Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

20. jaanuar 1996. a.

Lahendused ja vastused

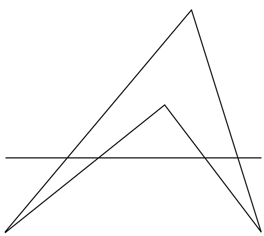
VII klass, I osa.

1. 7. 2. $-\frac{1}{3}$. 3. 3 (numbrid 9, 0 ja 4). 4. sobib näiteks $10 = 11 - 1$ või $10 = 9 + \frac{9}{9}$. 5. 9 ja 7 (sobivad ka -9 ja 7, 9 ja -7, -9 ja -7). 6. 25%. 7. vt. joonist 1. 8. $(-5; 6)$. 9. 20°. 10. 14.

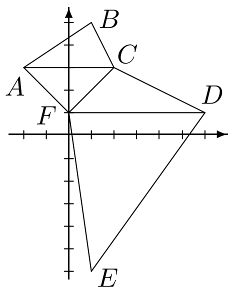
VII klass, II osa.

1. *Vastus:* 35.

   Antud kujundi saame jaotada neljaks kolmnurgaks ABC, AFC, FCD ja FED (vt. joonist 2), mille pindalad on vastavalt 4, 4, 6 ja 21.



Joonis 1



Joonis 2

2. *Vastus:* 2 tunniga.

   Ühe tunniga täitub esimese kraani kaudu $\frac{1}{4}$, teise kraani kaudu $\frac{1}{12}$ ja kolmanda kraani kaudu $\frac{1}{6}$ kogu basseinist. Kui avatud on kõik kolm kraani, täitub ühe tunniga $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ kogu basseinist ning terve basseini täitumiseks kulub 2 tundi.

3. *Vastus:* 8 ja 6.

   Otsitav arv peab jaguma kahega, seega võib selle viimaseks numbriks olla 0, 2, 4, 6 või 8. Iga loetletud viimase numbri korral saame otsitava arvu eelviimase numbri üheselt määrata nii, et saadaval arvul oleks üheksaga jaguv ristsumma. Vahetu proovimise teel veendume, et niiviisi leitud arvudest 51750, 51732, 51714, 51786 ja 51768 jagub seitsmega ainult arv 51786.

VIII klass, I osa.

1. sobib näiteks $7\cdot 6\cdot 2\cdot 9:3+4+8+1-5=260$; on ka mitmeid teisi võimalusi. 2. ei jagu (ei jagu 3-ga). 3. $\frac{6}{5}$. 4. 1, 4, 9, 16 (sellised arvud on parajasti täisruudud). 5. $\frac{11}{9}$ kg. 6. 75°. 7. 37,5%. 8. 145. 9. 130°. 10. 24.

VIII klass, II osa.

1. *Vastus:* $(45-3\pi)\,\mathrm{cm}^2$.

   Otsitava pindala S leidmiseks lahutame suure ruudu pindalast kolmveerandi ringi pindala ning väikese ruudu (mille küljepikkus on võrdne ringi raadiusega) pindala, seega

$$S=49-\frac{3}{4}\cdot 2^2\cdot\pi-4=45-3\pi\,.$$

2. *Vastus:* 2 krooni ja 40 senti.

   Olgu ostetud x kg "Arahhist suhkrus", siis "Merekivikesi" osteti $1{,}5x$ kg ning kumbki ost maksis $30x$ krooni. Seega maksab $2{,}5x$ kg maiustuste segu $60x$ krooni ning 100 g segu maksab järelikult $\frac{60}{25}=2{,}4$ krooni.

3. *Vastus:* 8, 13 ja 18.

Arvu $1872 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$ saame esitada kolme niisuguse positiivse täisarvu $a < b < c$ korrutisena, mis rahuldavad tingimust $c - b = b - a$, ühelainsal viisil. Vaadeldavate variantide arvu saame oluliselt vähendada, arvestades kitsendust $a \geqslant 6$ (kuna ülesandes on juttu koolilastest!)

IX klass, I osa.

1. $-\dfrac{7}{3}$. 2. 6. 3. 14. 4. 6. 5. -4 (seaduspärasus: $a \otimes b = a^2 - b$).
6. 11. 7. $50\,\mathrm{cm}$. 8. $\dfrac{2}{3}$. 9. $32\,\mathrm{cm}^2$. 10. $\dfrac{2}{3}$.

IX klass, II osa.

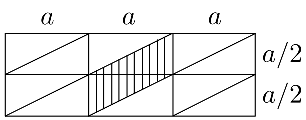
1. *Vastus:* $33\frac{1}{3}\,\%$.

   Oletades, et botaste hinda alandati mõlemal korral $x\,\%$ võrra, saame võrrandi $400 = 900 \cdot \left(1 - \dfrac{x}{100}\right)^2$, kust $x = \dfrac{100}{3}$.

2. *Vastus:* 6.
   Olgu $a+b = 6x$, siis $b+c = 7x$, $c+a = 8x$ ja $2(a+b+c) = 21x$, kust tingimust $a+b+c = 14$ arvestades saame $x = \dfrac{4}{3}$. Nüüd $2c = (b+c)+(c+a)-(a+b) = 9x$ ning $c = \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{4}{3} = 6$.

3. *Vastus:* $\dfrac{1}{6}$.

   Kogu ristküliku saame jaotada kaheteistkümneks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks, millest kaks moodustavad viirutatud kujundi (vt. joonist 3).



Joonis 3

4. *Vastus:* mistahes (ühest suurema) paaritu arvu.

   Olgu korvide arv n ning nendesse paigutatavate arbuuside arvud (näit. päripäeva lugedes) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, siis ühelt poolt saame $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_1 - a_n) = 0$, teisalt aga on iga liidetava väärtus vaadeldavas summas 1 või -1, s.t. summa paarsus langeb kokku liidetavate arvu n paarsusega. Niisiis ei ole paaritu arvu n korral võimalik arbuuse nõutaval viisil korvidesse paigutada — teiselt poolt saame mistahes paarisarvu n korral nõutava paigutuse, pannes korvidesse näiteks vaheldumisi 0 ja 1 arbuusi.

X klass

1. *Vastus:* $-3 < a \leqslant 5 - 2\sqrt{7}$ või $a \geqslant 5 + 2\sqrt{7}$ (vt. märkust!).

   Antud võrrandil leiduvad reaalarvulised lahendid, kui

   $$D = (a-3)^2 - 4(a+3) = a^2 - 10a - 3 \geqslant 0\ ,$$

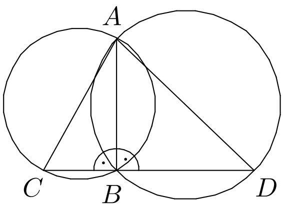
   s.t. kui $a \geqslant 5+2\sqrt{7}$ või $a \leqslant 5-2\sqrt{7}$. Lahendite korrutis on võrdne arvuga $\dfrac{1}{a+3}$, seega on lahendid samamärgilised siis ja ainult siis, kui $a > -3$.

   Märkus: Kui $a = -3$, saame lineaarvõrrandi, millel on üksainus lahend $x = -\dfrac{1}{6}$. Et ülesande tekstis ei ole juttu lahendite arvust, siis on mõeldav lugeda ka juht $a = -3$ ülesande tingimustele vastavaks. Teiselt poolt saame $a = 5 \pm 2\sqrt{7}$ korral ruutvõrrandi, mille lahendid langevad kokku, s.t. on mõeldav lugeda need juhud (kui üheainsa lahendi andvad) ülesande tingimustele mittevastavaks. Niisiis tuleks õigeks lugeda ka vastused "$-3 \leqslant a \leqslant 5 - 2\sqrt{7}$ või $a \geqslant 5 + 2\sqrt{7}$" ja "$-3 < a < 5 - 2\sqrt{7}$ või $a > 5 + 2\sqrt{7}$".

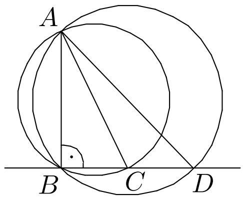
2. Kuna nurgad $\angle ABC$ ja $\angle ABD$ (kui ringjoone diameetrile toetuvad piirdenurgad) on täisnurgad, siis punktid C, B ja D asuvad ühel sirgel sõltumata sellest, kas punktid C ja D paiknevad samal või erineval pool sirget AB (vt. joonised 4 ja 5).

3. *Vastus:* 3, 6, 12, 30.

Paneme tähele, et $6n = 6 \cdot (6+n) - 36$, seega jagub arv $6n$ arvuga $6+n$ siis ja ainult siis, kui arv 36 jagub arvuga $6+n$. Et $n > 0$, siis peab arv $6+n$ olema arvu 36 kuuest suurem tegur. Sellisteks teguriteks on arvud 9, 12, 18 ja 36, millest leiame ülaltoodud n väärtused.



Joonis 4



Joonis 5

4. *Vastus:* $n \leqslant 6$.

   Kui $n = 1$ (või ka $n = 2$), siis paiknevad kõik tükid mosaiigi serval. Olgu $n \geqslant 2$, siis on mosaiigis $(n-2)^2$ "sisemist" tükki, seega tuleb kontrollida võrratuse $2(n-2)^2 < n^2$ kehtivust. Vastava ruutvõrrandi $2(n-2)^2 - n^2 = 0$ lahenditeks on $4 \pm 2\sqrt{2}$, seega on vaadeldav võrratus rahuldatud $2 \leqslant n \leqslant 6$ korral.

5. *Vastus:* sõita tuli tänavale T.

   Kui helistaja oleks tänavalt P, siis oleksid tema öeldud laused kas mõlemad väärad või mõlemad tõesed, mis pole ülesande tingimuste kohaselt võimalik. Kui helistaja ei ole tänavalt P, siis on tema öeldud kaks lauset omavahel vastuolus, s.t. ei saa mõlemad olla tõesed. Seega võib helistaja olla ainult tänavalt V ning tulekahju pole ei tänaval V ega tänaval P.

XI klass

1. *Vastus:* 98, 970.

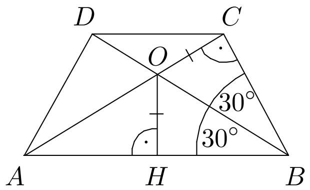
   Teisendades saame:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 100 - 2 = 98\ ;$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right) = 1000 - 3 \cdot 10 = 970\ .$$

2. Kuna $\angle OHB = \angle OCB = 90^\circ$ (vt. joonist 6), siis langevad kolmnurkade OHB ja OCB ümberringjooned kokku, s.t. $OHBC$ on kõõlnelinurk. Et $|OC| = |OH|$, siis nurgad $\angle CBO$ ja $\angle OBH$ on võrdsed (kui võrdsetele kõõludele toetuvad piirdenurgad), s.t. $\angle OBH = \angle CBO = \angle DBC = 30^\circ$.

   Täisnurksest kolmnurgast ABC leiame nüüd $\angle CAB = 30^\circ$, s.t. kolmnurk AOB on võrdhaarne ning $|AH| = |BH|$. Kuna $CD \parallel AB$, siis $\angle CDO = \angle OBH = 30^\circ$ ja $\angle DCO = \angle OAH = 30^\circ$, s.t. kolmnurk DOC on samuti võrdhaarne. Niisiis on trapets $ABCD$ sümmeetriline sirge OH suhtes ning seega võrdhaarne.



Joonis 6

3. *Vastus:* 36 ja 81.

   On lihtne veenduda, et mistahes kahe arvu vahe, mis on teineteisest saadavad numbrite järjekorra vahetamise teel, jagub üheksaga. Üheksaga jaguvad kahekohalised täisruudud on 36 ja 81. Jääb veel kontrollida, et tõepoolest leiduvad niisugused kolmekohalised arvud, millest lähtudes võime vaadeldavaks vaheks saada 36 või 81: näiteks $218 - 182 = 36$ ja $213 - 132 = 81$.

4. *Vastus:* 5×12 või 6×8 meetrit.

   Olgu põranda mõõtmed $n \times m$ meetrit. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $m \geqslant n > 2$ (kui $m \leqslant 2$ või $n \leqslant 2$, siis paiknevad kõik plaadid põranda servades). Et sisemisi plaate on $(m-2)(n-2)$, saame võrduse $2(m-2)(n-2) = mn$, s.t. $(m-4)(n-4) = 8$, kust leiame $n - 4 = 1$, $m - 4 = 8$ või $n - 4 = 2$, $m - 4 = 4$.

5. Jüri saab võtta õunu nii, et iga “käikude” paariga (enne Mari, siis Jüri) väheneb õunte arv tünnis täpselt 4 võrra. Et arv 1996 jagub neljaga, siis jagub neljaga ka õunte arv tünnis enne iga Mari “käiku”, seega ei saa Mari võtta tünnist viimast õuna.

XII klass

1. *Vastus:* $x < -4$ või $1 \leqslant x < 2$.

   Et $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$ ja $5x^2+21x+4 = 5(x+4)(x+\frac{1}{5})$, siis saame tingimused $x \neq 2$, $x \neq -3$ (et esimese murru nimetaja poleks võrdne nulliga) ning $x > -\frac{1}{5}$ või $x < -4$ (et teine juurealune avaldis oleks positiivne). Esimese juurealuse taandamisel teguriga $x-2$ saame murru $\frac{(x-2)(1-x)}{(x+3)}$, mis on mittenegatiivne, kui $x < -3$ või $1 \leqslant x \leqslant 2$. Kõiki tingimusi kokku võttes leiame, et $x < -4$ või $1 \leqslant x < 2$.

2. Kasutades kolmnurga pindala valemeid $S = \frac{abc}{4R}$ ja $S = pr$, kus $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}$, saame $\frac{ac}{4R} = \frac{3r}{2}$ ehk $rR = \frac{ac}{6}$.

3. Kui valitud 50 arvu seas on arv 100, siis väide ilmselt kehtib. Vastasel korral moodustame arvudest $1, \ldots, 49, 51, \ldots, 99$ paarid nii, et igas paaris olevate arvude summa on võrdne arvuga 100. Kui valitud arvude seas on mõlemad arvud mingist paarist, siis tõestatav väide kehtib. Kui see aga nii ei ole, siis peab olema valitud täpselt üks arv igast paarist (ning lisaks arv 50) — seega on valitud arvude seas ka arv 36 või arv 64.

4. Oletame, et mingi naturaalarvu n korral on värvimata kuupe ja vähemalt ühe sinise tahuga kuupe ühepalju, siis $n > 2$ ja värvimata kuupide arv on $(n-2)^3$. Võrdusest $2(n-2)^3 = n^3$ näeme, et n peab olema paarisarv ja jaguma neljaga (kuna n^3 jagub 16-ga). Olgu $n = 4k$, siis võrdust $2(n-2)^3 = n^3$ teisendades saame $4k^3 - 12k^2 + 6k - 1 = 0$, mis ei kehti ühegi naturaalarvu k korral (sest esimese kolme liidetava summa on alati paarisarv).

5. *Vastus:* A ja B on poisid, C ja D on tüdrukud; paremusjärjestus: C, D, B, A.

   Oletame kõigepealt, et A-l on õigus — siis B ja C eksivad ning D-l peab olema õigus, mis pole aga võimalik. Seega A eksib.

Nüüd teame, et C ja D ei saa mõlemad eksida. Kui D-l on õigus, siis on ka C-l õigus — seega on C-l igal juhul õigus. Järelikult mõlemad poisid eksivad ja mõlemal tüdrukul on õigus.

Oletame, et D eksib — siis peab B-l olema õigus. Ent sel juhul on B poiss ja peab varemtõestatu põhjal eksima. Saadud vastuolu näitab, et õigus on C-l ja D-l (kes on järelikult tüdrukud) ning eksivad A ja B (kes on järelikult poisid).

C ja D ütluste õigsusest järeldame, et A on paremusjärjestuses viimasel kohal, D on vahetult C järel ning B ei saa olla esimene — seega peab B olema kolmandal ning C ja D vastavalt esimesel ja teisel kohal.