XLIV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

18 января 1997 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет вещественных решений и $a + b + c > 0$. Доказать, что $c > 0$.

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ взяты точки P и Q. Доказать, что сумма площадей треугольников APB и CPD равна сумме площадей треугольников AQD и CQB.

3. Найдутся ли целые числа m и n такие, что

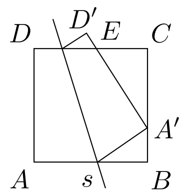
$$\frac{19m + 97n}{19n + 97m} = 1997\ ?$$

4. Бруно, Бенно и Бернхард — три брата, один из которых всегда говорит правду, другой всегда лжет, а в речи третьего чередуются верные и ложные высказывания. Друг о друге ребята говорили следующее:

   Бруно: "У Бенно светлые волосы и у Бернхарда также светлые волосы."
   Бенно: "У Бернхарда светлые волосы, а Бруно рыжий."
   Бернхард: "Бруно рыжий и Бенно также рыжий."

   Определить, говорит ли Бенно правду, ложь или по очереди то и другое.

5. Квадрат $ABCD$ сгибается вдоль прямой s, пересекающей его стороны AB и CD. При этом вершина A попадает в точку A' на стороне квадрата BC, а вершина D в точку D'. Пусть E точка пересечения отрезка $A'D'$ со стороной квадрата CD. Доказать, что периметр треугольника ECA' равен половине периметра квадрата $ABCD$.



XLIV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

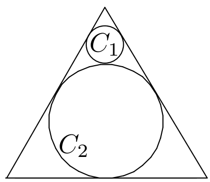
18 января 1997 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть a и $b \leqslant 0$ вещественные числа, причем $2a+2b+4ab \geqslant 1$. Доказать, что из уравнений $(b+1)\,x^2 + 2\sqrt{-b}\,x + a = 0$ и $\sqrt{\dfrac{|a+b|}{16}}\,x^2 + \sqrt{2a+2b+4ab-1}\,x + |a+b|\sqrt{|a+b|} = 0$ по крайней мере одно не имеет вещественных решений.

2. Окружность C_1 касается двух сторон равностороннего треугольника и окружности C_2, вписанной в этот треугольник. Найти отношение радиусов окружностей C_1 и C_2.



3. Некоторые два члена арифметической прогрессии с целочисленными членами взаимно просты. Доказать, что любые два идущих подряд члена этой прогрессии взаимно просты.

4. На выборах баллотировались четыре политика A, B, C и D, из которых по крайней мере один всегда говорит правду и по крайней мере один всегда говорит ложь. После выборов, на которых эти политики получили разное число голосов, они говорили друг о друге следующее:

   A: “B победил, C был вторым и D последним.”
   B: “A был вторым, C предпоследним и D последним.”
   C: “B победил, D был вторым и A третьим.”
   D: “B победил, C был предпоследним и A последним.”

   Определить действительную очередность политиков по результатам выборов.

5. На плоскости дано конечное число отрезков, не имеющих общих точек. Возможно ли при произвольном расположении этих отрезков соединить некоторые их концы между собой отрезками так, чтобы получилась ломаная без самопересечений, содержащая все данные отрезки?

XLIV Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТУР

18 января 1997 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что для любого положительного вещественного числа x выполняется неравенство $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

2. На окружности выбираются четыре различные точки A, B, C, D так, что хорды AC и BD пересекаются под прямым углом. Доказать, что сумма квадратов длин хорд AB и CD равна квадрату диаметра окружности.

3. Пусть m и n взаимно простые целые числа, большие единицы. Доказать, что число $\log_n m$ нельзя представить в виде отношения двух целых чисел.

4. Часть точек плоскости окрашены в синий цвет, а все оставшиеся — в красный. Доказать, что при любом способе раскраски на этой плоскости можно найти равносторонний треугольник, все вершины которого имеют одинаковый цвет.

5. Окружность, вписанная в равносторонний треугольник Δ_0, является описанной окружностью для равностороннего треугольника Δ_1. Окружность, вписанная в треугольник Δ_1, является описанной для равностороннего треугольника Δ_2; окружность, вписанная в треугольник Δ_2, является описанной для равностороннего треугольника Δ_3 и т.д. Какую долю от площади треугольника Δ_0 составляет сумма площадей треугольников Δ_1, Δ_2, Δ_3, ...?