XLIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

20 января 1996 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. При каких значениях вещественного числа a уравнение

   $$(a+3)x^2-(a-3)x+1=0$$

   имеет корни одинаковых знаков?

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Диаметры этих окружностей, проведенные из точки A, соответственно AC и AD. Доказать, что точки B, C и D лежат на одной прямой.

3. Найти все такие положительные целые числа n, для которых число $6n$ делится на число $6+n$.

4. Мозаика квадратной формы состоит из n^2 одинаковых квадратных кусочков. При каких значениях n более половины кусочков, составляющих мозаику, расположены на краях мозаики?

5. В городе три улицы T, V и P. Горожане, живущие на улице T всегда говорят правду, жители улицы V всегда лгут, а в речи жителей улицы P правдивые и ложные предложения чередуются.

   Как то раз, с пожарной вышки города заметили поднимающийся столб дыма и тут же зазвонил телефон:

   Звонящий: “На нашей улице пожар!”

   Дежурный: “На какой улице?”

   Звонящий: “На улице P.”

   На какую улицу следовало ехать пожарным?

XLIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

20 января 1996 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть $a + \dfrac{1}{a} = 10$. Найти $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ и $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$.

2. В трапеции $ABCD$ $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle DBC = 30^\circ$ и длина перпендикуляра, опущенного из точки O пересечения диагоналей на основание AB, равна длине отрезка OC. Доказать, что $ABCD$ равнобедренная трапеция.

3. В трехзначном числе изменяется порядок цифр и полученное число вычитается из исходного. Зная, что полученная разность является двузначным полным квадратом, найти все возможные значения этой разности.

4. Прямоугольный пол покрывается квадратными пластинками. При каких размерах пола ровно половина всех использованных пластинок расположена на краях пола, если каждая пластинка имеет площадь 1 квадратный метр?

5. В бочке 1996 яблок. Мари и Юри начинают по очереди брать яблоки из бочки, причем за один раз можно взять от одного до трех яблок и первой берет яблоки Мари. Доказать, что Юри всегда может обеспечить себе возможность взять из бочки последнее яблоко.

XLIII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

20 января 1996 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{(x-2)^2(1-x)}{x^2+x-6}} + \frac{1}{\sqrt{5x^2+21x+4}}\,.$$

2. Радиусы вписанной и описанной окружностей тругольника соответственно равны r и R и длины его сторон $a < b < c$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Доказать, что $rR = \dfrac{ac}{6}$.

3. Из множества чисел 1, 2, ..., 100 выбирается 50 различных чисел. Доказать, что при любом выборе найдется одно или несколько выбранных чисел таких, что их сумма является полным квадратом.

4. Куб, окрашенный в синий цвет, разрезается на n^3 кубиков одинакового размера. Доказать, что ни при каком натуральном числе n среди полученных кубиков не будет одинакового числа неокрашенных кубиков и кубиков, имеющих хотя бы одну синюю грань.

5. Четыре ученика A, B, C и D соревновались в решении задач по логике, причем каждый из них получил различное число очков. Перед соревнованием участники говорили следующее:
   A: “Я буду победителем.”
   B: “Я мальчик и займу первое место.”
   C: “Мальчики ошибаются, D займет место непосредственно за мной и после A не будет ни одного мальчика.”
   D: “C прав и после A не будет ни одной девочки.”

   Известно, что среди участников двое мальчиков и двое девочек, а из высказанных ними предложений два оказались верными и два ложными (предложение, состоящее из нескольких утверждений, считаем ложным, если ложна хотя бы одно из утверждений). Установить места, занятые участниками и пол каждого участника.