

# Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaad

## MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

18. jaanuaril 1997. a.

X klass

Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

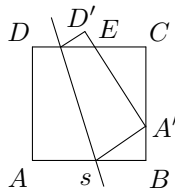
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. On teada, et võrrandil  $ax^2 + bx + c = 0$  puuduvad reaalarvulised lahendid ja  $a + b + c > 0$ . Tõesta, et  $c > 0$ .
2. Rööpküliliku  $ABCD$  sisepiirkonnas võetakse punktid  $P$  ja  $Q$ . Tõesta, et kolmnurkade  $APB$  ja  $CPD$  pindalade summa on võrdne kolmnurkade  $AQD$  ja  $CQB$  pindalade summaga.
3. Kas leiduvad niisugused täisarvud  $m$  ja  $n$ , et

$$\frac{19m + 97n}{19n + 97m} = 1997 ?$$

4. Bruno, Benno ja Bernhard on kolm venda, kellest üks räägib alati tõtt, teine alati valet ning kolmanda jutus esinevad tõesed ja väärar väited vaheldumisi. Üksteise kohta rääkisid poisid järgmist:  
Bruno: "Bennol on heledad juuksed ja Bernhardil on samuti heledad juuksed."  
Benno: "Bernhardil on heledad juuksed, aga Bruno on punapea."  
Bernhard: "Bruno on punapea ja Benno on samuti punapea."  
Tee kindlaks, kas Benno räägib tõtt, valet või mõlemat vaheldumisi.

5. Ruut  $ABCD$  murtakse kokku mööda sirget  $s$ , mis lõikab ruudu külgi  $AB$  ja  $CD$ . Ruudu tipp  $A$  satub seejuures punkti  $A'$  ruudu küljel  $BC$  ja tipp  $D$  punkti  $D'$ . Olgu  $E$  löigu  $A'D'$  lõikepunkt ruudu küljega  $CD$ . Tõesta, et kolmnurga  $ECA'$  ümbermõõt on võrdne poolega ruudu  $ABCD$  ümbermõödust.



# Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaad

## MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

18. jaanuaril 1997. a.

XI klass

Lahendamisaega 5 tundi.

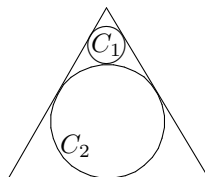
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Olgu  $a$  ja  $b \leq 0$  sellised reaalarvud, et  $2a + 2b + 4ab \geq 1$ . Tõesta, et vähemalt ühel võrranditest  $(b + 1)x^2 + 2\sqrt{-b}x + a = 0$  ja

$\sqrt{\frac{|a+b|}{16}}x^2 + \sqrt{2a+2b+4ab-1}x + |a+b|\sqrt{|a+b|} = 0$  puuduvad reaalarvulised lahendid.

2. Ringjoon  $C_1$  puutub võrdkülgse kolmnurga kaht külge ja selle siseringjoont  $C_2$ . Leia ringjoonte  $C_1$  ja  $C_2$  raadiuste suhe.



3. Täisarvuliste liikmetega aritmeetilise jada mingid kaks liiget on ühistegurita. Tõesta, et selle jada mistahes kaks järjestikust liiget on ühistegurita.
4. Valimistel kandideerisid neli poliitikut  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$ , kellest vähemalt üks räägib alati tõtt ja vähemalt üks räägib alati valet. Pärast valimisi, kus need poliitikud said erineva arvu hääli, rääkisid nad üksteise kohta järgmist:

$A$ : “ $B$  võitis,  $C$  tuli teiseks ja  $D$  jäi viimaseks.”

$B$ : “ $A$  tuli teiseks,  $C$  jäi eelviimaseks ja  $D$  viimaseks.”

$C$ : “ $B$  võitis,  $D$  tuli teiseks ja  $A$  kolmandaks.”

$D$ : “ $B$  võitis,  $C$  jäi eelviimaseks ja  $A$  viimaseks.”

Tee kindlaks poliitikute tegelik järjestus valimiste järel.

5. Tasandil on antud lõplik arv sirglõike, millel ei ole ühiseid punkte. Kas nende lõikude mistahes paigutuse korral on võimalik mõned nende otspunktid omavahel sirglõikudega ühendada nii, et moodustub iseennast mittelõikav murdjoon, mis sisaldab kõik antud lõigud?

# Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaad

## MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

18. jaanuaril 1997. a.

XII klass

Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Tõesta, et mistahes positiivse reaalarvu  $x$  korral kehtib võrratus  $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ .
2. Ringjoonel võetakse neli erinevat punkti  $A, B, C, D$  nii, et kõõlud  $AC$  ja  $BD$  lõikuvad täisnurga all. Tõesta, et kõõlude  $AB$  ja  $CD$  pikkuste ruutude summa on võrdne ringjoone diameetri ruuduga.
3. Olgu  $m$  ja  $n$  ühest suuremad ühistegurita täisarvud. Tõesta, et arv  $\log_n m$  ei ole esitatav kahe täisarvu suhtena.
4. Osa tasandi punkte värvitakse siniseks ja kõik ülejäänud punaseks. Tõesta, et mistahes värvimisviisi korral saab sellel tasandil leida võrdkülgse kolmnurga, mille kõik tipud on ühte värvi.
5. Võrdkülgse kolmnurga  $\Delta_0$  siseringjoon on ümberringjooneks võrdkülgsele kolmnurgale  $\Delta_1$ , kolmnurga  $\Delta_1$  siseringjoon on ümberringjooneks võrdkülgsele kolmnurgale  $\Delta_2$ , kolmnurga  $\Delta_2$  siseringjoon on ümberringjooneks võrdkülgsele kolmnurgale  $\Delta_3$  jne. Kui suure osa kolmnurga  $\Delta_0$  pindalast moodustab kolmnurkade  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$  pindalade summa?