Eesti koolinoorte XLV täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

24. jaanuaril 1998. a.

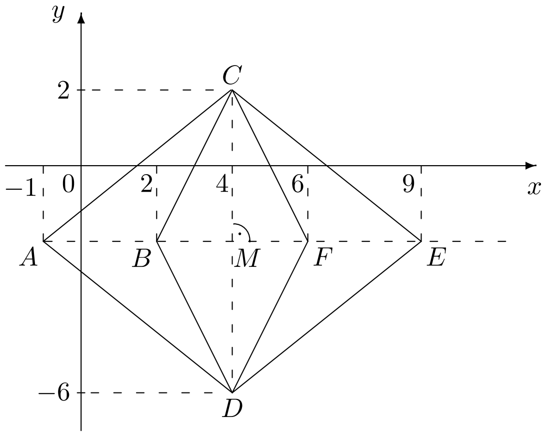
Lahendused ja vastused

VII klass, I osa

1. 10 krooni. 2. -17. 3. 37. 4. 90. 5. 399. 6. 25%. 7. 8. 8. 180°. 9. $8\,\mathrm{cm}^2$. 10. CD, AD, AB, GH, EH, EF, CG.

VII klass, II osa

1. *Vastus:* $D(4;-6)$, $E(9;-2)$, $F(6;-2)$; nelinurga $BCFD$ pindala moodustab 40% nelinurga $ACED$ pindalast.



Joonis 1

Kandes teljestikku punktid A, B ja C ning teostades nõutud peegeldused, saame punktide D, E ja F koordinaatideks vastavalt $D(4;-6)$, $E(9;-2)$ ja $F(6;-2)$ (vt. joonist 1). Ristuvad sirged AB ja CD on nelinurkade $ACED$ ja $BCFD$ sümmeetriatelgedeks, mis jaotavad kummagi nelinurga neljaks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks. Olgu M nende nelinurkade ühine sümmeetriakeskpunkt, siis saame nende pindalad avaldada kujul

$$S_{BCFD} = 4 \cdot S_{BCM} = 2 \cdot |BM| \cdot |CM|$$

ja

$$S_{ACED} = 4 \cdot S_{ACM} = 2 \cdot |AM| \cdot |CM|$$

ning leida pindalade suhte:

$$S_{BCFD} : S_{ACED} = \frac{2 \cdot |BM| \cdot |CM|}{2 \cdot |AM| \cdot |CM|} = \frac{|BM|}{|AM|}\,.$$

Jooniselt leiame $|BM| = 2$ ja $|AM| = 5$. Seega $\dfrac{|BM|}{|AM|} = \dfrac{2}{5}$ ning nelinurga $BCFD$ pindala moodustab $\dfrac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%$ nelinurga $ACED$ pindalast.

2. *Vastus:* Otsitav arv on 364.

Lahendus 1. Tähistagu $\overline{abc}$ esialgset arvu. Ülesande tingimuste kohaselt $c = 4$. Esialgne arv $\overline{ab4}$ on arvust 400 sama palju väiksem kui arv $\overline{4ab}$ on suurem arvust 400, s.t. kahekohalise arvu $\overline{ab}$ võrra. Seega peab arvu $\overline{ab4}$ esimene number olema 3. Saame võrrandi $\overline{3b4} = 400 - \overline{3b}$, ehk

$$300 + 10b + 4 = 400 - 30 - b\,,$$

millest $b = 6$.

Lahendus 2. Olgu esialgne arv $10x + 4$, siis sellest saadud arv on $400 + x$. Et teine arv on arvust 400 suurem x võrra, peab esialgne arv olema x võrra väiksem arvust 400. Saame võrrandi $10x + 4 = 400 - x$, millest $11x = 396$ ja $x = 36$, s.t. esialgne arv on $10x + 4 = 364$.

Lahendus 3. Olgu esialgne arv $400 - z$, siis sellest saadud arv on $400 + z$ ning nende arvude summa on 800. Kirjutame arvud kohakuti nii, nagu seda tehakse kirjalikul liitmisel:

$$\begin{array}{rccc} & \circ & \bullet & 4 \\ + & 4 & \circ & \bullet \\ \hline & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

Siit on lihtne näha, et märgi $\bullet$ asemele tuleb selles liitmistehtes kirjutada number 6.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ \circ\;6\;4 \\ +\;4\;\circ\;6 \\ \hline 8\;0\;0 \end{array}$$

Näeme, et märgi $\circ$ asemele tuleb kirjutada number 3. Esialgne arv on seega 364.

3. *Vastus:* a) ei; b) jah.

a) Ülesande tingimustele vastava nummerdamise korral on ühe lehe leheküljenumbrite summa alati paaritu arv (kahe järjestikuse naturaalarvu summa). Et paaritu arvu paaritute arvude summa on paaritu, siis mistahes viieteistkümne lehe leheküljenumbrite summa on alati paaritu arv ega saa olla võrdne arvuga 1998.

b) Noodikogu esimese kümne lehe leheküljenumbrite summa $S = 1 + 2 + \ldots + 20$ leidmiseks kirjutame nõutava summa kaks korda üksteise alla.

$$\begin{array}{lcrcrcrcccrcrl} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 19 & + & 20 & ; \\ S & = & 20 & + & 19 & + & 18 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 & . \end{array}$$

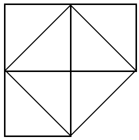
Paneme tähele, et paremal pool võrdusmärke üksteise alla kirjutatud arvude summad on kõik võrdsed. Liites need kaks võrdust, saame

$$\begin{aligned} 2 \cdot S &= (1+20) + (2+19) + \ldots + (19+2) + (20+1) = \\ &= 20 \cdot 21\,, \end{aligned}$$

seega otsitav summa on $S = \dfrac{20 \cdot 21}{2} = 210$, mis langeb kokku Juku leitud summaga.

VIII klass, I osa

1. 103. 2. $19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91$. 3. 21%. 4. $m = 4$, $n = 5$. 5. 20. 6. 3. 7. 2π m. 8. 85°. 9. vt. joonist 2. 10. 60°.



Joonis 2

VIII klass, II osa

1. *Vastus:* Ainus sobiv arv on 350.

   Olgu antud kolmekohaline arv $\overline{abc}$, millest pärast numbri a kustutamist saadud arv $\overline{bc}$ on seitse korda väiksem esialgsest arvust. Siis $7\overline{bc} = \overline{abc} = 100a + \overline{bc}$ ehk $50a = 3\overline{bc}$. Kuna võrduse vasak pool jagub arvuga 10, siis $c = 0$ ja $5a = 3b$. Et arvud 5 ja 3 on ühistegurita, siis ainsad sobivad numbrid on $a = 3$ ja $b = 5$.

2. *Vastus:* Selle hulknurga sisenurkade summa on $3060°$.

   Kui hulknurga külgede arv on n, siis selle diagonaalide arv on $\frac{n(n-3)}{2}$ (igast hulknurga tipust lähtub $n-3$ diagonaali). Ülesande tingimuste kohaselt $\frac{n(n-3)}{2} = 8n$, kust $\frac{n-3}{2} = 8$ ja $n = 19$. 19-nurga sisenurkade summa on $(19-2)\cdot 180° = 3060°$.

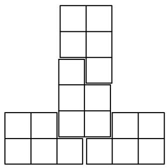
3. *Vastus:* $3:5:4$.

   Võtame esimest segu $3x$ osa, teist $5y$ osa ja kolmandat $4z$ osa, siis saame kokku $x+z$ osa ainet A, $2x+2y$ osa ainet B ja $3y+3z$ osa ainet C. Siit näeme, et vajaliku segu saamiseks võime võtta $x = y = z = 1$, s.t. esimest, teist ja kolmandat olemasolevat segu vahekorras $3:5:4$.

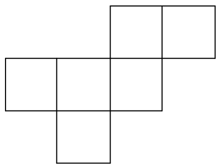
   Märkus: Kuigi ülesandes pole seda nõutud, näitame, et leitud vahekord on ainus sobiv. Tõepoolest, lähtudes eespool toodud seostest ja ülesande tingimustest saame võrrandid $2x + 2y = 2(x+z)$ ja $3y + 3z = 3(x+z)$. Esimesest võrrandist leiame $y = z$ ja teisest $y = x$, s.t. $x = y = z$.

IX klass, I osa

1. $-\dfrac{7}{12}$. 2. $\dfrac{81}{17}$ (eelmise murru lugejat korrutatakse 3-ga, nimetajale liidetakse 3). 3. $\dfrac{4}{3}$ liitrit. 4. 111. 5. 2. 6. 36; 3. 7. $\alpha = 72°$, $\beta = 54°$, $\gamma = 18°$. 8. vt. joonist 3. 9. 14. 10. vt. joonist 4.



Joonis 3



Joonis 4

IX klass, II osa

1. *Vastus:* 20%.

   Oletame, et kaupmees ostis hobuse x kuldmündi eest, siis sai ta ka x protsenti tulu. Saame võrrandi $\dfrac{24-x}{x} \cdot 100 = x$ ehk $x^2 + 100x - 2400 = 0$, mille lahenditeks on $x_1 = 20$ ja $x_2 = -120$. Et ülesande sisuga sobib ilmselt ainult positiivne lahend, siis $x = 20$.

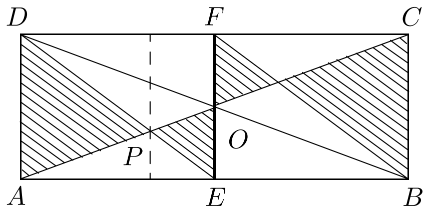
2. *Vastus:* Need algarvud on 2, 3, 5, 11, 13, 37 ja 101.

   Tegurdame antud vahet:

$$\begin{aligned}
&6 \cdot 66 \cdot 666 \cdot 6666 - 4 \cdot 44 \cdot 444 \cdot 4444 = \\
&\quad = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 11 \cdot 111 \cdot 1111 - 2^8 \cdot 11 \cdot 111 \cdot 1111 = \\
&\quad = 2^4 \cdot 11 \cdot 111 \cdot 1111 \cdot (3^4 - 2^4) = \\
&\quad = 2^4 \cdot 11 \cdot 111 \cdot 1111 \cdot 65 = \\
&\quad = 2^4 \cdot 11 \cdot \underbrace{3 \cdot 37}_{111} \cdot \underbrace{11 \cdot 101}_{1111} \cdot \underbrace{5 \cdot 13}_{65}.
\end{aligned}$$

3. *Vastus:* $5:7$.

Lahendus 1: Tähistame punktid nii, nagu joonisel 5 näidatud, ja täiendame joonist diagonaaliga BD. Leiame viirutatud ja viirutamata osa pindalade suhte kolmnurgas ABD (sümmeetria tõttu on see suhe sama ka kolmnurgas BCD ja kogu ristkülikus $ABCD$).



Joonis 5

Et lõigud AO ja DE on kolmnurga ABD mediaanid, siis $|AP|:|PO| = |DP|:|PE| = 2:1$. Olgu $S_{OPE} = x$, siis $S_{APE} = 2x$ (nende kolmnurkade aluste AP ja PO pikkuste suhe on 2, kõrgused on võrdsed), $S_{APD} = 4x$ (kolmnurgad APD ja OPE on sarnased sarnasusteguriga 2), $S_{DOP} = 2x$ ja $S_{EOB} = S_{OPE} + S_{APE} = 3x$. Otsitav suhe on seega

$$\frac{S_{\text{viirutatud}}}{S_{\text{viirutamata}}} = \frac{4x + x}{2x + 2x + 3x} = \frac{5}{7}\,.$$

Lahendus 2: Paneme tähele, et viirutatud kolmnurgad APD ja OPE (vt. joonist 5) on sarnased (sest nende vastavad küljed on paralleelsed). Et $|AD| = 2|OE|$, siis $S_{APD} = 4S_{OPE}$ ning ristküliku $ADFE$ viirutatud osa kogupindala on seega $5\,S_{OPE}$. Jaotades ristküliku $ADFE$ külgedega AD ja EF paralleelse ning punkti P läbiva joonega (joonisel 5 on see näidatud punktiiriga) kaheks ristkülikukujuliseks osaks, saame $S_{ADFE} = 2S_{APD} + 4S_{OPE} = 12S_{OPE}$. Seega on selle ristküliku viirutamata osa pindala $7S_{OPE}$ ning viirutatud ja viirutamata osade pindalade suhe $5:7$. Sama kehtib sümmeetria tõttu ka ristküliku $EFCB$ ja kogu suure ristküliku $ABCD$ jaoks.

4. *Vastus:* Võitja paari vähim võimalik punktide arv on 5 ja suurim 17.

On ilmne, et võitja paari vähim võimalik kohapunktide arv 5 saavutatakse siis, kui kõik kohtunikud annavad sellele paarile ühe kohapunkti.

Viis kohtunikku jaotavad kokku $5\cdot(1+2+3+4+5+6)=105$ kohapunkti. Kui võistelnud paarid said vastavalt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ja x_6 kohapunkti, siis $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=105$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6$, siis ilmselt $6x_1 \leqslant 105$ ehk $x_1 \leqslant 17{,}5$. Niisiis ei saa täisarv x_1 olla suurem kui 17. Järgnevas tabelis on esitatud näide, kus $x_1=x_2=x_3=17$ ja $x_4=x_5=x_6=18$.

Paar	Kohtunikud					Summa
	A	B	C	D	E	
I	3	3	3	4	4	17
II	1	6	5	3	2	17
III	2	1	6	5	3	17
IV	4	2	1	6	5	18
V	5	4	2	1	6	18
VI	6	5	4	2	1	18

X klass

1. *Vastus:* need arvud on 22, 33, 44, 66 ja 132.

   Naturaalarv n peab olema arvu $150-18=132$ jagaja, mis on suurem kui 18. Et $132=2^2\cdot 3\cdot 11$ ning $2^2\cdot 3=12<18$, siis peab arvus n sisalduma tegur 11. Seega sobivad arvud 22, 33, 44, 66 ja 132.

2. *Vastus:* 28. reas ja 45. veerus.

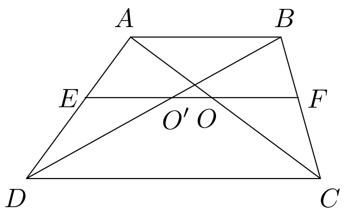
   Paneme tähele, et mistahes täisarvu $n \geqslant 1$ korral paiknevad n^2 esimest positiivset täisarvu $n\times n$ ruuduna tabeli ülemises vasakus nurgas, kusjuures paarituarvulise n korral kirjutatakse arvud $n^2{+}1,\ n^2{+}2,\ \ldots,\ n^2{+}n{+}1$ tabeli $(n{+}1)$. veergu suunaga ülalt allapoole ja arvud $n^2{+}n{+}1,\ n^2{+}n{+}2, \ldots,\ (n{+}1)^2$ tabeli $(n{+}1)$. ritta suunaga paremalt vasakule, paarisarvulise n korral aga kirjutatakse arvud $n^2{+}1,\ n^2{+}2,\ \ldots,\ n^2{+}n{+}1$ tabeli $(n{+}1)$. ritta vasakult paremale ja arvud $n^2{+}n{+}1,\ n^2{+}n{+}2, \ldots,\ (n{+}1)^2$ tabeli

$(n+1)$. veergu alt ülespoole. Et $44^2 = 1936 < 1998 < 2025 = 45^2$ ning $1998 = 45^2 - 27$, siis paikneb arv 1998 tabeli 45. veerus ja 28. reas.

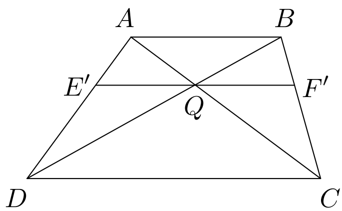
3. *Lahendus 1:* Olgu O ja O' vastavalt lõigu EF lõikepunktid trapetsi diagonaalidega AC ja BD (vt. joonist 6). Eelduse põhjal $|EO| = |OF|$ ja on vaja tõestada, et $O = O'$. Kolmnurgad ABC ja OFC on sarnased, sest nende vastavad nurgad on võrdsed; samuti on sarnased kolmnurgad ABD ja $EO'D$. Sarnaste kolmnurkade vastavate kõrguste suhe on võrdne sarnasusteguriga — teisalt aga on kolmnurkade ABC ja ABD küljele AB tõmmatud kõrgus võrdne trapetsi $ABCD$ kõrgusega ning kolmnurkade OFC ja $EO'D$ vastavad kõrgused on võrdsed lõigu EF ja aluse CD vahelise kaugusega. Seega on mõlemal juhul sarnasusteguriks üks ja sama arv, s.t.

$$\frac{|EO'|}{|AB|} = \frac{|OF|}{|AB|},$$

kust $|EO'| = |OF| = |EO|$ ning $O = O'$.



Joonis 6



Joonis 7

Lahendus 2: Olgu E' ja F' mingi trapetsi alustega paralleelse sirge lõikepunktid vastavalt trapetsi haaradega AD ja BC. Samuti nagu eelmises lahenduses tõestame, et kui lõik $E'F'$ läbib trapetsi diagonaalide lõikepunkti Q (vt. joonist 7), siis $|E'Q| = |QF'|$ ning seega on lõik $E'F'$ sel juhul ülesandes nõutud omadustega. Teisalt on ilmne, et lõigu $E'F'$ nihutamisel aluse AB poole suhe $|E'O| : |OF'|$ (kus O on lõigu $E'F'$ lõikepunkt diagonaaliga AC; eespool vaadeldud juhul $O = Q$) väheneb ja lõigu nihutamisel aluse CD poole suureneb — seega on joonisel kujutatud lõigu $E'F'$ asend ainus, mille korral diagonaal AC poolitab selle lõigu.

4. *Vastus:* 32 sammu.

   Et eskalaatori nähtava osa pikkus on 80 astet ja Juku jõuab sõiduteekonna vältel teha täpselt 20 sammu, siis liigub ta iga sammu ajal $\frac{80}{20} = 4$ astme võrra ülespoole, s.t. eskalaatoril paigal seistes jõuaks ta selle ajaga 3 astme võrra ülespoole. Kui Juku astub kaks korda kiiremini, teeb ta sama ajaga kaks sammu ning jõuab järelikult 5 astme võrra ülespoole. Seega jõuab Juku sel juhul sõiduteekonna vältel teha $2 \cdot \frac{80}{5} = 32$ sammu.

5. *Vastus:* $\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}, \frac{-5+\sqrt{5}}{10}\right)$ ja $\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \frac{-5-\sqrt{5}}{10}\right)$.

   Paneme kõigepealt tähele, et $p \neq 0$ (vastasel juhul oleks üheks ruutvõrrandi lahendiks 0 ning seega ka $q = 0$, mistõttu murrul $\frac{p}{q}$ poleks mõtet). Viete'i valemitest saame $\frac{p}{q} + p + q = -p$ ja $\frac{p}{q} \cdot (p+q) = q$, ehk $p + 2pq + q^2 = 0$ ja $p^2 + pq = q^2$. Asendades q^2 teisest võrrandist esimesse, saame $p^2 + 3pq + p = 0$ ning $p \neq 0$ tõttu $p + 3q + 1 = 0$. Asendame siit p esimesse võrrandisse: $q^2 + 2q \cdot (-3q-1) - 3q - 1 = 0$ ehk $5q^2 + 5q + 1 = 0$. Selle võrrandi lahendid on $q_1 = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$ ja $q_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}$ ning vastavad p väärtused on $p_1 = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$ ja $p_2 = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$. Mõlemad leitud paarid rahuldavad ülesande tingimusi.

XI klass

1. *Vastus:* $(1,1,1)$, $(1,2,2)$, $(3,3,3)$, $(2,4,4)$ ja $(2,3,6)$.

   Et arvud $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ ja $\frac{1}{c}$ on kõik positiivsed ega ületa arvu 1, siis saab nende summa n omandada ainult kolme täisarvulist väärtust: $n = 1$, $n = 2$ ja $n = 3$. Kui $n = 3$, siis on ainsaks võimaluseks $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = 1$, s.t. $a = b = c = 1$. Kui $n = 2$, siis peab olema

$a=1$ (vastasel korral $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{3}{2}$) ning võrdusest $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ saame ainsa lahendina $b=c=2$. Kui $n=1$, siis on arvud a, b ja c kõik suuremad ühest ja $a\leqslant 3$. Juhul $a=3$ saame $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}$, kust tingimust $c\geqslant b\geqslant 3$ arvestades leiame $b=c=3$. Juhul $a=2$ kehtib võrdus $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$, kust $b\leqslant 4$ ning leiame kaks lahendit $b=4,\ c=4$ ja $b=3,\ c=6$.

2. *Vastus:* k^2.

   Et võrdhaarsetel kolmnurkadel ABC ja CDB on ühine alusnurk $\angle ABC$, siis on need kolmnurgad sarnased. Seega on kolmnurga CDB aluse ja haara pikkuste suhe samuti k ning

$$\frac{|DB|}{|AB|}=\frac{|DB|}{|BC|}\cdot\frac{|BC|}{|AB|}=k^2\,.$$

3. *Vastus:* Leidub kolm sellist ruutfunktsiooni: $y=-x^2+4$, $y=-2x^2+2$ ja $y=-4x^2+1$.

   Lahendus 1: Et ruutfunktsioonil $y=ax^2+bx+c$ leidub maksimaalne väärtus, siis peab olema $a<0$ (graafik avaneb allapoole). Et graafik lõikab x-telge kahes erinevas punktis, siis asub selle tipp ülalpool x-telge, s.t. $c>0$. Kuna graafik on sümmeetriline y-telje suhtes, siis selle tipp asub y-teljel ja $b=0$. Leiame ruutfunktsiooni graafiku ja x-telje lõikepunktide koordinaadid (funktsiooni nullkohad) x_1 ja x_2:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\sqrt{-4ac}}{2a}\,,$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\sqrt{-4ac}}{2a}\,.$$

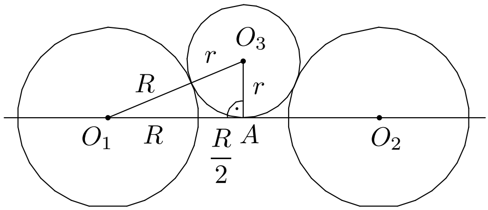
   Nende lõikepunktide vaheline kaugus $|x_2-x_1|=\left|\frac{\sqrt{-4ac}}{a}\right|$ peab olema võrdne arvuga c: $\left|\frac{\sqrt{-4ac}}{a}\right|=c$, kust $-4ac=a^2c^2$ ehk $ac=-4$. Et a ja c on täisarvud ning $a<0$, $c>0$, saame kolm võimalust: $a=-1, c=4$; $a=-2, c=2$ ja $a=-4, c=1$.

Leitud funktsioonid $y = -x^2 + 4$, $y = -2x^2 + 2$ ja $y = -4x^2 + 1$ on tõepoolest kõik nõutavate omadustega.

Lahendus 2: Nii nagu eelmiseski lahenduses näitame, et $a < 0$, $c > 0$ ja $b = 0$. Vastavalt ülesande tingimustele peavad funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ nullkohtadeks olema $\pm\frac{c}{2}$, s.t. $a \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2 + c = 0$ ehk $ac = -4$. Edasine arutlus toimub samuti nagu esimeses lahenduses.

4. *Vastus:* $\frac{5}{8}R$.

Olgu raadiusega R ringjoonte keskpunktid O_1 ja O_2, kolmanda ringjoone keskpunkt O_3 ja raadius r ning olgu A lõigu O_1O_2 keskpunkt (vt. joonist 8). Täisnurksest kolmnurgast O_1AO_3 saame $(R + r)^2 = \left(\frac{3}{2}R\right)^2 + r^2$ ehk $2Rr = \frac{5}{4}R^2$, kust $r = \frac{5}{8}R$.



Joonis 8

5. *Vastus:* b) mistahes paarisarv $n \geqslant 4$.

a) Oletame vastuväiteliselt, et peolviibijate hulgas leidub mittehäbelik inimene A. Vastavalt ülesande tingimustele vestleb ta vähemalt kolme häbeliku peolisega; olgu üks neist B. Ka B vestleb vähemalt kolme häbeliku inimesega, ent lisaks sellele vestleb ta ka A-ga, kes ei ole häbelik. Seega on B-l kokku vähemalt neli vestluspartnerit, see aga on vastuolus B häbelikkusega.

b) Näitame kõigepealt, et n ei saa olla paaritu arv. Kuna kõik peolised on ülaltõestatu põhjal häbelikud, ei vestle ükski neist peol rohkem kui kolme inimesega. Teisalt vestleb iga peoline vähemalt kolmega ülejäänutest, seega peab igaühel olema täpselt kolm vestluspartnerit. Olgu peol n inimest, siis vestlejate paare on kokku

$\dfrac{3n}{2}$ ning järelikult peab n olema paarisarv.

Suvalise paarisarvu $n \geqslant 4$ jaoks saame ülesande tingimustele vastava peo korraldada, organiseerides vestlused näiteks järgmisel viisil: istugu kõik peolviibijad ümmarguse laua ääres ning olgu igaühe vestluspartnereiks tema parempoolne ja vasakpoolne naaber ning see peoline, kes istub otse tema vastas üle laua.

Märkus: Näite paarisarvu $n \geqslant 4$ jaoks võime konstrueerida ka nii: jagame kõik peolised neljakaupa rühmadesse (kui arv n ei jagu neljaga, siis võtame esimesse rühma kuus peolist). Vestluspartnerid määrame iga rühma piires — neljast inimesest koosnevas rühmas vestlevad kõik üksteisega, kuue inimese korral võime rakendada näiteks ülaltoodud üldist konstruktsiooni.

XII klass

1. Teisendame vasakul pool võrdusmärki olevaid murde, kasutades võrdust

$$\sin 1^\circ = \sin\big((n+1)^\circ - n^\circ\big) = \sin(n+1)^\circ \cos n^\circ - \cos(n+1)^\circ \sin n^\circ .$$

Niiviisi saame $\dfrac{\sin 1^\circ}{\cos n^\circ \cos(n+1)^\circ} = \tan(n+1)^\circ - \tan n^\circ$ ning võrduse vasak pool teiseneb kujule

$$\tan 2^\circ - \tan 1^\circ + \tan 3^\circ - \tan 2^\circ + \ldots + \tan 15^\circ - \tan 14^\circ =$$
$$= \tan 15^\circ - \tan 1^\circ = \frac{\sin 15^\circ \cos 1^\circ - \sin 1^\circ \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ \cos 1^\circ} =$$
$$= \frac{\sin 14^\circ}{\cos 15^\circ \cos 1^\circ} .$$

2. *Vastus:* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ meetrit.

Et vesi ulatus anuma mõlemas asendis täpselt ühe ja sama märgini, oli veega täidetud täpselt pool anuma mahust (anuma osa, mis oli ühes asendis veega täidetud, oli teises asendis tühi, ja vastupidi). Olgu vee sügavus anumas enne ümberpööramist x meetrit, siis

$\left(\dfrac{x}{1}\right)^3 = \dfrac{1}{2}$ (sest anuma veega täidetud osa on homoteetne kogu anumaga, homoteetsusteguriga x), kust $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

3. *Vastus:* ainus võimalik jääk on 1.

   Lahendus 1: Kolmest suurem algarv p ei saa olla paarisarv ega arvu 3 kordne, seega peab olema $p = 12k \pm 1$ või $p = 12k \pm 5$ ning vastavalt $p^2 = (12k \pm 1)^2 = 12 \cdot (12k^2 \pm 2k) + 1$ või $p^2 = (12k \pm 5)^2 = 12 \cdot (12k^2 \pm 10k) + 25 = 12 \cdot (12k^2 \pm 10k + 2) + 1$.

   Lahendus 2: Kuna arv p ei jagu kahe ega kolmega, siis selle ruut annab nii kolme kui ka neljaga jagades jäägi 1, s.t. arv $p^2 - 1$ jagub nii kolme kui ka neljaga. Et $\text{SÜT}\,(3,4) = 1$, siis $p^2 - 1$ jagub arvuga $3 \cdot 4 = 12$ ning seega p^2 annab 12-ga jagamisel jäägi 1.

4. *Vastus:* ainus võimalik väärtus on $7\,\text{cm}$.

   Olgu esialgse ruudu küljepikkus $x\,\text{cm}$ ja teistest erineva suurusega tüki küljepikkus $y\,\text{cm}$, siis pindalade võrdsusest saame $x^2 = 24 + y^2$ ehk $(x+y)(x-y) = 24$.

   Näitame, et x ja y peavad mõlemad olema täisarvud. Tõepoolest, esialgsel ruudul leidub külg, mis tükeldamisel jaotub ainult $1\,\text{cm}$ pikkusteks lõikudeks — seega on x täisarv. Nüüd on ilmne, et ka y peab olema täisarv, sest küljepikkusega $y\,\text{cm}$ ruutu läbiv esialgse ruudu servaga paralleelne lõik jaotub tükeldamisel lõiguks pikkusega $y\,\text{cm}$ ja mingiks arvuks lõikudeks pikkusega $1\,\text{cm}$.

   Võrdusest $(x+y)(x-y) = 24 = 3 \cdot 2^3$ saame nüüd tegurite ühesugust paarsust arvestades kaks lahendit: $x - y = 2$, $x + y = 12$ ja $x - y = 4$, $x + y = 6$. Teine neist annab $y = 1$, mis on vastuolus ülesande tingimustega; esimesest lahendist saame $x = 7$ ja $y = 5$.

   Jääb veel üle veenduda, et niisugune tükeldus on tõepoolest võimalik (lahenduses kasutasime vaid *pindalade* võrdsust!) — selleks võime tüki suurusega $5\,\text{cm} \times 5\,\text{cm}$ välja lõigata näiteks esialgse ruudu nurgast ja selle ülejäänud osa tükeldada ruutudeks suurusega $1\,\text{cm} \times 1\,\text{cm}$.

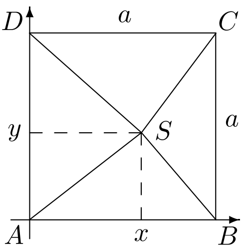
5. *Vastus:* kõik punktid, mis asuvad ruudu külgede keskristsirgetel.

   Paigutame ruudu $ABCD$ koordinaattasandile nii, et tipp A on koordinaatide alguspunktis ning tipud B ja D paiknevad vastavalt

x-telje ja y-telje positiivses osas (vt. joonist 9). Olgu ruudu küljepikkus a ning punkti S koordinaadid (x, y), siis saame võrduse $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$ kirjutada kujul

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2} = \sqrt{(a-x)^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+(a-y)^2}\,.$$

Tõstes selle võrduse mõlemad pooled ruutu ja lihtsustades, saame $\big(x^2 - (a-x)^2\big) \cdot \big(y^2 - (a-y)^2\big) = 0$ ehk $a^2(2x-a)(2y-a) = 0$. See võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui $x = \frac{a}{2}$ või $y = \frac{a}{2}$, s.t. kui punkt S asub ruudu $ABCD$ mingi külje keskristsirgel. Teisalt on lihtne näha, et mõlema niisuguse sirge kõik punktid rahuldavad ülesande tingimusi.



Joonis 9