Eesti koolinoorte XLII täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

21. jaanuar 1995. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa.

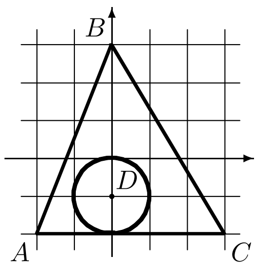
1. 14. 2. 0. 3. 1994. 4. $\boxed{6}\boxed{7}\boxed{2}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{2}\boxed{6}$. 5. 1359. 6. 210°. 7. $(36 - 4{,}5\pi)\,\mathrm{cm}^2$. 8. 60 km. 9. 10. 10. 22.

VII klass, II osa.

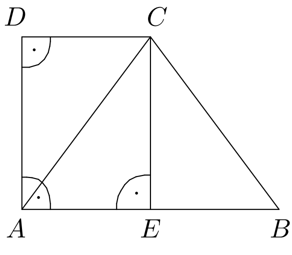
1. *Vastus:* $10 - \pi$.

   Ringi raadius on 1 ning ta sisaldub tervenisti kolmnurgas ABC (vt. joonist 1), mistõttu otsitav pindala on

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 - \pi \cdot 1^2 = 10 - \pi\,.$$



Joonis 1



Joonis 2

2. *Vastus:* 241.

   Olgu otsitav arv p, siis peab $p-1$ jaguma arvudega 3, 4, 5 ja 8, s.t. $p-1 = k \cdot \text{VÜK}\,(3,4,5,8) = 120 \cdot k$, kus k on mingi täisarv. Et $0 \cdot 120 + 1 = 1$ ja $1 \cdot 120 + 1 = 121$ ei ole algarvud, siis on otsitav arv $2 \cdot 120 + 1 = 241$.

3. *Vastus:* a) saab küll; b) kõigile korrustele.

   Alustades liikumist 20. korruselt, saame sõita nii:

$$20 \to 9 \to 17 \to 6 \to 14 \to 3 \to 11 \to 19 \to 8 \to 16 \to$$
$$\to 5 \to 13 \to 2 \to 10 \to 18 \to 7 \to 15 \to 4 \to 12 \to 1\ ,$$

   1. korruselt lähtudes aga nii:

$$1 \to 9 \to 17 \to 6 \to 14 \to 3 \to 11 \to 19 \to 8 \to 16 \to$$
$$\to 5 \to 13 \to 2 \to 10 \to 18 \to 7 \to 15 \to 4 \to 12 \to 20\ .$$

   Paneme tähele, et viimane ahel sisaldab kõiki arve 1-st 20-ni.

   Märkus: Igalt korruselt peale 12-nda on võimalik sõita ainult ühes suunas; 12. korruselt saame sõita parajasti 1. ja 20. korrusele. Et lähtekorrusele tagasipöördumisel pole ilmselt mõtet, on nii 1. kui ka 20. korruselt alustades kogu edasine liikumistee üheselt määratud.

VIII klass, I osa.

1. $9a - 2b$. 2. 193. 3. $\boxed{5}\boxed{8}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{8}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{8}$. 4. b), d), e).
5. a) 3; b) 81. 6. 22. 7. $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$. 8. $40°$. 9. 6. 10. 8.

VIII klass, II osa.

1. *Vastus:* 50%.

   Olgu metsas N puud ja kavatsetagu maha raiuda n puud. Siis on metsas algul $\dfrac{99}{100} \cdot N$ mändi ja pärast raiet oleks järel $\dfrac{98}{100} \cdot (N-n)$ mändi. Seega $\dfrac{98}{100} \cdot (N-n) = \dfrac{99}{100} \cdot N - n$ ehk $N = 2n$.

2. *Vastus:* 18 cm.

   Olgu E punkti C ristprojektsioon trapetsi pikemale alusele AB (vt. joonist 2). Et AC on ristküliku $ADCE$ diagonaal, siis kolmnurkade ADC ja AEC pindalad on võrdsed, s.t.

$$S_{ADC} = S_{AEC} = S_{BEC} = 6\,\text{cm}^2\ .$$

Seega $|BE| = |AE| = |CD| = 3\,\mathrm{cm}$ ja $|BC| = |AC| = 5\,\mathrm{cm}$. Kolmnurgast ADC saame $|AD| = \dfrac{2 \cdot S_{ADC}}{|CD|} = 4\,\mathrm{cm}$. Trapetsi ümbermõõt on niisiis

$$|AD| + |DC| + |CB| + |BE| + |EA| = 18\,\mathrm{cm}\,.$$

3. *Vastus:* a) jah; b) ei.

   Esimesel juhul võime näiteks täita tabeli ühe veeru arvudega -1 ja kõik ülejäänud veerud arvudega 1. Teisel juhul ei ole tabeli nõutud viisil täitmine võimalik, sest siis peaks kõikide tabelis olevate arvude korrutis olema ühekorraga positiivne (kui viie positiivse arvu korrutis) ja negatiivne (kui viie negatiivse arvu korrutis).

IX klass.

1. *Vastus:* $12\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

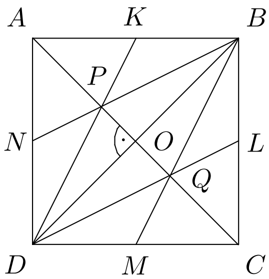
   Asugu jahionn x km kaugusel, siis kulub sinna jõudmiseks aega esimesel juhul $\dfrac{x}{10}$ tundi ja teisel juhul $\dfrac{x}{15}$ tundi. Seosest $\dfrac{x}{10} = \dfrac{x}{15} + 2$ leiame $x = 60$. Seega kulub esimesel juhul aega $\dfrac{60}{10} = 6$ tundi. Et jõuda kohale täpselt keskpäevaks, s.o. 5 tunniga, tuleb suusatada kiirusega $\dfrac{60}{5} = 12\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

2. *Vastus:* $33\,\dfrac{1}{3}\%$.

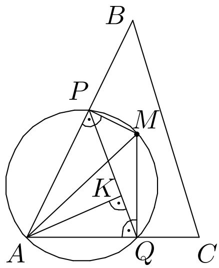
   Olgu viirutatud rombi kaks ülejäänud tippu P ja Q ning ruudu diagonaalide lõikepunkt O (vt. joonist 3). Et kolmnurga ABD mediaanide DK, BN ja AO lõikepunkt P jaotab iga mediaani suhtes $2:1$, saame $S_{PBQD} = 2 \cdot S_{PBD} = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABCD}$.

3. *Vastus:* 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

   Olgu otsitav arv $\overline{xy} = 10x + y$, siis ülesande tingimuse kohaselt $\overline{xy} + \overline{yx} = 10 \cdot (x + y) + x + y = n^2$, kus n on mingi naturaalarv, s.t. $n^2 = 11 \cdot (x + y)$. Et 11 on algarv ja $x + y \leqslant 18$, saame täisruudu ainult juhul, kui $x + y = 11$.



Joonis 3



Joonis 4

4. Joonestame ringjoone diameetriga AM, siis P ja Q on vastavalt selle ringjoone lõikepunktid kolmnurga külgedega AB ja AC (vt. joonist 4). Seega $\angle MAQ = \angle MPQ$ kui samale kõõlule MQ toetuvad piirdenurgad ja $\angle MPQ = \angle PAK$, sest nende nurkade haarad MP ja PA ning PQ ja AK on vastavalt risti.

5. *Vastus:* $x = 0$ või $x = 2$.

   Antud võrrandit teisendades saame

   $$x^2 \cdot (x^{998} - 2^{500} \cdot x^{499} + 2^{998}) = 0 ,$$

   kust $x = 0$ või $x^{998} - 2^{500} \cdot x^{499} + 2^{998} = 0$. Vaadeldes viimast võrrandit ruutvõrrandina $y = x^{499}$ suhtes, leiame $y = 2^{499}$ ja $x = 2$.

6. Olgu poiste arv m, tüdrukute arv n ja erinevate tantsupaaride arv p, siis vastavalt ülesande tingimustele $2m = p = 2n$, kust $m = n$.

X klass

1. *Vastus:* -3, -2, -1, 1.

   Kui $n = -3$, siis $n + 3 = 0$ ja $n^2 + n - 1 = 5 \neq 0$, seega $(n^2 + n - 1)^{n+3} = 5^0 = 1$. Olgu nüüd $n \neq -3$, siis $n^2 + n - 1 = 1$ või $n^2 + n - 1 = -1$, kusjuures viimasel juhul peab $n + 3$ olema paarisarv. Esimesest võrrandist leiame $n = 1$ või $n = -2$, teisest $n = 0$ (ei sobi) või $n = -1$.

2. *Vastus:* $\dfrac{a}{r} = 2 + 2\sqrt{3}$.

   Olgu ühe ringjoone keskpunkt O, selle ristprojektsioon antud ringjoont puutuvale kolmnurga küljele P, selle külje keskpunkt K ja punktile O lähim kolmnurga tipp M (vt. joonist 5). Siis $\angle OMP = 30^\circ$ ja

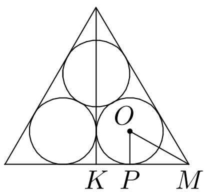
$$\frac{a}{2} = |KM| = |KP| + |PM| = r + \frac{r}{\tan 30^\circ} = r(1 + \sqrt{3}) \,.$$

3. *Vastus:* ei ole võimalik.

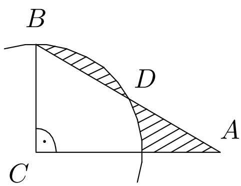
   Et $x_{1,2} = \dfrac{1}{2} \cdot (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$, siis

$$(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q \equiv p^2 \pmod 4 \,.$$

   Mistahes täisarvu ruut annab neljaga jagamisel jäägi 0 või 1, arv 1995 aga jäägi 3.



Joonis 5



Joonis 6

4. *Vastus:* $\dfrac{\pi}{12}$.

   Olgu D kolmnurga külje AB ja ringjoone lõikepunkt (vt. joonist 6). Siis $|DC| = |BC| = 1$ ja $\angle CBD = 60^\circ$, seega kolmnurk BCD on võrdkülgne ja $\angle DCA = 30^\circ$. Viirutatud kujundi pindala S saame arvutada järgmiselt:

$$\begin{aligned} S &= \left(S_{ABC} - S_{BCD} - \frac{\pi}{12}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - S_{BCD}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{12} \,. \end{aligned}$$

5. *Vastus:* $x = \pm 1$, $y = 0$ või $x = y = \pm \sqrt[1994]{\frac{1}{2}}$.

   Korrutades teise võrrandi läbi muutujaga x ja lahutades tulemuse esimesest võrrandist, saame $y^{1994} \cdot (y - x) = 0$. Seega kas $y = 0$, $x = \pm 1$ või $y = x$, kust $2 \cdot x^{1994} = 1$ ja $x = \pm \sqrt[1994]{\frac{1}{2}}$.

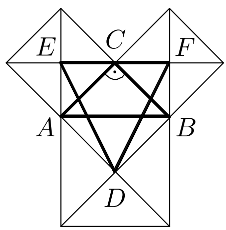
6. Olgu poiste arv m, tüdrukute arv n ja erinevate tantsupaaride arv p, siis vastavalt ülesande tingimustele $p \geqslant m \cdot \frac{n}{2}$ ja $p \leqslant n \cdot \frac{m}{2}$. Seega $p = \frac{m \cdot n}{2}$, s.t. tegelikult tantsis iga poiss täpselt pooltega tüdrukutest ja iga tüdruk täpselt pooltega poistest. Järelikult pidi nii poisse kui ka tüdrukuid olema paarisarv.

XI klass

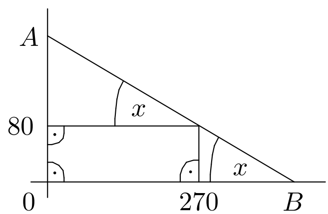
1. Et nelinurk $ACBD$ on ilmselt ruut ja nelinurk $AEFB$ ristkülik (vt. joonist 7), siis $|EF| = |AB| = |CD|$ ning seega $S_{DEF} = \frac{1}{2} \cdot |AB|^2 = |AC|^2$.

2. *Vastus:* 3.

   Arvu 17 kahekohalised kordsed on 17, 34, 51, 68 ja 85 ning arvul 23 vastavalt 23, 46, 69 ja 92. Näeme, et kõik need arvud lõpevad erinevate numbritega. Seetõttu peavad antud 1995-kohalise arvu numbrid (tagant ettepoole) olema 5, 8, 6, 4, 3, 2, 9, 6, 4, ... Arvu esimeseks, s.t. lõpust lugedes 1995-ndaks numbriks saame 3.



Joonis 7



Joonis 8

3. *Vastus:* $130 \cdot \sqrt{13}\,\mathrm{m}$.

Olgu A ja B koerte jooksuraja otspunktid ning x nurk, mille see rada moodustab esimese pargiteega (vt. joonist 8). Siis $|AB| = \dfrac{270}{\cos x} + \dfrac{80}{\sin x}$. Leiame funktsiooni $f(x) = \dfrac{270}{\cos x} + \dfrac{80}{\sin x}$ tuletise:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x \cdot \frac{-270}{\cos^2 x} + \cos x \cdot \frac{-80}{\sin^2 x} = \\
&= \frac{270 \cos x}{\sin^2 x} \cdot \left(\tan^3 x - \frac{8}{27}\right) .
\end{aligned}
$$

Kui $f'(x) = 0$ ja $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, siis $\tan x = \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$. Et nurga x suuruse lähenedes väärtustele 0 ja $\dfrac{\pi}{2}$ lõigu AB pikkus piiramatult kasvab, on leitud x väärtus funktsiooni $f(x)$ miinimumkoht. Nüüd leiame $\cos^2 x = \dfrac{1}{\tan^2 x + 1} = \dfrac{9}{13}$ ja $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \dfrac{4}{13}$. Koerte jooksuraja minimaalne pikkus on seega $270 \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{3} + 80 \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{2} = 130 \cdot \sqrt{13}$ meetrit.

4. *Vastus:* ringjoonel $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

Olgu mingi lõigu otspunkti koordinaadid (x, y) ja sama lõigu keskpunkti koordinaadid (X, Y), siis $X = \dfrac{x-2}{2}$ ja $Y = \dfrac{y}{2}$, kust $x = 2(X+1)$ ja $y = 2Y$. Asendades need võrrandisse $x^2 + y^2 = 16$, saame $4(X+1)^2 + 4Y^2 = 16$ ehk $(X+1)^2 + Y^2 = 4$. See võrrand esitab ringjoone keskpunktiga $(-1, 0)$ ja raadiusega 2.

5. *Vastus:* $2n + 4$.

Olgu antud aritmeetilise jada vahe d ja tähistagu S_k selle esimese k liikme summat. Siis vastavalt ülesande tingimustele $S_{2n} = S_{3n} - S_{2n}$, s.t. $S_{3n} = 2 \cdot S_{2n}$ ehk

$$
3n \cdot \frac{2 + (3n-1)d}{2} = 4n \cdot \frac{2 + (2n-1)d}{2} .
$$

Siit saame $6 + (9n - 3)d = 8 + (8n - 4)d$ ja $d = \dfrac{2}{n+1}$. Nüüd leiame $S_{n+2} = (n+2) \cdot \dfrac{2 + (n+1)d}{2} = 2n + 4$.

6. *Vastus:* 44.

   Ilmselt jäävad lahti need ja ainult need uksed, mille asendit muudetakse paaritu arv kordi. Iga ust avab või sulgeb aga nii mitu valvurit, kui palju on selle ukse järjekorranumbril naturaalarvulisi tegureid. Jääb üle tähele panna, et paaritu tegurite arvuga on parajasti täisruudud ning $44^2 < 1995$ ja $45^2 > 1995$.

XII klass

1. *Vastus:* $X\left(\frac{5}{6}, 1\right)$.

   Kuuli liikumise trajektooriks on kinnine murdjoon $PXYZP$ (vt. joonist 9). Et $\angle AXP = \angle BXY$, $\angle BYX = \angle CYZ$ ja $\angle CZY = \angle OZP$, siis on nelinurk $PXYZ$ rööpkülik. Kolmnurkade POZ ja YBX võrdsusest saame $|BY| = |PO| = \dfrac{1}{3}$ ning kolmnurkade PAX ja YBX sarnasusest $\dfrac{|AX|}{|AP|} = \dfrac{|BX|}{|BY|}$, kust

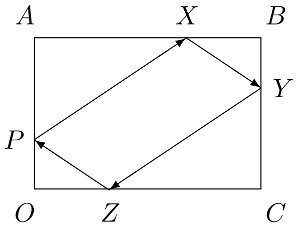
$$|AX| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{5}{4} - |AX|}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{2} - 2 \cdot |AX| \,.$$

   Seega $|AX| = \dfrac{5}{6}$ ja otsitav punkt on $X\left(\frac{5}{6}, 1\right)$.

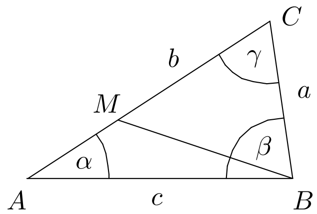
2. Teisendades võrrandit, saame $(x-2)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 = 0$. Siin mõlemad liidetavad on mittenegatiivsed ning saavad võrdseks nulliga erinevate x väärtuste korral.

3. *Vastus:* 145.

   Et $7! > 1000$, siis peab olema $a, b, c \leqslant 6$ ja $\overline{abc} < 700$. Kuna $6! = 720$, siis koguni $a, b, c \leqslant 5$ Teiselt poolt peab vähemalt üks neist numbritest olema 5, sest $4!+4!+4! < 100$. Paneme nüüd tähele, et $a \leqslant 3$ (sest $5!+5!+5! < 400$), $a \neq 3$ (sest $3!+5!+5! < 300$) ja $a \neq 2$ (sest $2!+5!+5! \neq 255$ ja $2!+4!+5! < 200$). Seega saab a olla ainult 1. Arvutades nüüd $1!+1!+5! = 127$, $1!+2!+5! = 128$, $1!+3!+5! = 132$, $1!+4!+5! = 145$ ja $1!+5!+5! = 251$, saame ainsaks ülesande tingimust rahuldavaks arvuks 145.



Joonis 9



Joonis 10

4. Asugu nurgad α, β, γ vastavalt kolmnurga tippude A, B, C juures (vt. joonist 10). Kuna ilmselt $\beta > \gamma$, siis leidub punkt M kolmnurga küljel AC, mille korral $\angle MBC = \gamma$, s.t. $|BM| = |MC|$ ja $\angle ABM = \dfrac{\alpha}{2}$. Rakendades siinusteoreemi kolmnurgas ABM, saame

$$\frac{c}{\sin\left(\pi - \dfrac{3\alpha}{2}\right)} = \frac{|BM|}{\sin\alpha} = \frac{b - |BM|}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

kust

$$|BM| = \frac{c\sin\alpha}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$$

ja

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sin\alpha} = \frac{\sin\left(2\cdot\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\left(1 + 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1}{1 + 2\cos\dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2} - 1.$$

Niisiis $\left(\frac{c}{b}+1\right)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2 + 2\cos\alpha$. Teisalt, koosinusteoreemist kolmnurgas ABC saame $c^2 + b^2 = a^2 + 2\,bc\cos\alpha$. Seega

$$\left(\frac{c}{b}+1\right)^2 - 2 = 2\cos\alpha = \frac{c^2+b^2-a^2}{bc}$$

ehk $c\,(c+b)^2 - 2cb^2 = b\,(c^2+b^2-a^2)$, kust

$$a^2 b = (b-c)(c^2+b^2+2bc) = (b+c)(b^2-c^2)\ .$$

5. *Vastus:* $\left(\frac{A}{B}\right)^{n/2}$.

   Olgu jada tegur q, siis $A = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ ja

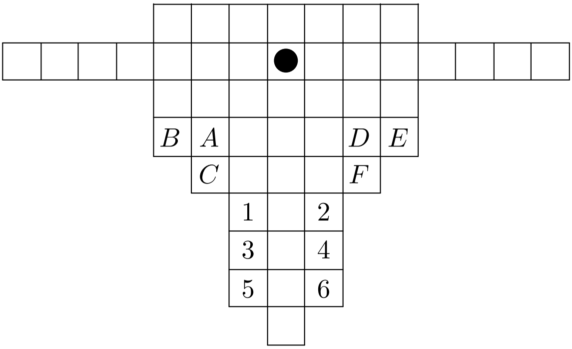
$$B = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\frac{1}{q^n}-1}{\frac{1}{q}-1} = \frac{1}{a_1 \cdot q^{n-1}} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{A}{a_1 \cdot a_n}\ .$$

   Et mistahes $k = 1, 2, \ldots, n$ korral $a_1 \cdot a_n = a_k \cdot a_{n-k+1}$, saame $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = (a_1 \cdot a_n)^{n/2} = \left(\frac{A}{B}\right)^{n/2}$.

6. Olgu ruudud märgitud nii, et:
   (a) mistahes 12 ruudust koosnev ristkülik sisaldab vähemalt ühe märgitud ruudu;
   (b) mistahes 8 ruudust koosnev ristkülik sisaldab ülimalt ühe märgitud ruudu.

   Vaatleme mingi märgitud ruudu ümbrust (vt. joonist 11). Tingimuse (b) kohaselt on kõik joonisel tühjadena näidatud ruudud märkimata, tingimuse (a) tõttu aga on siis igast ruutude paarist A ja B, A ja C, D ja E, D ja F vähemalt üks ruut märgitud. Et igas kolmest ruudust koosnevas "nurgas" võib vastavalt tingimusele (b) olla märgitud ainult üks ruut, siis on märgitud ruudud

A ja D. Nüüd saame tingimusest (b), et ruudud 1, 2, 3 ja 4 on märkimata, ning tingimusest (a), et ruudud 5 ja 6 on märgitud — see on aga vastuolus tingimusega (b). Saadud vastuolu näitab, et tingimuse (a) täidetuse korral tingimus (b) täidetud olla ei saa, mida oligi tarvis tõestada.



Joonis 11