XLI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

15 января 1994 г.

IX класс

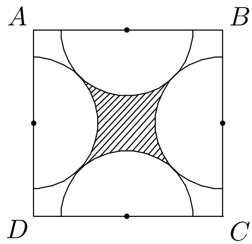
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти коэффициент a_{50} в тождестве

$$(1+x+\ldots+x^{100})(1+x+\ldots+x^{25}) = 1+a_1x+\ldots+a_{125}x^{125}\,.$$

2. Найти все пары чисел (x, y), при которых числа xy, $\dfrac{x}{y}$ и $x-y$ равны.

3. Четырехугольник $ABCD$ является квадратом. Найти площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если радиусы полуокружностей равны единице.



4. Участвующим в шахматном турнире 18 шахматистам присвоили различные номера от 1 до 18. Когда по жребию определили пары для первого тура, сумма номеров в каждой паре оказалась полным квадратом. Какой номер имел соперник шахматиста с номером 1?

5. Доказать, что круги, диаметрами которых являются стороны выпуклого четырехугольника, полностью покрывают этот четырехугольник.

XLI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

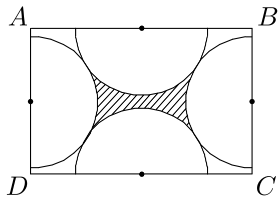
МАТЕМАТИКА II ТУР

15 января 1994 г.

X класс

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Длины двух сторон прямоугольника $ABCD$ соотносятся как $3:2$. Найти площадь заштрихованной на рисунке фигуры, если радиусы полуокружностей равны единице.



2. Найти наибольшее натуральное число n, при котором число $\underbrace{999\ldots99}_{999\text{ цифр}}$ делится на 9^n.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Доказать, что центры окружностей, описанных около треугольников APB, BPC, CPD и DPA, являются вершинами некоторого параллелограмма.

4. Найти все решения уравнения $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{10}$ в натуральных числах.

5. В квадратной таблице из 9×9 клеток некоторые клетки раскрашивают в черный цвет, а все остальные — в белый. Какое наименьшее число клеток нужно покрасить в черный цвет, чтобы из любых четырех клеток, расположенных рядом по горизонтали или вертикали, хотя бы одна была черной?

XLI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

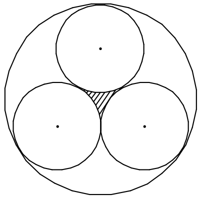
МАТЕМАТИКА II ТУР

15 января 1994 г.

XI класс (не выпускники)

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти площадь заштрихованной на рисунке фигуры и радиус большой окружности, если радиусы малых окружностей равны единице.



2. Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt{n}$ не является рациональным ни при каком натуральном n.

3. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен одной третьей одной из его высот.

4. Доказать, что $|\sin x| > |\cos y|$ тогда и только тогда, когда $|\sin y| > |\cos x|$.

5. Каждую неделю по письмам слушателей выбирают 20 популярнейших песен. Известно, что
   1) никогда не выбирают те же песни в том же порядке две недели подряд;
   2) песня, однажды опустившаяся в выборке, в дальнейшем уже не поднимается.

   Максимально как долго могут продержаться в выборке одни и те же 20 песен?

XLI Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

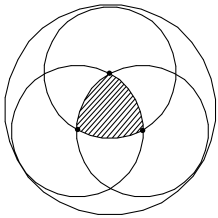
МАТЕМАТИКА II ТУР

15 января 1994 г.

XI, XII класс (выпускники)

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти площадь заштрихованной на рисунке фигуры и радиус большой окружности, если радиусы малых окружностей равны единице.



2. Определить все натуральные числа n, при которых число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ делится на 5.

3. На диаметре AB полуокружности выбирают точку C, а на полуокружности соответственно этой точке выбирают точки P и Q так, чтобы $\angle ACP = \angle BCQ = \beta$. Доказать, что при заданном угле β длина отрезка PQ не зависит от выбора точки C.

4. Найти все значения параметра m, при которых уравнение

$$x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$$

имеет четыре вещественных решения, образующих арифметическую прогрессию.

5. Каждую неделю по письмам слушателей выбирают 20 популярнейших песен. Известно, что
   1) никогда не выбирают те же песни в том же порядке две недели подряд;
   2) песня, однажды опустившаяся в выборке, в дальнейшем уже не поднимается.

   Максимально как долго могут продержаться в выборке одни и те же 20 песен?