

Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

15. jaanuar 1994. a.

IX klass

Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektset vormistatud lahendus annab 7 punkti.

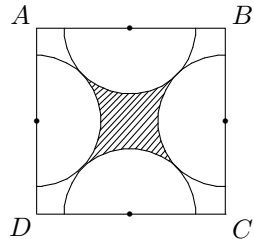
Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Leia kordaja a_{50} samasuses

$$(1+x+\dots+x^{100})(1+x+\dots+x^{25}) = 1+a_1x+\dots+a_{125}x^{125}.$$

2. Leia kõik arvupaarid (x, y) , mille korral arvud xy , $\frac{x}{y}$ ja $x-y$ on võrdsed.

3. Nelinurk $ABCD$ on ruut. Leia joonisel viirutatud kujundi pindala, kui poolringjoonte raadiused on võrdsed ühega.



4. Maleturniiril osalevale 18 maletajale anti erinevad numbrid 1 kuni 18. Kui mängijad esimeseks vooruks paaridesse loositi, ilmnas, et iga paari numbrite summa on täisruut. Millise numbriga oli maletaja nr.1 vastane?
5. Tõesta, et ringid, mille diameetriteks on kumera nelinurga küljed, katavad täielikult selle nelinurga.

Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

15. jaanuar 1994. a.

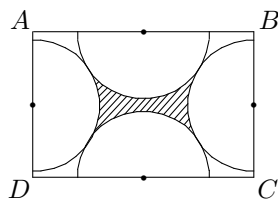
X klass

Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Ristküliku $ABCD$ kahe külje pikku-
sed suhtuvad nagu 3 : 2. Leia joo-
nisel viirutatud kujundi pindala, kui
poolringjoonte raadiused on võrdsed
ühega.



2. Leia suurim naturaalarv n , mille korral arv $\underbrace{999\dots99}_{999 \text{ numbrit}}$ jagub ar-
vuga 9^n .
3. Kumera nelinurga $ABCD$ diagonaalid lõikuvad punktis P . Tões-
ta, et kolmnurkade APB , BPC , CPD ja DPA ümberringjoonte
keskpunktid on mingi rööpküliku tippudeks.
4. Leia võrrandi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$ kõik naturaalarvulised lahendid.
5. 9×9 ruudustikus värvitakse mõned ruudud mustaks ja kõik üle-
jäänud valgeks. Milline vähim arv ruute tuleb mustaks värvida, et
mistahes neljast horisontaalselt või vertikaalselt kõrvuti paiknevast
ruudust vähemalt üks oleks must?

Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

15. jaanuar 1994. a.

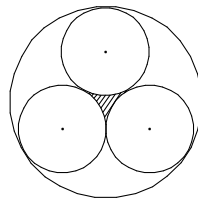
XI klass

Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Leia joonisel viirutatud kujundi pindala ja suure ringjoone raadius, kui väikeste ringjoonte raadiused on võrdsed ühega.



2. Tõesta, et $\sqrt{2} + \sqrt{n}$ ei ole ratsionaalarv ühegi naturaalarvu n korral.
3. Kolmnurga külgede pikkused moodustavad aritmeetilise jada. Tõesta, et selle kolmnurga siseringjoone raadius on võrdne ühe kolmandikuga mingile küljele tõmmatud kõrgusest.
4. Tõesta, et $|\sin x| > |\cos y|$ siis ja ainult siis, kui $|\sin y| > |\cos x|$.
5. Igal nädalal valitakse muusikaedetabelisse “Top Twenty” 20 laulu. On teada, et
- 1) kunagi ei valita samu laule samas järjekorras kahel nädalal järjest;
 - 2) laul, mis on edetabelis kord juba allapoole langenud, edaspidi enam ei tõuse.

Kui kaua võivad ühed ja samad 20 laulu maksimaalselt edetabelis püsida?

Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

15. jaanuar 1994. a.

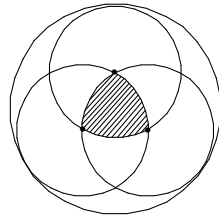
XII klass

Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Leia joonisel viirutatud kujundi pindala ja suure ringjoone raadius, kui väikeste ringjoonte raadiused on võrdsed ühega.



2. Leia kõik naturaalarvud n , mille korral arv $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ jagub arvuga 5.
3. Poolringjoone diameetril AB võetakse punkt C ning poolringjoonel sellele vastavalt punktid P ja Q , nii et $\angle ACP = \angle BCQ = \beta$. Tõesta, et etteantud nurga β korral ei sõltu lõigu PQ pikkus punkti C valikust.
4. Leia parameetri m kõik väärtused, mille korral võrrandil

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

on neli reaalarvulist lahendit, mis moodustavad aritmeetilise jada.

5. Igal nädalal valitakse muusikaedetabelisse "Top Twenty" 20 laulu. On teada, et:
 - 1) kunagi ei valita samu laule samas järjekorras kahel nädalal järjest;
 - 2) laul, mis on edetabelis kord juba allapoole langenud, edaspidi enam ei tõuse.

Kui kaua võivad ühed ja samad 20 laulu maksimaalselt edetabelis püsida?