Eesti koolinoorte XLII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

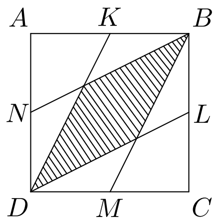
21. jaanuar 1995. a.

IX klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Kui jahimees suusataks kiirusega $10\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, siis jõuaks ta metsas asuvasse jahionni kell 13. Kui ta aga suusataks kiirusega $15\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, jõuaks ta pärale juba kell 11. Millise kiirusega peaks jahimees suusatama, et jõuda jahionni täpselt keskpäevaks?

2. Mitu protsenti ruudust $ABCD$ on viirutatud, kui K, L, M ja N on vastavalt ruudu küljede AB, BC, CD ja DA keskpunktid?



3. Leia kõik kahekohalised naturaalarvud, mille korral antud arvu ja sellest numbrite vahetamise teel saadud arvu summa on mingi täisarvu ruut.

4. Teravnurkse kolmnurga ABC sisepiirkonnas võetakse punkt M. Olgu P ja Q vastavalt punkti M ristprojektsioonid kolmnurga külgedele AB ja AC ning K punkti A ristprojektsioon punktidega P, Q määratud sirgele. Tõesta, et nurgad $\angle PAK$ ja $\angle MAQ$ on võrdsed.

5. Leia võrrandi $x^{1000} = x \cdot (2x)^{500} - 2^{998} \cdot x^2$ kõik reaalarvulised lahendid.

6. Klassiõhtul tantsis iga poiss täpselt kahe tüdrukuga ja iga tüdruk täpselt kahe poisiga. Tõesta, et poisse ja tüdrukuid oli klassiõhtul ühepalju.

Eesti koolinoorte XLII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

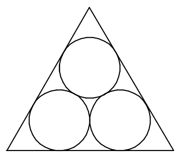
21. jaanuar 1995. a.

X klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

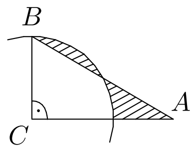
1. Leia kõik täisarvud n, mille korral $(n^2+n-1)^{n+3}=1$.

2. Võrdkülgsesse kolmnurka on paigutatud kolm võrdse raadiusega ringjoont, nagu joonisel näidatud. Leia kolmnurga küljepikkuse a ja ringjoone raadiuse r suhe.



3. Olgu p, q täisarvud ning x_1, x_2 ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendid. Kas on võimalik, et $|x_1-x_2|=\sqrt{1995}$?

4. Leia joonisel viirutatud osa pindala, kui kolmnurga tipp C asub ringjoone keskpunktis, $|BC|=1$ ja $\angle BAC=30^\circ$.



5. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x^{1995}+y^{1995}=x \\ x^{1994}+y^{1994}=1 \end{cases}$$

kõik reaalarvulised lahendid.

6. Klassiõhtul tantsis iga poiss vähemalt pooltega tüdrukutest ja iga tüdruk mitte rohkem kui pooltega poistest. Tõesta, et nii poisse kui ka tüdrukuid oli klassiõhtul paarisarv.

Eesti koolinoorte XLII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

21. jaanuar 1995. a.

XI klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Võrdhaarses täisnurkses kolmnurgas ABC on täisnurk tipu C juures. Kolmnurga külgedele AB, AC ja BC sellest kolmnurgast väljapoole konstrueeritud ruutude keskpunktid on vastavalt D, E ja F. Tõesta, et kolmnurga DEF pindala on võrdne küljele AC konstrueeritud ruudu pindalaga.

2. Paaritu 1995-kohaline arv jagub viiega ning selle arvu mistahes kahest järjestikusest numbrist moodustatud arv jagub ühega arvudest 17 ja 23. Leia selle arvu esimene number.

3. Pargis on kaks täisnurga all lõikuvat sirget teed ja koerte poolt sagedast kasutamist leidev puu, mis on ühest teest $80\,$m ja teisest $270\,$m kaugusel. Ühelt teelt teisele kulgeb sirgjooneline koerte jooksurada, millele jääb ka mainitud puu. Leia selle jooksuraja pikkus, kui on teada, et rada on võimalikest lühim.

4. Punktist $A(-2, 0)$ lähtuvate lõikude teised otspunktid asuvad ringjoonel võrrandiga $x^2 + y^2 = 16$. Millisel joonel asuvad nende lõikude keskpunktid? Leia selle joone võrrand.

5. Aritmeetilises jadas $a_1 = 1$, a_2, $\ldots$, a_n, $\ldots$ on esimese $2n$ liikme summa võrdne järgmise n liikme summaga. Leia selle jada esimese $n + 2$ liikme summa.

6. Lossikoridori seinas on 1995 suletud ust. Üksteise järel hakkavad koridori algusest liikuma 1995 valvurit, kusjuures esimene neist avab kõik uksed, teine muudab iga teise ukse asendit, kolmas iga kolmanda ukse asendit, jne. Mitu ust on pärast kõikide valvurite möödumist avatud?

Eesti koolinoorte XLII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

21. jaanuar 1995. a.

XII klass

Lahendamisaega 5 tundi.
Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Piljardilaud on kujult ristkülik, mille tipud asuvad punktides $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B\left(\frac{5}{4},1\right)$ ja $C\left(\frac{5}{4},0\right)$. Punktist $P\left(0,\frac{1}{3}\right)$ liikuma hakkav kuul põrkab kõigepealt tagasi laua servast AB punktis X. Edasi liikudes põrkab kuul tagasi laua servadest BC ja CO ning jõuab lõpuks tagasi lähtepunkti P. Leia punkti X koordinaadid.

2. Näita, et võrrandil $x^2-3x-2\sqrt{x}+5=0$ puuduvad reaalarvulised lahendid.

3. Leia kõik kolmekohalised arvud $\overline{abc}$, mille korral $a, b, c \neq 0$ ja $\overline{abc}=a!+b!+c!$ (siin $n!$ tähistab korrutist $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$).

4. Olgu kolmnurga külgede pikkused a, b, c ning nende külgede vastas asuvad nurgad vastavalt α, β, γ. Tõesta, et kui $\alpha=2(\beta-\gamma)$, siis $a^2b=(b+c)(b^2-c^2)$.

5. Olgu geomeetrilise jada $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ esimese n liikme summa A ning samade liikmete pöördväärtuste summa B. Leia selle jada n esimese liikme korrutis.

6. Lõpmatul ruudulisel paberil on mõned ruudud märgitud, nii et mistahes 12 ruudust koosnev ristkülik sisaldab vähemalt ühe märgitud ruudu. Tõesta, et leidub 8 ruudust koosnev ristkülik, mis sisaldab vähemalt kaks märgitud ruutu.