XLII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

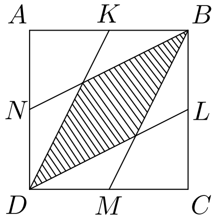
21 января 1995 г.

IX класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Если охотник будет идти на лыжах со скоростью $10\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то он прибудет к охотничьему домику в 13 часов. Если же он будет идти со скоростью $15\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то он прибудет в 11 часов. С какой скоростью должен двигаться охотник, чтобы добраться до охотничьего домика ровно в полдень?

2. Какой процент квадрата $ABCD$ заштрихован, если K, L, M и N являются серединами соответственно сторон AB, BC, CD и DA?



3. Найти все двузначные натуральные числа такие, что сумма самого числа и числа, полученного из него путем перестановки цифр, является квадратом некоторого целого числа.

4. Внутри остроугольного треугольника ABC выбирается точка M. Пусть P и Q — перпендикулярные проекции точки M соответственно на стороны AB и AC, а K — перпендикулярная проекция точки A на прямую, определенную точками P и Q. Доказать, что углы $\angle PAK$ и $\angle MAQ$ равны.

5. Найти все решения уравнения $x^{1000} = x\cdot(2x)^{500} - 2^{998}\cdot x^2$ в вещественных числах.

6. На классном вечере каждый мальчик танцевал ровно с двумя девочками и каждая девочка — ровно с двумя мальчиками. Доказать, что на классном вечере было равное число мальчиков и девочек.

XLII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

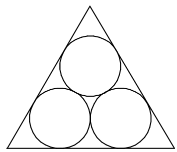
21 января 1995 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все целые числа n такие, что $(n^2+n-1)^{n+3}=1$.

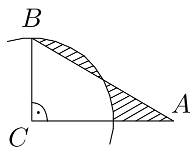
2. В правильном треугольнике расположены три окружности одинакового радиуса, как показано на рисунке. Найти отношение длины стороны треугольника a к радиусу окружности r.



3. Пусть p, q — целые числа и x_1, x_2 — решения квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Возможно ли, что

$$|x_1-x_2|=\sqrt{1995}\,?$$

4. Найти площадь заштрихованной на рисунке области, если вершина C треугольника находится в центре окружности, $|BC|=1$ ja $\angle BAC=30^\circ$.



5. Найти все вещественные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^{1995}+y^{1995}=x \\ x^{1994}+y^{1994}=1\ . \end{cases}$$

6. На классном вечере каждый мальчик танцевал по крайней мере с половиной девочек, а каждая девочка — не более, чем с половиной мальчиков. Доказать, что как девочек, так и мальчиков на классном вечере было четное число.

XLII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

21 января 1995 г.

XI класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC прямой угол находится при вершине C. Центры квадратов, построенных на сторонах AB, AC ja BC треугольника и расположенных вне этого треугольника, находятся соответственно в точках D, E и F. Доказать, что площадь треугольника DEF равна площади квадрата, построенного на стороне AC.
2. Нечетное 1995-значное число делится на 5 и всякое число, составленное из двух рядом стоящих цифр этого числа, делится на одно из чисел 17 ja 23. Найти первую цифру этого числа.
3. В парке две прямолинейные дорожки, пересекающиеся под прямым углом, и часто используемое собаками дерево, расположенное в 80м от одной дорожки и в 270м от другой. От одной дорожки к другой пролегает прямолинейная собачья тропинка, на которой находится и упомянутое дерево. Найти длину этой тропинки, если известно, что она кратчайшая из всех вожможных.
4. Концы отрезков, исходящих из точки $A(-2,0)$, расположены на окружности с уравнением $x^2+y^2=16$. На какой кривой расположены середины этих отрезков? Найти уравнение этой кривой.
5. В арифметической прогрессии $a_1=1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ сумма первых $2n$ членов равна сумме следующих n членов. Найти сумму первых $n+2$ членов этой прогрессии.
6. В стене коридора замка имеются 1995 закрытых дверей. Один за другим 1995 сторожей начинают двигаться с начала коридора, причем первый сторож открывает все двери, второй изменяет положение каждой второй двери, третьий — каждой третьей двери и т.д. Сколько дверей будут открыты после прохождения всех сторожей?

XLII Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

21 января 1995 г.

XII класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Бильярдный стол имеет форму прямоугольника, вершины которого находятся в точках $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B\left(\frac{5}{4},1\right)$ и $C\left(\frac{5}{4},0\right)$. Шар, начавший двигаться из точки $P\left(0,\frac{1}{3}\right)$, отражается прежде всего от борта AB стола в точке X. Двигаясь дальше, шар отражается от бортов BC и CO и вернется в конце концов в исходную точку P. Найти координаты точки X.

2. Показать, что уравнение $x^2-3x-2\sqrt{x}+5=0$ не имеет вещественных решений.

3. Найти все трехзначные числа $\overline{abc}$ такие, что $a, b, c \neq 0$ и $\overline{abc}=a!+b!+c!$ (здесь запись $n!$ обозначает произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$).

4. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника и α, β, γ — соответственно величины углов, расположенных против этих сторон. Доказать, что если $\alpha=2(\beta-\gamma)$, то $a^2b=(b+c)(b^2-c^2)$.

5. Пусть A — сумма первых n членов геометрической прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и B — сумма обратных значений тех же членов. Найти произведение первых n членов этой прогрессии.

6. На бесконечной клетчатой бумаге некоторые клетки отмечены, так что любой прямоугольник, состоящий из 12 клеток, содержит по крайней мере одну отмеченную клетку. Доказать, что найдется прямоугольник, состоящий из 8 клеток и содержащий по крайней мере две отмеченные клетки.