Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

20. jaanuar 1996. a.

X klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Milliste reaalarvu a väärtuste korral on võrrandil

   $$(a+3)x^2-(a-3)x+1=0$$

   samamärgilised lahendid?

2. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B. Olgu punktist A neile ringjoontele tõmmatud diameetrid vastavalt AC ja AD. Tõesta, et punktid B, C ja D asuvad ühel sirgel.

3. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral arv $6n$ jagub arvuga $6+n$.

4. Ruudukujuline piltmosaiik koosneb n^2 ühesuurusest ruudukujulisest tükist. Milliste n väärtuste korral paiknevad rohkem kui pooled tükkidest mosaiigi servades?

5. Linnas on kolm tänavat T, V ja P. Kõik linlased, kes elavad tänaval T, räägivad alati tõtt, tänava V elanikud valetavad alati, tänava P elanike kõnes esinevad aga tõesed ja väärad laused vaheldumisi.

   Kord märgati linna tuletõrjes eemalt tõusvat suitsusammast ja kohe helises ka telefon:

   Helistaja: “Meie tänaval on tulekahju!”
   Korrapidaja: “Missugusel tänaval?”
   Helistaja: “Tänaval P.”

   Millisele tänavale pidid sõitma tuletõrjujad?

Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

20. jaanuar 1996. a.

XI klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Olgu $a + \dfrac{1}{a} = 10$. Leia $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ ja $a^3 + \dfrac{1}{a^3}$.

2. Trapetsis $ABCD$ on $\angle ACB = 90°$, $\angle DBC = 30°$ ning diagonaalide lõikepunktist O alusele AB tõmmatud ristlõigu OH pikkus on võrdne lõigu OC pikkusega. Tõesta, et trapets $ABCD$ on võrdhaarne.

3. Kolmekohalises arvus muudetakse numbrite järjekorda ning lahutatakse tekkinud uus arv esialgsest. Teades, et saadav vahe on kahekohaline täisruut, leia selle vahe kõik võimalikud väärtused.

4. Ristkülikukujuline põrand kaetakse ruudukujuliste plaatidega. Milliste põranda mõõtmete korral paiknevad täpselt pooled kasutatavatest plaatidest põranda servades, kui iga plaadi pindala on 1 ruutmeeter?

5. Tünnis on 1996 õuna. Mari ja Jüri võtavad vaheldumisi tünnist õunu, kusjuures korraga võib võtta ühe kuni kolm õuna ning esimesena võtab õunu Mari. Tõesta, et Jüri saab alati tagada endale võimaluse võtta tünnist viimane õun.

Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

20. jaanuar 1996. a.

XII klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Leia funktsiooni $y = \sqrt{\dfrac{(x-2)^2(1-x)}{x^2+x-6}} + \dfrac{1}{\sqrt{5x^2+21x+4}}$ määramispiirkond.

2. Kolmnurga sise- ja ümberringjoone raadiused on vastavalt r ja R ning selle külgede pikkused $a < b < c$ on mingi aritmeetilise jada järjestikusteks liikmeteks. Tõesta, et $rR = \dfrac{ac}{6}$.

3. Arvude $1, 2, \ldots, 100$ hulgast valitakse välja 50 erinevat arvu. Tõesta, et nende arvude mistahes valiku korral saame leida ühe või mitu valitud arvu nii, et nende summa on täisruut.

4. Siniseks värvitud kuup lõigatakse n^3 ühesuuruseks kuubikujuliseks tükiks. Tõesta, et ühegi naturaalarvu n korral ei ole saadud väikeste kuupide hulgas võrdsel arvul värvimata kuupe ja kuupe, mille vähemalt üks tahk on sinine.

5. Neli õpilast A, B, C ja D võistlesid loogikaülesannete lahendamises, kusjuures iga õpilane kogus erineva arvu punkte. Enne võistlust rääkisid osavõtjad järgmist:
   A: “Mina võidan võistluse.”
   B: “Mina olen poiss ja saan esimese koha.”
   C: “Poisid eksivad, D saab koha vahetult minu järel ja A-st tahapoole ei jää ühtegi poissi.”
   D: “C-l on õigus ja A-st tahapoole ei jää ühtegi tüdrukut.”

   On teada, et kaks osavõtjat on poisid ja kaks tüdrukud ning kaks öeldud lauset osutusid tõeseks ja kaks vääraks (mitmest väitest koosneva lause loeme vääraks, kui kasvõi üks väidetest on väär). Tee kindlaks osavõtjate tegelik paremusjärjestus ja iga osavõtja sugu.