

# Eesti koolinoorte XLIII täppisteaduste olümpiaad

## MATEMAATIKA II VOOR

20. jaanuar 1996. a.

Soovitused lahenduste hindamiseks

### Üldised märkused

1. Juhime Teie tähelepanu sellele, et alljärgnevas on 7.–9. klasside olümpiaadi I osa (testi) ning kõikide ülejäänud ülesannete hindamisjuhised esitatud mõnevõrra erinevalt. Testide iga küsimuse jaoks on eraldi loetletud (või kirjeldatud) vastused, mille eest tuleks anda vastavalt kaks punkti või üks punkt (s.t. vastavaid punkte ühe küsimuse piires *ei tule* liita). Seevastu traditsiooniliste “olümpiaadi tüüpi” ülesannete lahendused on jaotatud võimalust mööda osadeks ning näidatud iga osa eest antav punktide arv (s.t. antud ülesande eest antava punktisumma saamiseks *tuleb* lahenduse erinevate osade eest antud punktid liita).

2. Mõne ülesande korral, mille jaoks oleme ette näinud mitut oluliselt erinevat lahenduskäiku, anname iga sellise lahenduse jaoks eraldi hindamisskeemi. Iga mittetäielikku lahendust, mis sisaldab elemente rohkem kui ühest lahenduskäigust, tuleb seejuures hinnata *ainult ühe* skeemi järgi, s.t. niisuguse lahenduse eest antavad punktid määratakse kui *maksimum* (mitte summa!) punktidest, mis sellele antaks ühe või teise hindamisskeemi kohaselt.

3. Kahtlemata esineb õpilaste töödes ka niisuguseid mõttekäike, mis ei mahu ühegi meie poolt pakutud skeemi alla. Selliste lahenduste hindamisel tuleks eeskätt lähtuda sellest, *kui suur osa* antud ülesandest on õpilasel lahendatud (arvestades seejuures lahenduse üksikute elementide erinevat raskusastet). Igal juhul tuleb iga ülesande *mistahes* täieliku ja matemaatiliselt korrektse lahenduse eest anda maksimumpunktid sõltumata selle lahenduse pikkusest või otstarbekusest võrreldes teiste lahendusviisidega.

## VII klass, I osa.

1. Antud õige vastus 7: 2 p.
2. Antud õige vastus  $-\frac{1}{3}$ : 2 p.
3. Antud vastuseks “3” või loetletud suvalises järjekorras õiged numbrid (9, 0, 4): 2 p.
4. Antud vähemalt üks õige esitus (kolme ühesuguse numbril abil): 2 p.
5. Antud vähemalt üks õige paar (9 ja 7, 9 ja  $-7$ ,  $-9$  ja 7 või  $-9$  ja  $-7$ ): 2 p.  
Antud vastuseks paar “81 ja 49” või mõni sobivatest *paarisarvude* paaridest (6 ja 2, 6 ja  $-2$ ,  $-6$  ja 2 või  $-6$  ja  $-2$ ): 1 p.
6. Antud vastuseks 25% või 25: 2 p.  
Antud vastuseks 0,25 või  $\frac{1}{4}$ : 1 p.
7. Joonestatud sobivalt nelinurk ja seda lõikav sirge: 2 p.  
Joonestatud *mittekumer* nelinurk, ent sirge on joonestamata või paigutatud valesti: 1 p.
8. Antud õige vastus  $(-5; 6)$ : 2 p.  
Antud vastuseks  $(5; -6)$  (on leitud õige tipp, ent peegeldatud see  $x$ -teljest): 1 p.
9. Antud õige vastus  $20^\circ$ : 2 p.  
Antud vastuseks 20 (ilma ühikuta): 1 p.
10. Antud õige vastus 14: 2 p.  
Antud vastuseks 7 (sellise hulktahuka tahkude arv, mis saadakse kuubi *ühe* tipu “mahalõikamisega”): 1 p.

## VII klass, II osa.

1. Kujundi õigesti joonestamise eest: 2 p.  
Joonestatud kujundi sobivalt osadeks jaotamise eest: 2 p.  
Kujundi osade pindalade ja kogupindala leidmise eest: 3 p.

Kui kujundi joonestamisel on eksitud ühe tipu asukohaga, anda kujundi joonestamise eest 1 p., rohkem kui ühe eksimuse korral 0 p. (pluss osadeks jaotamise ja pindalade arvutamise eest antavad punktid).

2. Basseini ainult teise ja ainult kolmanda kraani kaudu täitumiseks kuluva aja leidmise eest: 1 p.  
Võrrandi  $\frac{1}{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$  (või sellega analoogilise) koostamise eest: 4 p.  
Saadud võrrandi lahendamise eest: 2 p.
3. Arusaamise eest, mida on vaja arvu jaguvuseks 6 ja 9-ga: 2 p.  
Viimase kahe numברי kombinatsioonide leidmise eest, mille korral antud arv jagub 6 ja 9-ga: 3 p.  
Kontrolli eest, milline neist kombinatsioonidest annab ka jaguvuse 7-ga: 2 p.

## VIII klass, I osa.

1. On kasutatud kõiki tehtmärke ja avaldise väärtus on paarisarv (see ei tarvitse olla välja arvatud!): 2 p.  
Avaldise väärtus on paarisarv, ent ei ole kasutatud kõiki tehtmärke: 1 p.
2. Antud õige vastus (“ei” või “ei jagu”): 2 p.
3. Antud õige vastus  $\frac{6}{5}$ : 2 p.  
Antud vastuseks  $\frac{5}{6}$ : 1 p.

4. Loetletud õiged arvud 1, 4, 9, 16 (suvalises järjekorras): 2 p.  
 Loetletud neli naturaalarvu, millel on paaritu arv tegureid, kuid need pole neli esimest: 1 p.
5. Antud õige vastus  $\frac{11}{9}$  kg: 2 p.  
 Antud vastuseks  $\frac{11}{9}$  (ilma ühikuta) või  $\frac{4}{3}$  kg (päevaportsjoni suurus enne kuivikute ümberjagamist): 1 p.
6. Antud õige vastus  $75^\circ$ : 2 p.  
 Antud vastuseks 75 (ilma ühikuta): 1 p.
7. Antud vastuseks 37,5% või 37,5: 2 p.  
 Antud vastuseks 0,375 või  $\frac{3}{8}$ : 1 p.
8. Antud õige vastus 145 (või  $145^\circ$ ): 2 p.  
 Antud vastuseks 35 või  $35^\circ$ : 1 p.
9. Antud õige vastus  $130^\circ$ : 2 p.  
 Antud vastuseks 130 (ilma ühikuta): 1 p.
10. Antud õige vastus 24: 2 p.  
 Antud vastuseks 15 (sellise hulktahuka servade arv, mis saadakse kuubi *ühe* tipu “mahalõikamisel”): 1 p.

### VIII klass, II osa.

1. Suure ruudu pindala leidmise eest: 1 p.  
 Viirutamata osa pindala leidmise eest: 5 p.  
 Viirutatud osa pindala arvutamise eest: 1 p.

Kui lahenduses on olemas idee arvutada viirutamata osa pindala väikese ruudu ja  $270^\circ$  sektori pindalade summana, ent arvutustes on eksitud, anda selle eest 3 p. (pluss 1 p., kui on leitud suure ruudu pindala).

Kui vastuseks on antud arv ilma ühikuta (või on ühik vale), anda üks punkt vähem.

Kui vastuseks on antud  $(49 - 4\pi) \text{ cm}^2$  (viirutamata “nurgatükk” on jäetud arvestamata), anda kogu lahenduse eest 2 p.

2. Arusaamise eest, et “Merekivikesi” osteti poolteist korda rohkem kui “Arahhist suhkrus”: 1 p.  
Maiustuste koguhulga ja koguhinna leidmise eest (muutujaid sisaldavate avaldistena): 3 p.  
100 g maiustuste hinna leidmise eest: 3 p.
3. Arvu 1872 teguriteks lahutamise eest: 3 p.  
Lahendi leidmise eest: 3 p.  
Lahendi ühesuse äramärgimise eest (ka ilma pikemate selgitusteta): 1 p.

### IX klass, I osa.

1. Antud õige vastus  $-\frac{7}{3}$  (või  $-2\frac{1}{3}$ ): 2 p.  
Antud vastuseks  $\frac{7}{3}$  (või  $2\frac{1}{3}$ ): 1 p.
2. Antud õige vastus 6: 2 p.
3. Antud õige vastus 14: 2 p.
4. Antud õige vastus 6: 2 p.
5. Näidatud ära seaduspärasus  $a \otimes b = a^2 - b$  ja antud õige vastus  $-4$ : 2 p.  
Näidatud ära õige seaduspärasus, kuid eksitud arvutamisel, või antud vastuseks “ $-4$ ” ilma seaduspärasust näitamata: 1 p.  
  
Kui on leitud mingi teine seaduspärasus, mis sobib *kõikide* üllesandes antud arvudega, ja arvutatud *selle järgi* õige vastus, anda 2 p. (kui arvutamise on eksitud, siis 1 p.)

6. Antud õige vastus 11: 2 p.  
 Antud vastuseks 10 või 12: 1 p.
7. Antud õige vastus 50 cm: 2 p.  
 Antud vastuseks 50 (ilma ühikuta): 1 p.
8. Antud õige vastus  $\frac{2}{3}$  (või  $66\frac{2}{3}\%$ ): 2 p.
9. Antud õige vastus  $32\text{ cm}^2$ : 2 p.  
 Antud vastuseks 32 (ilma ühikuta) või on ühik vale: 1 p.
10. Antud õige vastus  $\frac{2}{3}$  (või  $66\frac{2}{3}\%$ ): 2 p.  
 Antud vastuseks  $\frac{1}{3}$  (või  $33\frac{1}{3}\%$ ): 1 p.

### IX klass, II osa.

1. Võrrandi  $900 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 400$  või selle analoogi (ka näiteks  $900 \cdot x^2 = 400$ , kui selles muutujat õigesti tõlgendatakse) koostamise eest: 3 p.  
 Koostatud võrrandi lahendite leidmise eest: 2 p.  
 Sobiva lahendi väljavalimise eest: 2 p.
2. Sobiva(te) võrrandi(te) koostamise eest, millest on võimalik leida  $c$  väärtus: 3 p.  
 $c$  väärtuse leidmise eest koostatud võrrandi(te)st: 4 p.
3. Et seda ülesannet saab lahendada vähemalt kahel oluliselt erineval moel (viirutatud nelinurga pindala arvutamise või ristküliku sobiva tükeldamise teel), siis anname hindamisskeemi kummagi lahenduse jaoks eraldi (vt. ka üldisi märkusi esimesel leheküljel!)

*Lahendus pindalade arvutamise teel:*

Viirutatud kujundi mõõtmete leidmise eest (koos põhjendusega!): 4 p.

Viirutatud kujundi ja kogu ristküliku pindalade arvutamise eest: 2 p.

Pindalade suhte leidmise eest: 1 p.

*Lahendus ristküliku tükeldamise teel:*

Ristküliku sobiva tükeldamise eest (koos vajalike põhjendustega!): 5 p.

Pindalade suhte leidmise eest selle tükelduse põhjal: 2 p.

Kui viirutatud kujundi mõõtmed on õigesti leitud (või ristkülik tükeldatud), ent seejuures kasutatud väited on põhjendamata (näiteks see, miks viirutatud kujundi püstiste külgede pikkus on  $\frac{a}{2}$  või miks ristküliku kesklõik läbib viirutatud kujundi tippe), anda 1 p. vähem.

4. Põhjenduse eest, et sobib mistahes paaritu arv korve: 6 p.  
Põhjenduse eest, et paarisarv korve ei taga vajalikku tulemust: 1 p.

Kui vastuseks on antud mingi *konkreetne* paaritu arv ja põhjendatud selle sobivust, anda 5 p. (pluss 1 p., kui on põhjendatud ka paarisarvude sobimatust).

## **X klass**

1. Parameetri  $a$  väärtuste leidmise eest, mille korral antud ruutvõrrandil on reaalarvulised lahendid: 3 p.  
Parameetri  $a$  väärtuste leidmise eest, mille korral lahendite korrutis on positiivne: 2 p.  
Saadud tulemuste põhjal õige lõppvastuse leidmise eest: 2 p.

Vt. ka märkusi lahenduste lehel (parameetri väärtuste  $a = -3$  ja  $a = 5 \pm 2\sqrt{7}$  kohta)!

2. Punktide  $B, C, D$  paiknemise ühe võimaluse vaatlemise eest: 4 p.

Lisaks ka teise võimaluse vaatlemise eest: 3 p.

3. Ka seda ülesannet saab lahendada vähemalt kahel oluliselt erineval viisil (esitades arvu  $6n$  kujul  $6(6+n) - 36$  või pannes tähele, et seos  $6n = k(6+n)$  saab kehtida vaid siis, kui  $k \leq 5$ ), seepärast anname siin hindamisskeemi kummagi lahenduse jaoks eraldi (vt. ka üldisi märkusi esimesel leheküljel!)

*Lahendus seose  $6n = 6(6+n) - 36$  abil:*

Seose  $6n = 6(6+n) - 36$  väljakirjutamise eest: 2 p.

Tähelepaneku eest, et tuleb leida arvu 36 kuuest suuremad tegurid: 3 p.

Neile teguritele vastavate  $n$  väärtuste leidmise eest: 2 p.

*Lahendus seose  $6n = k(6+n)$  abil:*

Seose  $6n = k(6+n)$  väljakirjutamise eest: 2 p.

Tähelepaneku eest, et  $k \leq 5$ : 2 p.

Tähelepaneku eest, et väärtus  $k = 1$  ei sobi: 1 p.

Väärtustele  $k = 2, 3, 4, 5$  vastavate  $n$  väärtuste leidmise eest: 2 p.

4. Seose  $2(n-2)^2 < n^2$  (või sellega analoogilise võrratuse) koostamise eest: 3 p.

Saadud seost rahuldavate  $n$  väärtuste leidmise eest: 3 p.

Juhu  $n = 1$  eraldi läbivaatamise eest 1 p.

Kui õpilase poolt koostatud seose korral ei ole juhu  $n = 1$  eraldi läbivaatamine vajalik, siis anda saadud seost rahuldavate  $n$  väärtuste leidmise eest 4 p.

Kui õpilane on proovimise teel leidnud õiged  $n$  väärtused, ent pole tõestanud, et rohkem sobivaid väärtusi ei ole, anda 4 p.



5. Selgituse eest, et helistaja ei saa olla tänavalt  $T$ : 2 p.  
 Selgituse eest, et helistaja ei saa olla tänavalt  $P$ : 2 p.  
 Järelduse eest, et helistaja peab olema tänavalt  $V$ : 1 p.  
 Järelduse eest, et sõita tuleb tänavale  $T$ : 2 p.

## XI klass

1. Ka seda ülesannet saab lahendada vähemalt kahel erineval viisil: teisendades võrduse  $a + \frac{1}{a} = 10$  ruutvõrrandiks ja leides sellest  $a$  väärtused, või kasutades avaldise  $a + \frac{1}{a}$  astendamist. Anname hindamisskeemi kummagi lahenduse jaoks eraldi (vt. ka üldisi märkusi esimesel leheküljel!)

*Lahendus ruutvõrrandi lahendamise abil:*

- Ruutvõrrandi koostamise ja lahendamise eest: 2 p.  
 Nõutud avaldiste väärtuste arvutamise eest: 5 p.

*Lahendus avaldise  $a + \frac{1}{a}$  astendamise abil:*

- Idee eest kasutada avaldise  $a + \frac{1}{a}$  astmeid: 2 p.  
 Nõutud avaldiste väärtuste leidmise eest nende astmete abil: 5 p.

Kui on leitud ülesandes esitatud kahest avaldisest ainult ühe väärtus, anda selle osa eest 3 p.

2. Õige joonise tegemise ning nurkade  $\angle CBO$  ja  $\angle OBH$  võrdsuse näitamise eest: 2 p.  
 Kolmnurkade  $AOB$  ja  $DOC$  võrdhaarsuse (või sellega samaväärsete tingimuste) tõestamise eest: 3 p.  
 Tõestatud tingimustest trapetsi haarade võrdsuse järeldamise eest: 2 p.

3. Tähelepaneku eest (vastava väite võib lugeda teadaolevaks), et esialgse ja saadud arvu vahe jagub üheksaga: 3 p.  
 Vahe võimaliku väärtuse 36 leidmise eest: 1 p.  
 Vahe võimaliku väärtuse 81 leidmise eest: 1 p.  
 Kontrolli eest, et leidub kolmekohaline arv, mis annab vahe väärtuseks 36: 1 p.  
 Kontrolli eest, et leidub kolmekohaline arv, mis annab vahe väärtuseks 81: 1 p.
4. Ristküliku mõõtmeid määrava diofantilise võrrandi koostamise eest: 2 p.  
 Saadud võrrandi lahendite leidmise eest: 3 p.  
 Põhjenduse eest, et rohkem lahendeid ei ole: 2 p.
- Juhul, kui on leitud ainult üks lahend, anda lahendite leidmise eest 1 p.
5. Jüri jaoks sobiva mängutaktika kirjeldamise eest: 4 p.  
 Põhjenduse eest, miks see taktika tagab alati viimase õuna võtmise: 3 p.

## XII klass

1. Esimese liidetava määramispiirkonna leidmise eest: 3 p.  
 Teise liidetava määramispiirkonna leidmise eest: 2 p.  
 Määramispiirkondade ühisosa leidmise eest: 2 p.
- Kui väärtus  $x = 2$  on loetud funktsiooni määramispiirkonda kuuluvaks, anda 1 p. vähem.
2. Aritmeetilise jada tingimust kasutades seose  $p = \frac{3b}{2}$  või sellega samaväärse seose (nt.  $b = \frac{a+c}{2}$ ) leidmise eest: 2 p.

- Kolmnurga küljepikkuste ning selle sise- ja ümberringjoone raadiuste vahelise seose (nt.  $rR = \frac{abc}{4p}$ ) leidmise eest: 3 p.
- Saadud seostest võrduse  $rR = \frac{ac}{6}$  tuletamise eest: 2 p.
3. Seda ülesannet lahendatakse ilmselt enamasti teatud juhtude läbivaatamise teel, kusjuures vaadeldavad juhud võivad olla piiritletud erineval viisil. Hindamisel tuleks lähtuda sellest, kui suur osa (üldisuse mõttes!) võimalikest juhtudest on läbi vaadatud. Näite-na toome hindamisskeemi žürii poolt väljapakutud lahendusviisi jaoks:
- Juhu vaatlemise eest, kus valitud arvude seas esineb arv 100 (või üldse mingi täisruut): 1 p.
- Juhu vaatlemise eest, kus mingi kahe valitud arvu summa on täisruut): 2 p.
- Tõestuse eest, et alati realiseerub üks eespool vaadeldud juhtudest: 4 p.
4. Seose  $2(n-2)^3 = n^3$  (või sellega analoogilise võrduse) koostamise eest: 2 p.
- Sobiva idee (nt. arvu  $n$  paarsus või neljaga jaguvus) eest näitamaks, et saadud võrrandil puuduvad naturaalarvulised lahendid: 2 p.
- Esitatud idee realiseerimise eest: 3 p.
5. Osavõtjate paremusjärjestuse määramise eest: 3 p.
- Osavõtjate soo määramise eest: 3 p.
- Selgituse eest (see võib olla antud lahendamise käigus), et leitud lahend on ainus: 1 p.