XLV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

24 января 1998 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. При делении числа 150 на натуральное число n получается остаток 18. Найти все такие числа n.

2. Все положительные целые числа записывают в бесконечную таблицу, как показано на рисунке. В каком ряду и в какой строке таблицы находится число 1998?

```
 1 —  2     9 — 10   25 — 26
      |     |    |    |    |
 4 —  3     8   11   24   27
 |          |    |    |    |
 5 —  6 —  7   12   23    ⋮
                 |    |
16 — 15 — 14 — 13   22
 |                    |
17 — 18 — 19 — 20 — 21
```

3. Прямая, параллельная основаниям AB и CD трапеции $ABCD$, пересекает ее боковые стороны AD и BC в точках E и F соответственно. Диагональ трапеции AC делит пополам отрезок EF. Доказать, что отрезок EF проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

4. У движущегося вверх эскалатора за одно время видны 80 ступенек. Поднимаясь на эскалаторе, Коля все время с постоянной скоростью шагает вверх по одной ступеньке и успевает сделать за время подъема ровно 20 шагов. Сколько шагов успел бы сделать Коля, шагая вверх в два раза быстрее?

5. Найти все такие пары чисел (p, q), при которых числа $\dfrac{p}{q}$ и $p+q$ будут решениями квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

XLV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

24 января 1998 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все тройки (a, b, c) положительных целых чисел, при которых $a \leqslant b \leqslant c$ и число $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ будет целым.

2. В равнобедренном треугольнике ABC отношение длин основания BC и боковой стороны равно k. На прямой AB берется отличная от B точка D так, что отрезок CD равен по длине основанию треугольника ABC. Найти отношение длин отрезка BD и боковой стороны треугольника ABC.

3. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ симметричен относительно оси y и пересекает ось x в двух различных точках, расстояние между которыми равно максимальному значению этой функции. Найти все обладающие этими свойствами квадратичные функции $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c будут целыми числами.

4. Две окружности с радиусом R расположены на плоскости так, что расстояние между их центрами равно $3R$. Третья окружность касается первых двух окружностей, а также прямой, соединяющей их центры. Найти радиус третьей окружности.

5. На праздничном вечере присутствуют n человек. Назовем присутствующего *застенчивым*, если за время праздника он беседует не более чем с тремя различными партнерами. Известно, что среди собеседников каждого присутствующего по меньшей мере три застенчивых человека.
   а) Доказать, что все присутствующие застенчивы.
   б) Найти все возможные значения n.

XLV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

24 января 1998 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать равенство

$$\frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ} + \ldots + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 14^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sin 14^\circ}{\cos 15^\circ \cos 1^\circ}\,.$$

2. В конусообразном закрытом стеклянном сосуде высотой 1м находится некоторое количество воды. Держа сосуд вертикально вершиной вниз, Коля сделал на стенке сосуда отметку, показывающую уровень воды. Перевернув сосуд вершиной вверх, Коля увидел, что и теперь вода точно достигает отметки. Найти глубину воды в сосуде (т.е. расстояние от поверхности воды до вершины) до переворачивания.

3. Найти все возможные остатки, которые могут получаться при делении на 12 квадрата p^2 простого числа $p > 3$.

4. Квадрат разрезают на 25 квадратиков, причем 24 из них имеют длину стороны 1см, а у оставшегося квадратика длина стороны другая. Найти все возможные значения длины стороны первоначального квадрата.

5. На плоскости дан квадрат $ABCD$. Найти все точки S на плоскости, для которых $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$.