

Eesti koolinoorte XLIV täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA PIIRKONDLIK VOOR

18. jaanuaril 1997. a.

Soovitused lahenduste hindamiseks

Lp. hindaja!

1. Juhime Teie tähelepanu sellele, et alljärgnevas on 7.–9. klasside olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud erinevalt. Testide iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud või kirjeldatud vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (s.t. vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Seevastu traditsiooniliste “olümpiaadi tüüpi” ülesannete lahendused on jaotatud võimalust mööda osadeks (etappideks) ning näidatud lahenduse iga osa eest antav punktide arv (s.t. ühe ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

2. Enamiku ülesannete korral (v.a. testid ja tõestusülesanded) on hindamisjuhiste lõpus näidatud, mitu punkti anda ainult õige vastuse eest. See hinne on mõeldud juhuks, kui puhtandis on antud ainult ülesande vastus ning mustand (üldse või selle ülesande kohta) *puudub*. Mustandi olemasolul tuleks hindamisel arvestada ka seal kirjapandut.

3. Mõne ülesande korral, mille jaoks oleme ette näinud mitut oluliselt erinevat lahenduskäiku, anname iga sellise lahenduse jaoks eraldi hindamisskeemi. Iga mittetäielikku lahendust, mis sisaldab elemente rohkem kui ühest lahenduskäigust, tuleb seejuures hinnata *ainult ühe* skeemi järgi, s.t. niisuguse lahenduse eest antakse *maksimum* (mitte summa!) punktidest, mis sellele on ette nähtud ühe või teise hindamisskeemi kohaselt.

4. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka mõttekäike, mis ei mahu ühegi meie poolt pakutud skeemi alla. Selliste lahenduste hindamisel tuleb lähtuda eeskätt sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud (arvestades seejuures lahenduse üksikute elementide erinevat raskusastet).

5. *Mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest tuleb igal juhul anda maksimumpunktid, sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

VII klass, I osa.

1. Antud õige vastus $6,25$ (või $6\frac{1}{4}$ või $\frac{25}{4}$): 2 p.
2. Maha tõmmatud arvud 825 ja 960 : 2 p.
Maha tõmmatud ainult arv 825 või ainult arv 960 : 1 p.
Maha tõmmatud arvud 825 , 960 ja veel üks vale arv: 1 p.
3. Antud õige vastus 192 : 2 p.
4. Antud vastuseks 4 või loetletud suvalises järjekorras õiged arvud $(13, 53, 31, 101)$: 2 p.
Antud vastuseks 3 või 5 : 1 p.
Loetletud suvalises järjekorras kolm õiget arvu, kolm õiget ja üks vale arv või kõik neli õiget ja üks vale arv: 1 p.
5. Antud õige vastus $x = 0, y = -12$: 2 p.
Antud ainult x või ainult y õige väärtus (teine väärtus puudub või ei ole õige): 1 p.
Antud vastuseks $x = -12, y = 0$ (s.t. x ja y väärtused on ära vahetatud): 1 p.
6. Antud õige vastus 6 cm: 2 p.
Antud vastuseks 6 (ilma ühikuta): 1 p.
7. Antud õige vastus $\angle ACB = 40^\circ, \angle CAB = 70^\circ, \angle CBA = 70^\circ$: 2 p.
Antud vastuseks õiged arvud ($40^\circ, 70^\circ$ ja 70°) vales järjekorras: 1 p.

Kui *kõigi kolme* nurga suurused on antud ilma kraadimärkideta, siis anda nii õige kui vale järjestuse korral 1 p. Kui vastuseks on

antud õiged arvud õiges järjekorras ja *vähemalt ühe* nurga suuruse juures on kraadimärk olemas, siis anda 2 p.

8. Antud õige vastus 20: 2 p.
Antud vastuseks 16 või 24: 1 p.
9. Antud õige vastus 22 cm: 2 p.
Antud vastuseks 22 (ilma ühikuta): 1 p.
10. Antud vastuseks õiged numbrid (3 ja 5) või märgitud need kaks pinnalaotust joonisel: 2 p.
Antud vastuseks ainult 3, ainult 5 või lisaks *mõlemale* õigele (3 ja 5) veel *üks* vale number (või märgitud vastavad pinnalaotused joonisel): 1 p.

VII klass, II osa.

1. Vastuse $x = 1$ eest: 1 p.
Vastuse $y = 2$ eest: 2 p.
Vastuse $z = 3$ eest: 2 p.
Kontrolli eest, et need arvud sobivad, või selgituse eest, kuidas nad on leitud: 2 p.

Et ülesande tekstis pole nõutud tõestust leitud lahendi ainsuse kohta, siis maksimumpunktide saamiseks piisab õigest vastusest koos kontrolliga, et leitud arvud tõepoolest rahuldavad ülesandes antud võrdust (kui lahendamisel kasutatav arutlus on selline, et võõrlahendi tekkimine on välistatud, siis pole kontrolli vaja).

Kui on esitatud ainult õige vastus ilma selgituste ja kontrollita, anda 5 p. Kui lisaks sellele on lahendaja üritanud põhjendada, et rohkem lahendeid ei ole, anda vastavalt esitatud põhjenduse korrektsusele 6 või 7 p.

2. Idee eest vaadelda sobivat ruutu: 3 p.
Ruudu pindala leidmise eest: 2 p.
Selgituse eest, miks viirutatud kujundi pindala on võrdne selle ruudu pindalaga: 2 p.

Kui vastuseks on antud arv 64 ilma ühikuta või on ühik vale, siis anda üks punkt vähem.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta ning joonis puudub või sellel pole ruutu märgitud, anda 2 p. Kui on antud ainult vastus ja ruut on juuresoleval joonisel märgitud, anda 5 p.

3. Ringides olevate arvude aritmeetilise keskmise avaldamise eest ruutudes olevate arvude kaudu: 3 p.
Ringides olevate arvude aritmeetilise keskmise maksimumi leidmise eest: 2 p.
Selgituse eest, miks leitud väärtus on maksimaalne: 2 p.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta, anda 2 p.

VIII klass, I osa.

1. Antud õige vastus $\frac{28}{49}$: 2 p.
Antud vastuseks $\frac{-28}{-49}$ (lugeja ja nimetaja vahe on 21): 1 p.
2. Antud õige vastus $\frac{1}{5}$ (või 0,2 või 5*): 2 p.
3. Antud õige vastus (1250 männi- ja 750 kaseistikut): 2 p.
Antud vastuseks 750 männi- ja 1250 kaseistikut: 1 p.
4. Antud õige vastus 15 (või “15-kohaline”): 2 p.
Antud vastuseks 14 (või “14-kohaline”): 1 p.
5. Loetletud õiged arvud 2, 5, 11 (suvalises järjekorras): 2 p.
Loetletud õiged arvud 2, 5, 11 ja veel üks arv, mis on küll arvu $6 \cdot 66 - 4 \cdot 44$ jagaja, aga ei ole algarv: 1 p.
Antud vastuseks kaks õiget arvu (2 ja 5, 2 ja 11 või 5 ja 11) 1 p.
6. Antud õige vastus 15: 2 p.

7. Antud vastuseks neli väärtust 60° , 60° , 120° , 120° või kaks väärtust 60° , 120° (suvalises järjekorras): 2 p.
 Antud vastuseks ainult 60° või ainult 120° : 1 p.

Kui *kõikide* nurkade suurused on antud ilma kraadimärkideta, siis anda mõlemal ülalkirjeldatud juhul 1 p. Kui vastuses on antud mõlemad nurgad (60° ja 120°) ning *vähemalt ühe* nurga suuruse juures on kraadimärk olemas, siis anda 2 p.

8. Antud õige vastus 125° : 2 p.
 Antud vastuseks 125 (ilma ühikuta): 1 p.
9. Antud vastuseks 20% või 20: 2 p.
 Antud vastuseks $\frac{1}{5}$ või 0,2: 1 p.
10. Antud vastuseks ükskõik kumb arvudest 6 ja 7 (või mõlemad): 2 p.

VIII klass, II osa.

1. Tähelepaneku eest, et arv a on kolmekohaline: 1 p.
 Näitamise eest, et sajaliste number saab olla ainult 1: 3 p.
 Kümneliste ja üheliste numbri leidmise eest: 3 p.

Kui sajaliste numbriks on võetud 1 ilma põhjendamata, miks see on ainus võimalus, anda selle osa eest 1 p. (kokku seega maksimaalselt 5 p.)

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta, anda 2 p.

2. Rombi pindala leidmise eest: 2 p.
 Rombi ja ruudu paiknemisest õige arusaamise eest: 2 p.
 Ruudu pindala leidmise eest: 2 p.
 Pindalade vahe leidmise eest: 1 p.

Kui vastuseks on antud arv 6 ilma ühikuta või on ühik vale, siis anda üks punkt vähem.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta ning joonis puudub, anda 2 p. Kui on antud ainult vastus ja tehtud õige joonis, siis anda olenevalt sellest, kas joonisel on märgitud rombi diagonaalide pikkused või mitte, 3 kuni 5 p.

3. Pükste iga tunnuse (helesinised, laiad, taskuteta) leidmise eest koos vastava põhjendusega: á 2 p.

Kõigi kolme tunnuse leidmise korral lisaks: 1 p.

Kui on antud ainult õige vastus (kõik kolm tunnust) ilma selgitusteta, anda 2 p, ühe tunnuse puudumisel 1 p.

IX klass, I osa.

1. Antud õige vastus 733: 2 p.

Antud vastuseks 731: 1 p.

2. Antud õige vastus $1 : 3$ (või $3 : 1$ või $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ või $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$): 2 p.

3. Antud õige vastus 24: 2 p.

4. Antud õige vastus: $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCA = 67,5^\circ$ ning $\angle CAB = 22,5^\circ$: 2 p.

Antud vastuseks õiged arvud (90° , $67,5^\circ$ ja $22,5^\circ$) vales järjekorras: 1 p.

Kui *kõigi kolme* nurga suurused on antud ilma kraadimärkideta, siis anda nii õige kui vale järjestuse korral 1 p. Kui vastuseks on antud õiged arvud õiges järjekorras ja *vähemalt ühe* nurga suuruse juures on kraadimärk olemas, siis anda 2 p.

5. Antud õige vastus 120: 2 p.

Antud vastuseks 60: 1 p.

6. Antud õige vastus 45: 2 p.

7. Antud õige vastus 6: 2 p.

Antud vastuseks $x = 0$, $y = 4$, $z = 2$: 1 p.

8. Antud õige vastus 1997: 2 p.

9. Antud õige vastus (-1 ja 3): 2 p.
 Antud vastuseks ainult -1 või ainult 3 : 1 p.
 Antud vastuseks 1 ja -3 : 1 p.
10. Antud õige vastus 6 : 2 p.

IX klass, II osa.

1. Sobivate muutujate kasutuselevõtmise eest: 1 p.
 Võrrandi(te) koostamise eest, milles on arvesse võetud kõik ülesandes antud andmed: 3 p.
 Koostatud võrrandi(te) lahendamise eest: 3 p.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta, anda 1 p.

2. Pindala arvutamiseks vajalike suuruste (kaatetite pikkused, hüpotenuusi ja sellele tõmmatud kõrguse pikkused või kolmnurga übermõõt) avaldamise eest siseringjoone raadiuse r kaudu: 3 p.
 Sobiva pindala valemi valiku eest: 2 p.
 Pindala S avaldamise eest siseringjoone raadiuse r kaudu: 2 p.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta ning joonis puudub, anda 2 p. Kui on antud ainult vastus ja tehtud joonis, siis anda olenevalt sellest, kas joonisel on märgitud sobivate joonelementide pikkuste avaldised siseringjoone raadiuse r kaudu või mitte, 2 kuni 5 p.

3. Teguriteks lahutuse $p = (N + n)(N - n)$ leidmise eest: 2 p.
 Võrduste $N + n = p$ ja $N - n = 1$ leidmise eest: 2 p.
 Vastuolu saamise eest p algarvulisusega: 3 p.
4. Ülesandes antud arvandmete õige tõlgendamise eest: 1 p.
 Sobiva(te) võrrandi(te) koostamise eest: 3 p.
 Koostatud võrrandi(te) lahendamise eest: 3 p.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta, anda 1 p.

X klass

1. Seda ülesannet saab lahendada vähemalt kahel oluliselt erineval viisil (lähtudes ruutpolünoomi graafiku paiknemisest ühel pool abstsissitelge või ruutvõrrandi diskriminandi negatiivsusest), seepärast anname siin hindamisskeemi kummagi lahenduse jaoks eraldi (vt. ka üldisi märkusi esimesel leheküljel!)

Lahendus ruutpolünoomi graafiku abil:

Tähelepaneku eest, et avaldis $ax^2 + bx + c$ saab omandada kas ainult positiivseid või ainult negatiivseid väärtusi: 2 p.

Tähelepaneku eest, et $a+b+c = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$ ja seega saab nimetatud avaldis omandada ainult positiivseid väärtusi: 2 p.

Tähelepaneku eest, et $c = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ ja seega $c > 0$: 3 p.

Lahendus võrratuse $b^2 - 4ac < 0$ abil:

Võrratuse $b^2 - 4ac < 0$ väljakirjutamise eest: 1 p.

Idee eest kasutada vastuväitelist tõestust: 1 p.

Näitamise eest, et kui $c < 0$, siis $a < 0$: 2 p.

Näitamise eest, et tekib vastuolu: 3 p.

2. Rööpküliku pindala avaldamise eest küljepikkuse ja kõrguse kaudu: 1 p.

Näitamise eest, et ühe paari kolmnurkade pindalade summa on võrdne poolega rööpküliku pindalast: 4 p.

Vajaliku järelduse tegemise eest: 2 p.

Kui on ilma selgitusteta väidetud, et kummagi paari kolmnurkade pindalade summa on võrdne poolega rööpküliku pindalast, anda 3 p.

3. Võrduse ümberkirjutamise eest murdudeta kujul: 1 p.

Liidetavate sobiva rühmitamise eest: 2 p.

Sobivate m ja n väärtuste leidmise eest: 3 p.

Kontrolli eest, et murru nimetaja on nullist erinev: 1 p.

Kui on antud ainult sobivad m ja n väärtused ilma selgitusteta, anda 5 p.

4. Näitamise eest, et Benno ei saa rääkida ainult tõtt: 3 p.
 Näitamise eest, et Benno ei saa rääkida ainult valet: 3 p.
 Lõppjärelduse tegemise eest: 1 p.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta, anda 1 p.

5. Joonisel tekkivate täisnurksete kolmnurkade sarnasuse tähelepanemise eest: 2 p.
 Sobivalt valitud parameetri kaudu teiste joonisel olevate lõikude pikkuste (või nurgafunktsioonide väärtuste) avaldamise eest: 2 p.
 Tõestuse lõpuleviimise eest: 3 p.

XI klass

1. Kummagi ruutvõrrandi diskriminandi väljakirjutamise eest: á 1 p.
 Seose leidmise eest diskriminantide vahel: 2 p.
 Tõestuse lõpuleviimise eest: 3 p.

2. Seda ülesannet saab lahendada ilmselt paljudel erinevatel viisidel. Allpool esitatud hindamiskeeme kahe meie poolt väljapakutud lahenduse jaoks tuleks seega vaadelda näidetena, mis loodetavasti aitavad Teil leida õiglase hindeskaala ka siintoodetest erinevate lahenduste jaoks (vt. ka esimesel leheküljel toodud näpunäiteid!)

Lahendus ristküliku ja täisnurkse kolmnurga abil:

- Joonise sobiva täiendamise eest: 2 p.
 Täisnurkse kolmnurga nurkade suuruste leidmise ja ärakasutamise eest: 2 p.
 Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p.

Lahendus sarnaste kolmnurkade siseringjoonte abil:

- Joonise sobiva täiendamise eest: 1 p.
 Tähelepaneku eest, et ringjoonte raadiuste suhe on võrdne tekkivate võrdkülgsete kolmnurkade küljepikkuste suhtega: 2 p.

Ühest punktist ringjoontele tõmmatud puutuajalõikude pik-
kuste võrdsuse sobiva ärakasutamise eest: 2 p.
Lahenduse lõpuleviimise eest: 2 p.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta, anda 1 p.

3. Näitamise eest, et aritmeetilise jada kahe järjestikuse liikme
ühistegur on selle jada vahe jagajaks: 3 p.
Tõestuse lõpuleviimise eest: 4 p.
4. Näitamise eest, et B võitis: 2 p.
Näitamise eest, et B räägib ainult valet: 2 p.
Näitamise eest, et C räägib ainult tõtt: 2 p.
Lõppjärelduse tegemise eest: 1 p.

Kui õpilane on koostanud tabeli kõikide võimalike järjestuste kohta
ja asunud neid ükshaaval läbi vaatama, ent pole sellega lõpuni
jõudnud või on kusagil eksinud, siis anda 0 kuni 5 punkti vastavalt
õigesti läbivaadatud variantide arvule.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta, anda 2 p.

5. Sobiva näite leidmise eest: 5 p.
Põhjenduse eest, miks sellise lõikude paigutuse korral pole
nõutud omadustega murdjoont võimalik konstrueerida: 2 p.

Kui on antud ainult vastus “ei ole alati võimalik” ilma näite ja
selgitusteta, anda 0 p.

XII klass

1. Idee eest kasutada funktsiooni $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ kas-
vamist $x > 0$ korral ja võrdust $f(x) = 0$: 1 p.
Idee eest kasutada selle näitamiseks võrdust $f'(0) = 0$ ja
tuletise $f'(x)$ kasvamist $x > 0$ korral: 2 p.

Näitamise eest, et tuletis $f'(x)$ on mittekahanev $x > 0$ korral: 3 p.

Tõestuse korrektse lõpuleviimise eest (arvestades rangeid ja mitterangeid võrratusi): 1 p.

Kui on joonisel õigesti kujutatud funktsioonide $\cos x$ ja $1 - \frac{x^2}{2}$ graafikud ja väidetud, et sellega on nõutav võrratus tõestatud, anda 2 p. Kui lisaks sellele on võrreldud funktsioonide $\cos x$ ja $1 - \frac{x^2}{2}$ esimesi ja teisi tuletisi punktis $x = 0$, siis anda olenevalt toodud põhjenduste täielikkusest 4 kuni 7 p.

2. Kõõlude AB ja CD pikkusi, ringjoone diameetrit ja mingi täisnurkse kolmnurga teravnurkade siinusi siduva võrduse leidmise eest: 3 p.

Vaadeldava kolmnurga täisnurksuse ärakasutamise eest: 1 p.

Tõestuse lõpuleviimise eest: 3 p.

3. Idee eest kasutada vastuväitelist tõestust: 1 p.

Näitamise eest, et kui $\log_n m$ on ratsionaalarv, siis arvude n ja m teatavad astmed on võrdsed: 2 p.

Näitamise eest, et sel juhul need astmed on mõlemad võrdsed ühega: 2 p.

Tõestuse lõpuleviimise eest: 2 p.

4. Ka sellel ülesandel leidub nähtavasti palju erinevaid lahendusviise. Allpool esitatud hindamiskeeme kahe meie poolt väljapakutud lahenduse jaoks tuleks seega vaadelda näidetena, mis loodetavasti aitavad Teil leida õiglase hindedkaala ka siintoodutest erinevate lahenduste jaoks (vt. ka esimesel leheküljel toodud näpunäiteid!)

Lahendus ühel sirgel paiknevate punktide vaatlemise abil:

Idee eest vaadelda ühel sirgel paiknevaid punkte: 1 p.

Näitamise eest, et leiduvad kolm ühel sirgel võrdsete vahedega paiknevat üht ja sama värvi punkti: 3 p.

Näitamise eest, et sellest järeldub ülesandes esitatud väide: 3 p.

Lahendus korrapärase kuusnurga tippudes paiknevate punktide abil:

Idee eest vaadelda korrapärase kuusnurga tippudes paiknevaid punkte: 1 p.

Näitamise eest, et vastuväitelisel eeldusel peavad kuusnurga mingis kahes naabertipus paiknevad punktid olema ühte värvi: 2 p.

Näitamise eest, et sellest järeldub üheselt kuusnurga ülejäänud tippudes paiknevate punktide värv: 2 p.

Tõestuse lõpuleviimise eest: 2 p.

5. Kolmnurkade Δ_i ja Δ_{i+1} pindalade suhte leidmise eest: 3 p.

Geomeetrilise jada äratundmise eest: 1 p.

Lahenduse lõpuleviimise eest: 3 p.

Kui on antud ainult õige vastus ilma selgitusteta, anda 1 p.

Kui on õigesti leitud kolmnurkade Δ_i ja Δ_{i+1} küljepikkuste suhe (sarnasustegur), kuid ei ole sellest tehtud õiget järeldust nende pindalade suhte kohta, anda 2 p.