Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

18. jaanuaril 1997. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa.

1. 6,25. 2. Maha tõmmata tuleb arvud 825 ja 960. 3. 192. 4. 4 (need arvud on 13, 53, 31 ja 101). 5. $x = 0$, $y = -12$. 6. 6 cm. 7. $\angle ACB = 40^\circ$, $\angle CAB = \angle CBA = 70^\circ$. 8. 20. 9. 22 cm. 10. 3 ja 5.

VII klass, II osa.

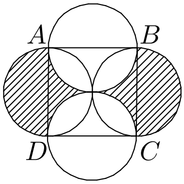
1. *Vastus:* $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

   Olgu $x = 1$, siis $\dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = \dfrac{z}{yz+1} = \dfrac{3}{7}$. Võttes $z = 3$, saame $yz = 6$, kust $y = 2$.

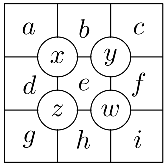
   Märkus: Näitame, et leitud lahend on ainus (seda pole küll ülesandes nõutud). Tõepoolest, kuna $y + \dfrac{1}{z} > 1$ mistahes positiivsete täisarvude y, z korral, siis $0 < \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}} < 1$ ning järelikult $x = 1$ ja $\dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = \dfrac{z}{yz+1} = \dfrac{3}{7}$, kust leiame $z = \dfrac{3}{7 - 3y}$. Et z väärtus oleks positiivne täisarv, peab olema $7 - 3y = 1$ (annab lahendi $y = 2$, $z = 3$) või $7 - 3y = 3$ (täisarvulist lahendit ei anna).

2. *Vastus:* $64\,\mathrm{cm}^2$.

   Viirutatud kujundi pindala leidmiseks tuleb ruudu $ABCD$ (mille küljepikkus on võrdne ringjoone diameetriga, s.t. 8 cm) pindalast lahutada kahe poolringi pindala ja liita kahe poolringi pindala (vt. joonist 1).



Joonis 1



Joonis 2

3. *Vastus:* $\frac{49}{8}$.

Olgu ruutudes arvud $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ ja ringides arvud x, y, z, w nagu joonisel 2 näidatud. Siis

$$\frac{x+y+z+w}{4} = \\ = \frac{1}{4}\left(\frac{a+b+d+e}{4} + \frac{b+c+e+f}{4} + \right. \\ \left. + \frac{d+e+g+h}{4} + \frac{e+f+h+i}{4}\right) = \\ = \frac{1}{16}\big(a+c+g+i+2(b+d+f+h)+4e\big)\,.$$

See avaldis omandab maksimaalse väärtuse, kui sulgudes olevas summas suurema kordajaga esinevad arvud valida võimalikult suured, s.t. $\{a, c, g, i\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\{b, d, f, h\} = \{5, 6, 7, 8\}$ ja $e = 9$.

VIII klass, I osa.

1. $\frac{28}{49}$. 2. $\frac{1}{5}$. 3. 1250 männiistikut, 750 kaseistikut. 4. 15-kohaline (see arv on $4 \cdot 10^{14}$). 5. 2, 5 ja 11. 6. 15. 7. $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$. 8. 125°. 9. 20%. 10. 6 või 7 (olenevalt sellest, kas keha keskel on kuubik või mitte).

VIII klass, II osa.

1. *Vastus:* $a = 198$.

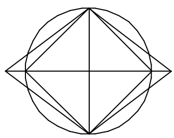
Et arvu a numbritest saaks moodustada kuus erinevat kahekohalist arvu, mille kümneliste ja üheliste numbrid on erinevad, peab arv a olema kolmekohaline, s.t. $a = \overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Ülesandes mainitud kuus kahekohalist arvu on seega $\overline{xy} = 10x + y$, $\overline{yx} = 10y + x$, $\overline{yz} = 10y + z$, $\overline{zy} = 10z + y$, $\overline{xz} = 10x + z$ ja $\overline{zx} = 10z + x$. Nende arvude summa on

$$(\overline{xy} + \overline{yx}) + (\overline{yz} + \overline{zy}) + (\overline{xz} + \overline{zx}) = \\ = 11(x + y) + 11(y + z) + 11(z + x) = 22(x + y + z)\ .$$

Niisiis saame võrduse $100x + 10y + z = 11(x + y + z)$ ehk $89x = y + 10z$. Et arv $y + 10z$ on ülimalt kahekohaline ja $x = 0$ korral saame $y = z = 0$, siis $x = 1$, s.t. $y + 10z = 89$, kust $y = 9$ ja $z = 8$.

2. *Vastus:* $6\,\mathrm{cm}^2$.

   Ülesande tingimustest saame rombi diagonaalide pikkusteks $8\,\mathrm{cm}$ ja $6\,\mathrm{cm}$, seega rombi pindala on $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24\,\mathrm{cm}^2$. Rombi lühem diagonaal on ühtlasi vaadeldava ruudu diagonaaliks (vt. joonist 3), seega ruudu pindala on $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18\,\mathrm{cm}^2$ ja otsitav pindalade vahe on $24 - 18 = 6\,\mathrm{cm}^2$.



Joonis 3

3. *Vastus:* helesinised laiad taskuteta püksid.

   Tüdrukutel jalas olnud ühesugused teksapüksid ei saa olla kitsad ja taskutega, sest Siiril olemasolevad niisugused püksid on tumesinised ja Pillel helesinised. Seega pidid Annel olema tol päeval jalas teisena mainitud (s.t. helesinised, taskuteta) püksid ja Siiril esimesena mainitud (s.t. laiad) püksid.

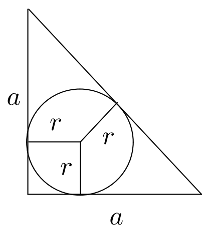
IX klass, I osa.

1. 733 $(2\cdot 366+1)$. 2. 1 : 3 (või 3 : 1). 3. 24. 4. $\angle ABC = 90°$, $\angle BCA = 67{,}5°$, $\angle CAB = 22{,}5°$. 5. 120. 6. 45. 7. 6. 8. 1997. 9. -1 ja 3. 10. 6.

IX klass, II osa.

1. *Vastus:* $\dfrac{35}{\pi}$ m.

   Olgu areeni ümbermõõt P, kutsikate jooksmahakkamisest esimese kohtumiseni kulunud aeg t ning esimese kutsika poolt kohtumiseni läbitud vahemaa x. Siis teine kutsikas läbis kohtumiseni vahemaa $P-x$ ning tingimusest $x-(P-x)=5$ saame $x=\dfrac{P+5}{2}$, $P-x=\dfrac{P-5}{2}$. Et esimese ja teise kutsika kiirused on vastavalt $\dfrac{x}{t}$ ja $\dfrac{P-x}{t}$, siis ülesande tingimustest saame $P-x=9\cdot\dfrac{x}{t}$ ja $x=16\cdot\dfrac{P-x}{t}$, s.t. $\dfrac{P-5}{2}=9\cdot\dfrac{P+5}{2t}$ ja $\dfrac{P+5}{2}=16\cdot\dfrac{P-5}{2t}$. Neist võrdustest leiame $\dfrac{P-5}{P+5}=\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{P+5}{P-5}$, ehk $\left(\dfrac{P-5}{P+5}\right)^2=\dfrac{9}{16}$ ja $\dfrac{P-5}{P+5}=\dfrac{3}{4}$ (kuna nii $P-5$ kui ka $P+5$ on positiivsed arvud). Seega $4(P-5)=3(P+5)$, kust $P=35$.



Joonis 4

2. *Vastus:* $S=r^2(3+2\sqrt{2})$.

Olgu võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaateti pikkus a, siis selle kolmnurga pindala on $S = \frac{a^2}{2}$. Et hüpotenuusile tõmmatud kõrguse pikkus on $h = a\frac{\sqrt{2}}{2} = r(1+\sqrt{2})$ (vt. joonist 4), siis $a = r(2+\sqrt{2})$ ning $S = r^2(3+2\sqrt{2})$.

3. Oletame vastuväiteliselt, et $N^2 = n^2 + p$, kus p on algarv. Siis $p = N^2 - n^2 = (N-n)(N+n)$, s.t. $N - n = 1$ ja $N + n = p$. Neist võrdustest saame $2N = 1+p$ ja $p = 2N-1$. Et vastavalt ülesande tingimustele $N = 3m+2$, kus $m \geq 1$, siis $p = 6m+3 = 3(2m+1)$, mis on vastuolus eeldusega, et p on algarv.

4. *Vastus:* $12\frac{6}{7}\%$.

   Enne kuivatamist sisaldasid pirnid 35% kuivainet, pärast kuivatamist aga 90% kuivainet. Olgu pirnide mass enne ja pärast kuivatamist vastavalt M ja M_1, siis saame võrduse $\frac{35}{100}M = \frac{90}{100}M_1$, kust $M = \frac{18}{7}M_1$. Suhkru mass pirnides on $\frac{5}{100}M = \frac{5}{100}\cdot\frac{18}{7}M_1$, seega on kuivatatud pirnides suhkrut $\frac{5\cdot 18}{7} = 12\frac{6}{7}$ protsenti.

X klass

1. *Lahendus 1:* Et $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c > 0$ ja võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ puuduvad reaalarvulised lahendid, siis peab olema $ax^2 + bx + c > 0$ mistahes reaalarvu x korral – seega ka $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c > 0$.

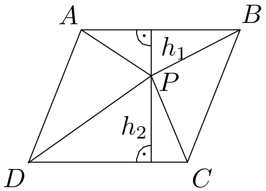
   Lahendus 2: Et võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ puuduvad reaalarvulised lahendid, siis $b^2 - 4ac < 0$, s.t. $0 \leqslant b^2 < 4ac$. Oletame vastuväiteliselt, et $c < 0$ (kui $c = 0$, oleks võrrandil kindlasti lahend $x = 0$), siis $a < 0$ ja seega $b > -(a+c) > 0$. Võttes selle võrratuse mõlemad pooled ruutu ja kasutades võrratust $b^2 < 4ac$, saame $4ac > (a+c)^2$, mis on samaväärne ilmselt vastuolulise võrratusega $(a-c)^2 < 0$.

2. Olgu P rööpküliku $ABCD$ sisepiirkonnas võetud mistahes punkt.

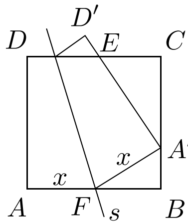
Näitame, et $S_{APB} + S_{CPD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$. Tõepoolest, olgu h_1 ja h_2 vastavalt kolmnurkade APB ja CPD tipust P tõmmatud kõrgused (vt. joonist 5), siis

$$S_{APB} + S_{CPD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot h_1 + \frac{1}{2}|CD| \cdot h_2 =$$
$$= \frac{1}{2}|AB| \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Analoogiliselt veendume, et $S_{AQD} + S_{CQB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ rööpküliku $ABCD$ sisepiirkonnas valitud mistahes punkti Q korral.



Joonis 5



Joonis 6

3. *Vastus:* jah, leiduvad.

Kirjutame ülesandes antud võrduse ümber kujul

$$19m + 97n = 1997 \cdot (19n + 97m)$$

ehk

$$(19 - 1997 \cdot 97)\, m = (1997 \cdot 19 - 97)\, n\ .$$

Ilmselt rahuldavad seda võrdust arvud $m = 1997 \cdot 19 - 97$, $n = 19 - 1997 \cdot 97$. Lahenduse lõpetamiseks jääb üle veenduda, et niisuguste m ja n väärtuste korral $19n + 97m \neq 0$.

4. *Vastus:* Benno räägib tõtt ja valet vaheldumisi.

Paneme tähele, et Benno ei saa rääkida ainult tõtt, sest üks tema väidetest langeb kokku Bruno öelduga ja teine Bernhardi öelduga — seega ei saaks siis kumbki neist rääkida ainult valet. Samuti veendume, et Benno ei saa rääkida ainult valet, sest siis ei saaks Bruno ega Bernhard rääkida ainult tõtt.

5. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et ruudu $ABCD$ küljepikkus on 1. Olgu F sirge s lõikepunkt ruudu küljega AB ja $|AF| = x$ (vt. joonist 6), siis $|A'F| = x$, $|BF| = 1 - x$ ja $|BA'| = \sqrt{x^2 - (1-x)^2} = \sqrt{2x-1}$, $|CA'| = 1 - \sqrt{2x-1}$. Kolmnurga $A'BF$ ümbermõõt on

$$\begin{aligned} P_{A'BF} &= |A'F| + |BF| + |BA'| = x + (1-x) + \sqrt{2x-1} = \\ &= 1 + \sqrt{2x-1} \end{aligned}$$

ja sellega sarnase kolmnurga ECA' ümbermõõt on

$$\begin{aligned} P_{ECA'} &= \frac{|CA'|}{|BF|} \cdot P_{A'BF} = \frac{1-\sqrt{2x-1}}{1-x} \cdot \left(1 + \sqrt{2x-1}\right) = \\ &= \frac{1-(2x-1)}{1-x} = \frac{2-2x}{1-x} = 2\ , \end{aligned}$$

s.t. on võrdne poolega ruudu $ABCD$ ümbermõõdust.

XI klass

1. Ülesandes antud kahe ruutvõrrandi diskriminandid on vastavalt

$$D_1 = -4b - 4a(b+1) = -4(a+b+ab)$$

ning

$$D_2 = 2a + 2b + 4ab - 1 - (a+b)^2 = -(a^2+b^2+1) - \frac{1}{2}D_1\ .$$

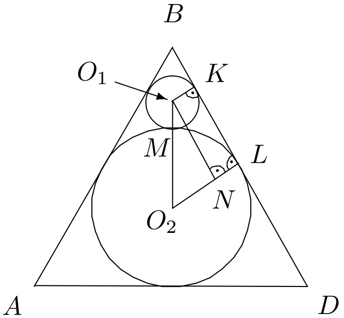
Oletades vastuväiteliselt, et mõlemal võrrandil leiduvad reaalarvulised lahendid, s.t. $D_1 \geqslant 0$ ja $D_2 \geqslant 0$, saame ilmselt vastuolulise võrratuse $a^2 + b^2 + 1 \leqslant 0$.

2. *Vastus:* $1:3$.

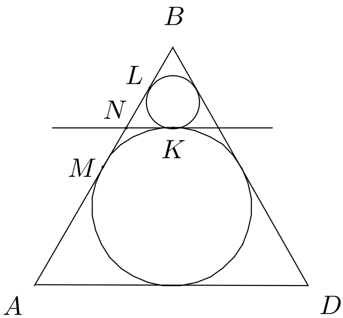
Lahendus 1: Puutugu ringjoon C_1 võrdkülgse kolmnurga ABD külgi AB ja BD (vt. joonist 7). Olgu O_1 ja O_2 vastavalt ringjoonte C_1 ja C_2 keskpunktid, K ringjoone C_1 puutepunkt kolmnurga küljega BD, L ja M vastavalt ringjoone C_2 puutepunktid kolmnurga küljega BD ja ringjoonega C_1 ning N punkti O_1 ristprojektsioon lõigule O_2L. Et $\angle O_1O_2N = 60^\circ$, siis $|O_2N| = \frac{1}{2}|O_1O_2|$. Tähistades ringjoonte C_1 ja C_2 raadiused vastavalt r ja R, saame

$$\begin{aligned} R &= |O_2L| = |O_2N| + |NL| = |O_2N| + |O_1K| = \\ &= \frac{1}{2}|O_1O_2| + |O_1K| = \frac{1}{2}(r+R) + r , \end{aligned}$$

millest $r = \frac{1}{3}R$.



Joonis 7



Joonis 8

Lahendus 2: Olgu K ringjoonte C_1 ja C_2 puutepunkt, L ja M nende puutepunktid kolmnurga küljega AB ning N ringjoonte C_1 ja C_2 ühise puutuja ja külje AB lõikepunkt (vt. joonist 8). Ringjoonte C_1 ja C_2 raadiuste suhe on võrdne lõikude NB ja AB pikkuste suhtega. Et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} |AM| &= |MB| = |MN| + |NL| + |LB| , \\ |LB| &= |NL| = |NK| = |MN| , \\ |NB| &= |NL| + |LB| , \end{aligned}$$

saame $|AB| = 2|MB| = 6|LB| = 3|NB|$.

3. Olgu a_1 ja d vastavalt vaadeldava aritmeetilise jada esimene liige ja vahe ning olgu a_k ja a_l selle jada ühistegurita liikmed, s.t.

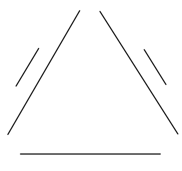
SÜT $(a_k, a_l) = 1$. Oletame vastuväiteliselt, et mingi indeksi s korral SÜT $(a_s, a_{s+1}) = c > 1$. Et arv c on jada liikmete a_s ja a_{s+1} jagajaks, siis on ta ka nende vahe $a_{s+1} - a_s = d$ jagajaks ning samuti arvu $a_1 = a_s - (s-1)d$ jagajaks. Seega on arv c ka arvude $a_k = a_1 + (k-1)d$ ja $a_l = a_1 + (l-1)d$ ühiseks jagajaks, mis on vastuolus eeldusega, et SÜT $(a_k, a_l) = 1$.

4. *Vastus:* Tegelik järjestus oli: B, D, A, C.

   Et iga poliitiku jutust (juhul kui see on tõene) järeldub, et B võitis, siis B võitis tõepoolest (sest poliitikute hulgas leidub tõerääkija). Et igaüks peale B enda väitis otsesõnu, et B võitis, ei saa ükski neist olla valetaja — seega on valetaja B. Niisiis ei tulnud A teiseks, C kolmandaks ega D viimaseks — seega ei saa A ega D olla tõerääkija. Järelikult on tõerääkija C ning poliitikute järjestus oli: B, D, A, C.

5. *Vastus:* ei ole.

   Olgu tasandil antud kuus lõiku nii, nagu joonisel 9 näidatud. Kui nende lõikude otspunktid oleks võimalik omavahel ühendada nii, et tekiks kõiki antud lõike sisaldav iseennast mittelõikav murdjoon, siis peaks vähemalt ühe lühikese lõigu *mõlemad* otspunktid olema ühendatud mingite teiste lõikude otspunktidega — teiselt poolt aga on iga lühikese lõigu otspunkte võimalik ühendada ainult selle kõrval paikneva pika lõigu otspunktidega (nii, et lisanduvad lõigud ei lõikaks olemasolevaid).



Joonis 9

XII klass

1. Näitame, et mistahes reaalarvu $x > 0$ korral on funktsiooni

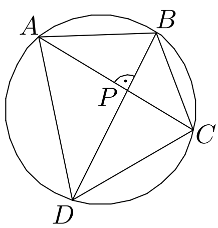
$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

väärtus positiivne. Et $f(0) = 0$, siis piisab näidata, et mistahes $x > 0$ korral on funktsioon $f(x)$ rangelt kasvav, s.t. selle tuletis $f'(x) = -\sin x + x$ on positiivne. Et jällegi $f'(0) = 0$, siis piisab selleks veenduda, et funktsioon $f'(x)$ on mittekahanev mistahes $x > 0$ korral ja rangelt kasvav piirkonnas $(0, 2\pi)$, s.t. et teine tuletis $f''(x) = -\cos x + 1$ on mittenegatiivne mistahes $x > 0$ korral ja positiivne, kui $0 < x < 2\pi$.

2. Kõõlud AC ja BD on kumera kõõlnelinurga $ABCD$ diagonaalideks — olgu nende lõikepunkt P (vt. joonist 10). Olgu vaadeldava ringjoone diameeter d, siis siinusteoreemist kolmnurkade ABC ja BCD jaoks saame

$$d = \frac{|AB|}{\sin \angle ACB} = \frac{|CD|}{\sin \angle CBD}.$$

Täisnurksest kolmnurgast BPC saame $\sin \angle CBD = \cos \angle ACB$, seega $|AB|^2 + |CD|^2 = d^2(\sin^2 \angle ACB + \cos^2 \angle ACB) = d^2$.

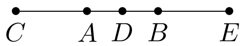


Joonis 10

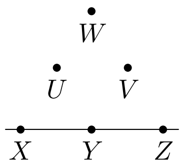
3. Oletame vastuväiteliselt, et $\log_n m = \dfrac{k}{l}$, kus k ja l on mingid ühistegurita täisarvud ja $l \neq 0$. Siis $n^{\frac{k}{l}} = m$ ja $n^k = m^l$. Kuna $\text{SÜT}(n, m) = 1$, siis ka $\text{SÜT}(n^k, m^l) = 1$, s.t. $n^k = m^l = 1$. Teiselt poolt, kuna $m > 1$ ja $l \neq 0$, siis $m^l \neq 1$.

4. *Lahendus 1:* Näitame kõigepealt, et leidub kolm ühte värvi punkti, mis paiknevad ühel sirgel võrdsete vahedega. Selleks võtame mistahes kaks ühte värvi punkti A ja B (üldisust kitsendamata võime eeldada, et need punktid on punased) ning vaatleme

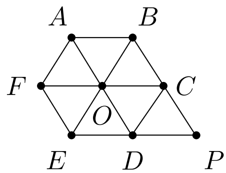
nendega ühel sirgel paiknevaid punkte C, D ja E, kusjuures $|AD| = |DB| = \frac{1}{2}|AB|$ ja $|CD| = |DE| = \frac{3}{2}|AB|$ (vt. joonist 11). Kui mõni punktidest C, D ja E on punane, siis moodustab see koos punktidega A ja B otsitava ühte värvi punktide kolmiku, vastasel korral aga on otsitavateks punktideks C, D ja E.



Joonis 11



Joonis 12



Joonis 13

Olgu nüüd X, Y ja Z kolm ühte värvi punkti, mis paiknevad ühel sirgel võrdsete vahedega. Vaatleme selliseid punkte U, V ja W, et kolmnurgad XUY, YVZ, XWZ ja UWV on võrdkülgsed (vt. joonist 12). Sõltuvalt punktide U, V ja W värvi valikust on vähemalt ühel neist neljast võrdkülgsest kolmnurgast kõik tipud ühte värvi.

Lahendus 2: Tükeldame tasandi võrdkülgseteks kolmnurkadeks ja vaatleme kuuest niisugusest kolmnurgast moodustuva korrapärase kuusnurga $ABCDEF$ tippe, selle keskpunkti O ja rombi $OCPD$ neljandat tippu P (vt. joonist 13). Kui kuusnurga $ABCDEF$ mistahes kaks naabertippu on erinevat värvi, siis on võrdkülgsete kolmnurkade ACE ja BDF kõik tipud sama värvi. Seetõttu võime üldisust kitsendamata eeldada, et punktid A ja F on üht ja sama värvi — olgu nad mõlemad punased. Oletades, et ühegi võrdkülgse kolmnurga kõik tipud ei ole sama värvi, veendume, et punkt O peab olema sinine, punktidest C ja E vähemalt üks peab olema sinine ning punktidest B ja D vähemalt üks peab olema sinine. Kui punkt C või D oleks sinine, saaksime kindlasti siniste tippudega võrdkülgse kolmnurga – seega on punktid B ja E sinised ning punktid C ja D punased. Nüüd aga on sõltuvalt punkti P värvist ühel võrdkülgsetest kolmnurkadest PCD ja PBE kõik tipud sama värvi.

5. *Vastus:* $\dfrac{1}{3}$.

Et võrdkülgse kolmnurga mediaanide lõikepunkt on ühtlasi selle sise- ja ümberringjoone keskpunktiks ning mistahes kolmnurga mediaanide lõikepunkt jaotab mediaanid suhtes $2:1$, siis on võrdkülgse kolmnurga siseringjoone raadius võrdne poolega selle ümberringjoone raadiusest. Seega mistahes $i = 0, 1, 2, \ldots$ korral on kolmnurga Δ_{i+1} küljepikkus võrdne poolega kolmnurga Δ_i küljepikkusest ja kolmnurga Δ_{i+1} pindala on võrdne ühe neljandikuga kolmnurga Δ_i pindalast. Niisiis

$$S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + S_{\Delta_3} + \ldots = S_{\Delta_0}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) =$$

$$= S_{\Delta_0} \cdot \left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{3} S_{\Delta_0}\,.$$