgus ning kolmnurga ACE pindala on $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$. Kolmnurga ADE pindala on järelikult $1 + 1 = 2$.



Joonis 4

Lahendus 2. Samuti nagu esimeses lahenduses tähistame ringjoonte keskpunktid ning näitame, et lõik DF on võrdhaarse kolmnurga ADC kõrgus. Et võrdhaarsetel kolmnurkadel ADC ja AFD on ühine alusnurk, siis on nad sarnased ning järelikult $\angle ADE = 90^\circ$. Sümmeetria tõttu $|CE| = |CD| = |AD|$ ning kolmnurga ADE pindala on $S = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |AD| = |AD|^2 = \frac{1}{2}|AC|^2 = 2$ (kasutame siin asjaolu, et AD on ruudu külg, mille diagonaaliks on lõik AC).

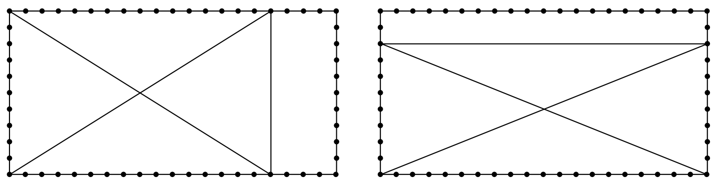
Märkus: kolmnurga ADE täisnurksuse näitamiseks võib muidugi kasutada ka diameetrile toetuva piirdenurga omadust ja lõigu AD pikkuse arvutamiseks Pythagorase teoreemi, kui need faktid on lahendajale tuntud.

3. *Vastus:* 142 ja 857.

Olgu x esimene ja y teine isemõtleja N kirjutatud kolmekohaline arv. Arv $1000y + x$ on siis 6 korda suurem arvust $1000x + y$, ehk võrrandina kirjutatult $6(1000x + y) = 1000y + x$. Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, saame $5999x = 994y$ ehk $857x = 142y$. Viimase võrduse võime kirjutada kujul $x = \frac{142}{857}y$. Et siin peavad x ja y olema kolmekohalised positiivsed täisarvud ning arvud 142 ja 857 on ühistegurita, saame ainsa võimalusena $y = 857$ ja $x = 142$.

IX klass, I osa

1. 6 minutit. 2. f, f. 3. 3^{36}, 4^{27}, 2^{45}. 4. 15 grammi. 5. 6%. 6. 1. 7. Sobivad joonisel 5 kujutatud lõikude paigutused ja nende peegelpildid. 8. $\frac{3}{8}$. 9. $111°$. 10. 12.



Joonis 5

IX klass, II osa

1. Olgu D mingi roheline draakon ja d tema suvaline laps. Väitest c) järeldub, et draakon d on samuti roheline, väitest b) saame, et d oskab lennata. Seega draakoni D kõik lapsed oskavad lennata ning väite a) põhjal on D õnnelik. Kui draakonil D pole ühtegi last, siis ta on õnnelik ainuüksi väite a) põhjal.

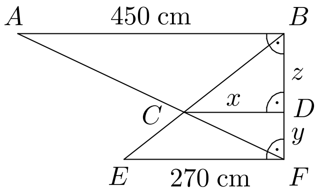
2. *Vastus:* $x = 168\frac{3}{4}$.

   Lahendus 1. Olgu horisontaalsete lõikude otspunktid A, B, C, D, E ja F nagu joonisel 6 näidatud, ning tähistame $|DF| = y$ ja $|BD| = z$. Kolmnurkade CDF ja ABF sarnasusest saame $\frac{y}{y+z} = \frac{x}{450}$ ning kolmnurkade BCD ja BDF sarnasusest saame

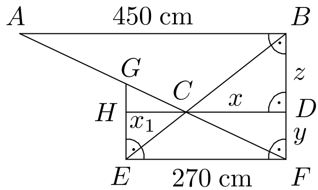
$\dfrac{z}{y+z} = \dfrac{x}{270}$. Neid võrdusi liites leiame

$$1 = \frac{y}{y+z} + \frac{z}{y+z} = \frac{x}{450} + \frac{x}{270}\ ,$$

kust $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{450} + \dfrac{1}{270}$ ja $x = 168\dfrac{3}{4}$.



Joonis 6



Joonis 7

Lahendus 2. Kasutame samu tähistusi nagu esimeses lahenduses. Olgu G selline punkt lõigul AC, et $EG \parallel BF$, ning pikendame lõiku DC kuni ristumiseni lõiguga EG punktis H (vt. joonist 7). Kolmnurgad CGE ja CFB on sarnased (kuna nende vastavad nurgad on võrdsed), kusjuures sarnasustegur $k = \dfrac{|GE|}{|FB|}$ langeb kokku kolmnurkade GEF ja FBA sarnasusteguriga ning seega $k = \dfrac{|EF|}{|AB|} = \dfrac{3}{5}$. Olgu $|CH| = x_1$, siis sellest, et CH ja CD on vastavalt kolmnurkade CGE ja CFB kõrgused, leiame $\dfrac{x_1}{x} = k = \dfrac{3}{5}$. Teisest küljest aga $x + x_1 = |HD| = |EF| = 270$, millest $x + \dfrac{3}{5}x = 270$ ehk $x = 168\dfrac{3}{4}$.

3. *Vastus:* ei leidu.

Antud numbritest koostatud arvu ristsumma on igal juhul

$$138 \cdot 1 + 24 \cdot 6 + 11 \cdot 9 = 381\ ,$$

mis jagub küll 3-ga, aga mitte 9-ga. Näitame, et sel juhul ei saa arv olla täisruut. Tõepoolest, kui mingi täisarvu a korral jagub

a^2 arvuga 3, siis jagub 3-ga ka arv a ise. Siis aga peab a^2 jagu-ma 9-ga. Järelikult ei saa antud numbritest ühegi täisarvu ruutu moodustada.

4. *Vastus:* 6 ja 11.

Leiame kõigepealt kumera $n$nurga diagonaalide arvu. Et n-nurga igast tipust lähtub $n-3$ diagonaali ja sel viisil loendame iga diagonaali kaks korda, on otsitav arv $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Olgu antud hulknurkadel vastavalt m ja n tippu, siis vastavalt ülesande tingimustele $m+n=17$ ja $\dfrac{m(m-3)}{2}+\dfrac{n(n-3)}{2}=53$. Asendades teise võrrandisse $m=17-n$ ja koondades sarnased liikmed, saame ruutvõrrandi $n^2-17n+66=0$, millest leiame lahendid 6 ja 11.

X klass

1. *Vastus:* $(x=1, y=0)$; $(x=-1, y=0)$; $\left(x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Lahendus 1. Teises võrrandis sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine annab $x^2+y^2-1=0$, ehk $x^2-1=-y^2$. Lahutades selle esimesest võrrandist, saame $xy+y^2=0$, kust $y=0$ või $y=-x$. Esimesel juhul leiame esimesest võrrandist $x=\pm 1$, teisel juhul $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Lihtne kontroll näitab, et kõik need väärtuste paarid tõepoolest sobivad.

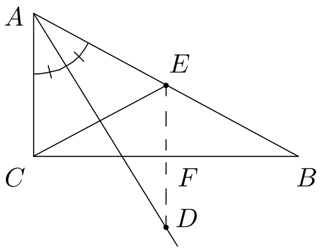
Lahendus 2. Avaldame y esimesest võrrandist: $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ (samast võrrandist on ilmne, et $x\neq 0$). Asendades selle teise võrrandisse, saame $x^2+\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2}=1$, ehk $2x^4-3x^2+1=0$. See on ruutvõrrand x^2 suhtes, mille lahenditeks on $x^2=1$ ja $x^2=\dfrac{1}{2}$. Esimesel juhul saame esimesest võrrandist otse $y=0$, teisel juhul aga $yx = -\frac{1}{2}$, s.t. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ korral $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ning $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ korral $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. *Vastus:* ainus selline arv on 0.

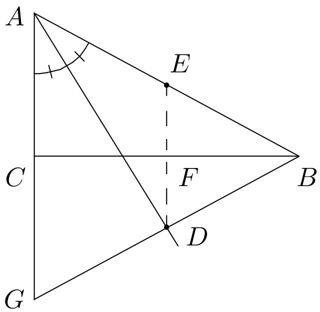
   Lahendus 1. Oletame, et d on nõutud omadusega täisarv. Kui d oleks paaritu, siis oleksid $d+3$ ja $d+5$ erinevad paaris algarvud, mis on aga võimatu. Järelikult d on paarisarv. Kuid siis on $d+2$ paaris algarv, seega $d+2=2$, millest $d=0$. Teiselt poolt on selge, et arv 0 rahuldab ülesande tingimust.

   Lahendus 2. Arv $d=0$ rahuldab ilmselt ülesande tingimusi. Näitame, et ükski teine täisarv d ei sobi. Kui $d>1$, siis olgu k arvu d mingi algtegur. Arv $d+k$ jagub siis k-ga ning ei ole seega algarv. Kui $d=1$, siis arv $d+3=4$ ei ole algarv. Kui $d<0$, siis $d+2$ ei ole algarv, sest ta on väiksem kõige väiksemast algarvust 2.

   Lahendus 3. Olgu d nõutud omadusega täisarv, siis $d+2$ on algarv ning järelikult ka arv $d+(d+2)=2d+2=2(d+1)$ on algarv. Seega $d+1=1$ ehk $d=0$. Arv 0 rahuldab ilmselt ülesande tingimust.



Joonis 8



Joonis 9

3. *Vastus:* 60° ja 30°.

   Lahendus 1. Olgu E hüpotenuusi AB keskpunkt ning F sirgete ED ja BC lõikepunkt (vt. joonist 8). Et lõigud EF ja AC on paralleelsed ning $|AE|=|EB|$, siis EF on kolmnurga ABC kesklõik ja tema pikkus on pool lõigu AC pikkusest. Kuna $|ED|=2|EF|$, siis lõigud ED ja AC on võrdse pikkusega ja paralleelsed, s.t. nelinurk $AEDC$ on rööpkülik. Võrdustest $\angle EDA = \angle CAD = \angle EAD$ saame, et $|ED| = |EA|$ ehk rööpkülik $AEDC$ on romb. Järelikult $|EA| = |AC|$. Samuti $|EA| = |EC|$, sest mõlemad lõigud on kolmnurga ABC ümberringjoone raadiusteks. Kolmnurk ACE on seega võrdkülgne ning $\angle CAB = 60^\circ$; teine teravnurk $\angle CBA = 30^\circ$.

Lahendus 2. Kasutame samu tähistusi nagu esimeses lahenduses. Sirged ED ja AC on paralleelsed, sest nad on mõlemad risti sirgega BC. Seetõttu $\angle EDA = \angle CAD = \angle EAD$. Kolmnurk AED on järelikult võrdhaarne. Kuna $|EF| = \frac{1}{2}|ED| = \frac{1}{2}|EA|$ ja $|EB| = |EA|$, siis täisnurksest kolmnurgast EBF saame $\sin\angle EBF = \frac{|EF|}{|EB|} = \frac{1}{2}$. Seega $\angle ABC = \angle EBF = 30^\circ$ ja $\angle CAB = 60^\circ$.

Lahendus 3. Olgu G punktiga A sümmeetriline punkt sirge BC suhtes, siis $|AB| = |GB|$ ja $|DG| = |EA| = |EB| = |DB|$ (vt. joonist 9). Sirge AD on niisiis korraga kolmnurga ABG nurgapoolitaja ja mediaan, mistõttu $|AB| = |AG|$. Viimane väide järeldub otseselt nurgapoolitaja omadusest; seda saab põhjendada ka siinusteoreemi abil:

$$\begin{aligned}\sin\angle AGD = \frac{|AD|}{|GD|}\sin\angle DAG = \frac{|AD|}{|BD|}\sin\angle DAB = \\ = \sin\angle ABD\,.\end{aligned}$$

Seega on kolmnurk ABG võrdkülgne, millest $\angle CAB = 60^\circ$ ja $\angle CBA = 30^\circ$.

4. *Lahendus 1.* Vaatleme n arvupaari

$$(1, 2n),\ (2, 2n-1),\ \ldots,\ (n, n+1)\,,$$

kus igas paaris olevate arvude summa on $2n+1$. Kuna märgitud arve on rohkem kui n, siis peavad mingid kaks märgitud arvu kuuluma samasse paari. Need arvud ongi otsitavad.

Lahendus 2. Vaatleme $2n$ arvupaari

$$(1, 2n),\ (2, 2n-1),\ \ldots,\ (2n, 1)\,.$$

Kuna rohkem kui pooltes paarides on esimene arv märgitud ja rohkem kui pooltes paarides on teine arv märgitud, siis leidub paar, milles mõlemad arvud on märgitud. Need arvud ongi otsitavad.

5. *Vastus:* 46.

Lahendus 1. Avaldise maksimaalne väärtus on $1+2+\ldots+9=45$, minimaalne väärtus aga $-1-2-\ldots-9=-45$. Kuna kahe arvu summa ja vahe on alati ühesuguse paarsusega, siis on ka kõik ruutude asendamisel märkidega $+$ ja $-$ saadavad erinevad avaldised ühesuguse paarsusega, s.t. paaritud. Näitame, et avaldise väärtuseks võib olla suvaline paaritu arv -45 ja 45 vahel.

Kui numbri 1 ees on märk $+$, siis võime selle asemele kirjutada märgi $-$, millega avaldise väärtus väheneb 2 võrra. Kui numbri 1 ees on märk $-$ ja avaldise väärtus ei ole -45, siis olgu k vasakult lugedes esimene number, mille ees on märk $+$. Numbri $k-1$ ees on järelikult märk $-$. Nüüd võime numbri $k-1$ ette kirjutada märgi $+$ ja numbri k ette märgi $-$, millega avaldise väärtus väheneb jällegi 2 võrra. Lähtudes avaldisest $1+2+\ldots+8+9$, saame kirjeldatud viisil kahandada selle väärtust 2 võrra, kuni jõuame avaldiseni $-1-2-\ldots-8-9$. Lõik $[-45;45]$ sisaldab 91 täisarvu, millest 46 on paaritud.

Lahendus 2. Samuti nagu eelmises lahenduses paneme tähele, et tulemus peab olema paaritu arv lõigult $[-45;45]$. Näitame nüüd, kuidas suvalise niisuguse arvu k jaoks on võimalik märgid numbrite 9, 8, …, 1 ette niiviisi järgemööda valida, et tulemuseks saame parajasti k. Tähistagu S_m viimase m numbri summat, arvestades nende ette kirjutatud märke, ning olgu $S_0=0$. Siis ilmselt $|S_0-k|\leqslant 9+8+\ldots+1$. Kui $S_0>k$, siis kirjutame numbri 9 ette märgi $-$, vastasel korral märgi $+$. Nüüd $|S_1-k|\leqslant 8+7+\ldots+1$ (tõepoolest: kui $|S_0-k|>9$, siis $|S_1-k|=|S_0-k|-9$, vastasel juhul aga $|S_1-k|\leqslant 9$). Edasi kirjutame numbri 8 ette märgi $-$, kui $S_1>k$, vastasel juhul aga märgi $+$, ning leiame S_2; seejärel kirjutame numbri 7 ette märgi $-$ või märgi $+$ vastavalt sellele, kas $S_2>k$ või $S_2\leqslant k$, jne. Ülaltooduga sarnane arutlus näitab, et $|S_2-k|\leqslant 7+6+\ldots+1$, $|S_3-k|\leqslant 6+5+\ldots+1$, …, $|S_7-k|\leqslant 2+1$. Summa S_7 sisaldab neli paaritut liidetavat ning on seega paarisarv, mistõttu $|S_7-k|$ on paaritu arv ning numbri 2 ette sobivalt märgi valides saame $|S_8-k|=1$. Lõpuks valime numbri 1 ette märgi nii, et $|S_9 - k| = 0$.

XI klass

1. *Lahendus 1.* Näitame, et kalamehe jutu järgi oli tema püütud 12 ahvena hulgas 13 täiskasvanut.

   Olgu a, b ja c vastavalt kõigi püütud haugide, ahvenate ja latikate arv ning a_1, b_1 ja c_1 täiskasvanud haugide, ahvenate ja latikate arv saagis. Kalamehe väidete põhjal saame kaks võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} a+b = 28 \\ b+c = 24 \\ c+a = 28 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} a_1+b_1 = 25 \\ b_1+c_1 = 22 \\ c_1+a_1 = 21 \end{cases}.$$

   Esimesest süsteemist leiame $a = 16$, $b = 12$, $c = 12$ ja teisest $a_1 = 12$, $b_1 = 13$, $c_1 = 9$. Siit näemegi, et $b_1 > b$.

   Lahendus 2. Olgu x, y ja z vastavalt noorte (s.t. mitte täiskasvanud) haugide, ahvenate ja latikate arv kalamehe saagis. Kalamehe väidete põhjal saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ y+z = 2 \\ z+x = 7 \end{cases},$$

   mille lahendamisel saame $x = 4$, $y = -1$ ja $z = 3$, s.t. täiskasvanud ahvenate arv on ühe võrra suurem püütud ahvenate koguarvust.

   Lahendus 3. Kalamehe väidete kohaselt oli tema saagis noori (s.t. mitte täiskasvanud) hauge ja ahvenaid kokku $28-25 = 3$ ning noori ahvenaid ja latikaid kokku $24-22 = 2$. Seega võis noori hauge olla ülimalt 3 ja noori latikaid ülimalt 2 ning nende koguarv ei saa olla $28-21 = 7$, nagu kalamees väidab.

2. *Vastus:* 11.

   Kirjutame jada esimesi liikmeid välja, kuni märkame väärtuste kordumist:

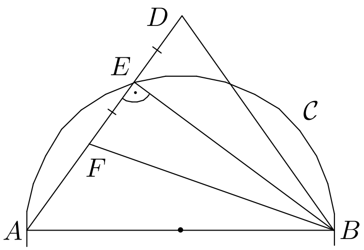
   7, 49, 14, 196, 17, 289, 20, 400, 5, 25, 8, 64, 11, 121, 5, 25, ...

   Tähistades jada liikmed $a_1, a_2, \ldots$ näeme, et $a_9 = a_{15} = 5$. Et $a_{2k} = a_{2k-1}^2$ ja $a_{2k+1} = R(a_k) + 1$ iga $k = 1, 2, \ldots$ korral (kus $R(m)$ tähistab arvu m ristsummat) ning indeksid 9 ja 15 on sama paarsusega, siis ka $a_{10} = a_{16}$, $a_{11} = a_{17}$ jne. Seega $a_m = a_{m+6s}$ mistahes täisarvude $m \geqslant 9$ ja $s \geqslant 0$ korral. Kuna $1999 = 13 + 6 \cdot 331$, siis $a_{1999} = a_{13} = 11$.

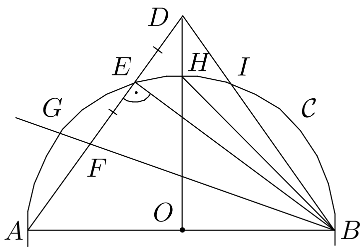
3. *Lahendus 1.* Et ringjoone diameetrile toetuv piirdenurk on alati täisnurk, siis $\angle FEB = \dfrac{\pi}{2}$ (vt. joonist 10). Kuna ülesande tingimuse kohaselt $|EF| = |ED|$, siis täisnurksed kolmnurgad EBF ja EBD on võrdsed. Seega

$$\angle AFB = \pi - \angle BFE = \pi - \angle ADB = 2\angle BAD$$

(viimane võrdus järeldub sellest, et $|AD| = |BD|$ ning seega ka $\angle DAB = \angle DBA$).



Joonis 10



Joonis 11

Lahendus 2. Olgu O ringi keskpunkt ning G, H ja I vastavalt kiire BF, lõigu DO ja lõigu BD lõikepunktid ringjoonega (vt. joonist 11). Siis lõikuvate kõõlude omaduse põhjal

$$\angle AFB = \frac{1}{2}(\angle GOE + \angle AOB) = \angle GBE + 90°.$$

Et ülesande tingimuste põhjal $\angle GBE = \angle IBE$ ning kaarte EH ja HI võrdsuse tõttu $\angle IBH = \angle HBE$, siis

$$\frac{1}{2}\angle GBE = \frac{1}{2}\angle IBE = \angle IBH\ .$$

Niisiis

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\angle AFB &= \frac{1}{2}\angle GBE + 45^\circ = \angle IBH + \angle HBA = \\ &= \angle IBA = \angle BAE\,.\end{aligned}$$

4. *Vastus:* 19.

   Olgu mingi paari teine arv k, siis selle paari esimene arv on $2000-k$. Paari esimene arv jagub teisega siis ja ainult siis, kui leidub niisugune täisarv m, et $2000-k = m\cdot k$ ehk $2000 = (m+1)\cdot k$, s.t. kui k on arvu 2000 jagaja. Arvul 2000 on 19 temast väiksemat positiivset jagajat:

   1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1000.

   Märkus: vajaliku jagajate arvu võime leida ka neid loetlemata, lahutades arvu 2000 teguriteks: $2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Iga otsitav jagaja esitub kujul $2^i 5^j$, kus $0 \leqslant i \leqslant 4$ ja $0 \leqslant j \leqslant 3$. Seega on arvul 2000 kokku $5 \cdot 4 = 20$ positiivset jagajat, neist 19 on väiksemad kui 2000.

5. *Vastus:* 1999.

   Selle fraktsiooni valikuks, kust pärinev komisjoniliige pole fraktsiooni esimees, on 666 võimalust. Olles selle fraktsiooni valinud, jääb meile 3 võimalust valida sellest komisjoni esindaja. Et sellega on kogu komisjoni koosseis üheselt määratud (komisjoni ülejäänud liikmeteks peavad olema kõigi teiste fraktsioonide esimehed), on selliseid komisjone, mille liikmetest üks pole fraktsiooniesimees, võimalik moodustada $3 \cdot 666 = 1998$. Peale nende on veel üks võimalik komisjon, mis koosneb kõikide fraktsioonide esimeestest.

XII klass

1. *Vastus:* 200.

   Lahendus 1. Olgu Juku koolikotis üldse x asja ja y neist sellised, millel on tegu. Siis $0{,}8y$ on nende asjade arv, millel on tegu, kuid pole nägu, ja $0{,}2y$ nende asjade arv, millel on nii tegu kui nägu.

Kuna 75% neist asjadest, millel on nägu, ei ole tegu, siis moodustavad need $0{,}2y$ asja, millel on nii tegu kui nägu, 25% kõigist asjadest, millel on nägu. Seega asju, millel on nägu, kuid pole tegu, on $0{,}6y$. Asju, millel on kas nägu või tegu, on kokku järelikult $y + 0{,}6y = 1{,}6y$. See peab moodustama 12% kõigist Juku koolikotis olevatest asjadest, s.t. arvust x. Järelikult $1{,}6y = 0{,}12x$ ehk $y = 0{,}075x$. Asju, millel on nii nägu kui tegu, on seega $0{,}015x$; asju, millel on nägu, kuid pole tegu, on $0{,}045x$; asju, millel pole nägu, kuid on tegu, on $0{,}06x$ ning asju, millel pole nägu ega tegu, on $0{,}88x$. Otsitavaks x väärtuseks on seega vähim positiivne täisarv, mille korral $0{,}015x$, $0{,}06x$, $0{,}045x$ ja $0{,}88x$ on kõik täisarvud. Selle leidmiseks esitame neis esinevad x kordajad taandumatute harilike murdudena: $0{,}015 = \frac{3}{200}$, $0{,}06 = \frac{3}{50}$, $0{,}045 = \frac{9}{200}$ ja $0{,}88 = \frac{22}{25}$ ning leiame nende nelja murru nimetajate vähima ühiskordse: $\text{VÜK}(200, 50, 200, 25) = 200$.

Lahendus 2. Olgu a, b, c ja d erinevat liiki asjade protsendid Juku koolikotis, nagu näidatud järgmises tabelis:

	on tegu	pole tegu
on nägu	a	b
pole nägu	c	d

Ülesande tingimuste põhjal $d = 88$ ning $b = 0{,}75(a + b)$ ja $c = 0{,}8(a + c)$, ehk $b = 3a$ ja $c = 4a$. Võrdusest

$$a + b + c = 100 - d = 12$$

saame $a + 3a + 4a = 12$, kust $a = 1{,}5$ ning edasi $b = 4{,}5$ ja $c = 6$. Olgu Juku koolikotis ühtekokku x asja, siis eri liiki asju on vastavalt $0{,}015x$, $0{,}045x$, $0{,}06x$ ja $0{,}88x$. Kirjutades kordajad taandumatute harilike murdudena ja leides nende nimetajate vähima ühiskordse, saame vähimaks x väärtuseks, mil need kõik neli suurust on täisarvud, 200.

2. *Lahendus 1.* Teisendades võrduse mõlemad pooled korrutiseks, saa-

me

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,.$$

Kuna x ja y on teravnurgad, siis $-90^\circ<\dfrac{x-y}{2}<90^\circ$ ning $\cos\dfrac{x-y}{2}>0$. Taandades ja seejärel avaldades koosinuse siinuse kaudu, leiame $\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\Big(90^\circ-\dfrac{x+y}{2}\Big)$. Kui x ja y on teravnurgad, siis on seda ka $\dfrac{x+y}{2}$ ja $90^\circ-\dfrac{x+y}{2}$. Järelikult $\dfrac{x+y}{2}=90^\circ-\dfrac{x+y}{2}$ ehk $x+y=90^\circ$.

Lahendus 2. Kirjutame võrduse kujul

$$\sin x-\cos y=\cos x-\sin y\,.$$

Oletame, et $x+y<90^\circ$. Siis $x<90^\circ-y$ ning arvestades, et x ja y on teravnurgad, saame $\sin x<\sin(90^\circ-y)$ ehk $\sin x<\cos y$, s.t. võrduse vasakul pool on negatiivne arv. Teisalt aga $y<90^\circ-x$, millest $\sin y<\sin(90^\circ-x)$ ehk $\sin y<\cos x$, s.t. võrduse paremal pool on positiivne arv — vastuolu.

Olgu nüüd $x+y>90^\circ$. Siis $x>90^\circ-y$, kust $\sin x>\sin(90^\circ-y)$ ehk $\sin x>\cos y$, ning $y>90^\circ-x$, millest $\sin y>\sin(90^\circ-x)$ ehk $\sin y>\cos x$. Jällegi saime võrduse vasakule ja paremale poole erineva märgiga arvud. Seega ainus võimalus, mil võrdus kehtida saab, on $x+y=90^\circ$.

Lahendus 3. Kirjutame võrduse kujul

$$\sin x-\cos x=\cos y-\sin y=\sin(90^\circ-y)-\cos(90^\circ-y)$$

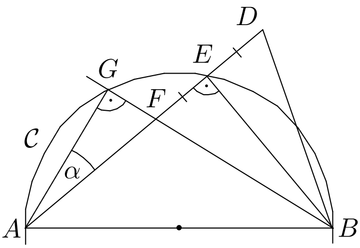
ning vaatleme funktsiooni $f(x)=\sin x-\cos x$. Selle funktsiooni tuletis $f'(x)=\cos x+\sin x$ on vahemikus $0<x<90^\circ$ rangelt positiivne ja funktsioon $f(x)$ on seega selles vahemikus rangelt kasvav. See tähendab, et funktsioon $f(x)$ omandab selles vahemikus iga väärtuse ülimalt üks kord. Et aga $f(x)=f(90^\circ-y)$, peab järelikult olema $x=90^\circ-y$ ehk $x+y=90^\circ$.

Lahendus 4. Kirjutades võrduse kujul

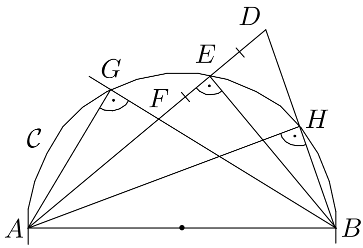
$$\sin x - \cos x = \cos y - \sin y$$

ning tõstes selle pooled ruutu, saame $1 - \sin 2x = 1 - \sin 2y$ ehk $\sin 2x = \sin 2y$. Et siin $2x$ ja $2y$ on positiivsed ja väiksemad kui 180°, siis $2x = 180^\circ - 2y$ või $2x = 2y$. Esimesel juhul oleme saanud nõutava võrduse $x+y = 90^\circ$, teisel juhul saame esialgsesse võrdusesse asendades $\sin x - \cos x = \cos x - \sin x$ ehk $\sin x = \cos x$, kust $x = y = 45^\circ$.

3. *Lahendus 1.* Olgu $\angle GAE = \alpha$ (vt. joonist 12). Kuna nurk AGB on diameetrile toetuv piirdenurk, siis $\angle AGB = 90^\circ$ ning $\angle AFG = 90^\circ - \alpha$. Samuti $\angle AEB = 90^\circ$, mis tähendab, et lõik BE on kolmnurgas DBF ühtaegu kõrgus ja mediaan. Kolmnurk DBF on seega võrdhaarne, s.t. $\angle BDF = \angle BFD = \angle AFG = 90^\circ - \alpha$. Et ülesande tingimuste põhjal on ka kolmnurk ABD võrdhaarne, siis $\angle BAD = 180^\circ - 2\angle ADB = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 2\alpha$, mida oligi tarvis tõestada.



Joonis 12



Joonis 13

Lahendus 2. Diameetrile toetuva piirdenurga omaduse põhjal on lõigud BE ja AE risti, seega on lõik BE kolmnurga DBF kõrgus. Kuna $|EF| = |ED|$, siis kolmnurk DBF on võrdhaarne. Paneme tähele, et võrdhaarsed kolmnurgad DBF ja DAB on sarnased, sest tipu D juures on neil ühine nurk. Seega

$$\angle BAE = \angle FBD = 2\angle GBE = 2\angle GAE$$

(viimane võrdus kehtib, kuna nurgad GBE ja GAE on samale kaarele GE toetuvad piirdenurgad).

Lahendus 3. Olgu H võrdhaarse kolmnurga ABD alusele tõmmatud kõrguse aluspunkt (vt. joonist 13). Täisnurksed kolmnurgad AGF ja BEF on sarnased, sest $\angle GFA = \angle EFB$. Täisnurksed kolmnurgad BEF ja BED on võrdsed, kuna $|EF| = |ED|$, ning täisnurkne kolmnurk BED on sarnane kolmnurgaga AHD (neil on ühine teravnurk tipu D juures) ning viimane omakorda võrdne kolmnurgaga AHB. Järelikult on kolmnurgad AHB ja AHD mõlemad sarnased kolmnurgaga AGF, mistõttu $\angle BAH = \angle HAD = \angle GAE$ ning järelikult $\angle BAE = 2\angle GAE$.

4. *Vastus:* a) saab; b) ei saa.

   a) Näitame, et teist ja neljandat tüüpi löökidega saab lohel maha raiuda 1998 pead, nii et viimaseks löögiks jääb 1 pea. Olgu x ja y vastavalt teist ja neljandat tüüpi löökide arvud. Kuna teist tüüpi löögiga kahaneb lohe peade arv $15 - 0 = 15$ ja neljandat tüüpi löögiga $67 - 16 = 51$ võrra, siis on vaja leida võrrandi $15x + 51y = 1998$ ehk $5x + 17y = 666$ lahend positiivsetes täisarvudes. Kui valida siin $y = 8$, siis $x = 106$. Seega saab kangelane lohest jagu, kui ta teeb kõigepealt 8 neljandat tüüpi lööki, seejärel 106 teist tüüpi lööki ning lõpuks ühe esimest tüüpi löögi.

   b) Iga löögiga muutub lohe peade arv 3-ga jaguva arvu võrra: muutus on vastavalt $+348$, -15, $+9$ või -51. Seega jääb lohe peade arvu jagamisel 3-ga saadav jääk muutumatuks, s.t. on alati 2. Viimaseks löögiks peab lohel alles olema kas 1, 15, 48 või 67 pead, kuid ükski neist arvudest ei anna 3-ga jagamisel jääki 2.

   Märkus: Toodud näites ülesande a) osa jaoks on oluline tehtavate löökide järjekord — kui teha kõigepealt 106 teist tüüpi lööki ja seejärel 8 neljandat tüüpi lööki, siis jääb viimaseks neljandat tüüpi löögiks lohele alles ainult 52 pead ning seda lööki ei saa sooritada. Teisalt võib aga kangelane teha kõigepealt 105 teist tüüpi lööki ja seejärel 8 neljandat tüüpi lööki, nii et viimaseks löögiks jääks lohele täpselt 67 pead.

5. Vaatleme tasandit α, mis on määratud kahe lõikuva sirgega a ja b. Kuna sirge c lõikab sirgeid a ja b erinevates punktides, siis asub ta samal tasandil α. Sarnase arutlusega saame, et ka sirge d asub tasandil α. Kuna sirged c ja d ei ole paralleelsed ja asuvad ühel tasandil, siis nad lõikuvad.