Eesti koolinoorte XLI täppisteaduste olümpiaad

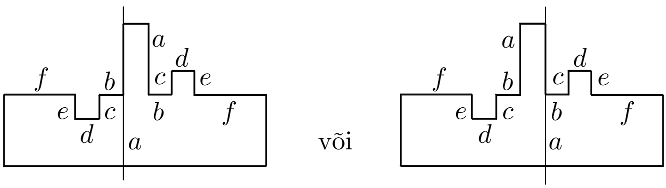
MATEMAATIKA II VOOR

15. jaanuar 1994. a.

Lahendused ja vastused

VII klass, I osa.

1. -5. 2. 13-kohaline. 3. $m = 12$, $n = 2$. 4. 86. 5. 2^{16}. 6. $A = -3$, $B = -2$, $C = 0$, $D = 1$, $E = |-3|$, $F = 4$. 7. $60°$. 8. vt . joonist 1. 9. $65°$. 10. $28\,\mathrm{cm}^2$.



Joonis 1

VII klass, II osa.

1. *Vastus:* poistel oli enne mängu kokku rohkem raha.

   Olgu 100% see rahasumma, mis oli Jaanil enne mängu. Siis Jaanil oli pärast mängu 120%, Jüril enne mängu 125% ja pärast mängu $80\% \cdot 120\% = 100\%$ sellest summast. Poistel kokku oli enne mängu 225% ja pärast mängu 220% samast summast.

2. *Vastus:* 555555559999999995.

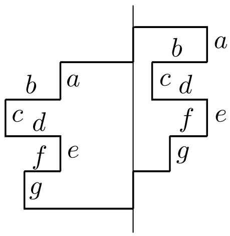
   Otsitav arv peab lõppema numbriga 5 ja tema ristsumma peab jaguma arvuga 9. Seega peab selles arvus olema vähemalt üheksa numbrit 5 ja samapalju numbreid 9. Vähima niisuguse arvu saame, kui võtame kumbagi numbrit täpselt üheksa ning paigutame kõik numbrid 5 peale ühe arvus esimestele kohtadele.

3. *Vastus:* teisel risttahukal on suurem ruumala.

Risttahuka ruumala ruut on võrdne tema kolme naabertahu pindalade korrutisega. Et $126 \cdot 90 \cdot 315 = 3572100$ ning $160 \cdot 96 \cdot 240 = 3686400$, siis on teise risttahuka ruumala suurem.

VIII klass, I osa.

1. 4 nulliga. 2. $\dfrac{2x-y}{2x+y}$. 3. 0. 4. 67. 5. 64. 6. Punkt E on punktist D 6 ühikut paremal. 7. $AB = b$. 8. $110°$. 9. vt. joonist 2. 10. Kolmel kuubil värviti täpselt neli tahku.

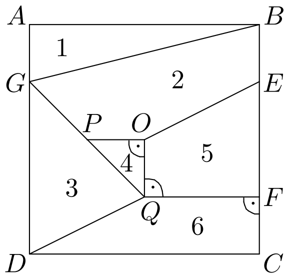


Joonis 2

VIII klass, II osa.

1. *Vastus:* 8, 18, 12, 2, 12 ja 12 m^2.

Tähistame otsitavad pindalad $S_1, S_2, \ldots, S_6$ (vt. joonist 3). Et $AG = FC = OQ = OP = 2\,\mathrm{m}$, $FQ = EF = 4\,\mathrm{m}$ ja $GD = 6\,\mathrm{m}$, siis $S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 2 = 8\,\mathrm{m}^2$, $S_3 = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4 = 12\,\mathrm{m}^2$, $S_4 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2\,\mathrm{m}^2$, $S_5 = S_6 = \dfrac{3}{2}\cdot 4\cdot 2 = 12\,\mathrm{m}^2$ ja $S_2 = 64 - 8 - 2 - 3\cdot 12 = 18\,\mathrm{m}^2$.



Joonis 3

2. *Vastus:* -2, 0 ja 2.

   Kui $\dfrac{n^2-4}{n^2-1} = 1 - \dfrac{3}{n^2-1}$ on täisarv, siis peab n^2-1 olema kas ±1 või ±3. Siit leiame n võimalikud väärtused (võrranditel $n^2-1=1$ ja $n^2-1=-3$ täisarvulised lahendid puuduvad).

3. *Vastus:* 8.

   Kui mingi külaline ei saa valida kooki ja taldrikut nii, et kook mahuks taldrikule, on kõik järelejäänud koogid suuremad kui suurim järelejäänud taldrik. Seega ei saa järelejäänud kooke ja taldrikuid kokku olla rohkem kui 16. Niisiis pidid enne seda oma koogi ja taldriku valima vähemalt 8 külalist. Teiselt poolt, kui esimesed 8 külalist valivad kaheksa väiksemat kooki ja kaheksa suuremat taldrikut, ei ole üheksandal külalisel enam võimalik leida kooki, mis mahuks mõnele allesjäänud taldrikutest.

IX klass.

1. *Vastus:* 26.

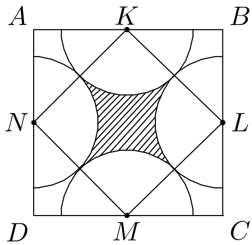
   Liidetava x^{50} saame korrutistest $x^{50}\cdot 1$, $x^{49}\cdot x$, $\ldots$, $x^{25}\cdot x^{25}$.

2. *Vastus:* $x = -\dfrac{1}{2}$, $y=-1$.

   Võrdusest $xy = \dfrac{x}{y}$ saame $y=\pm1$, sest $x=0$ annaks $y=0$, mis pole võimalik. Kui $y = 1$, siis $x - 1 = x \cdot 1$, vastuolu. Kui $y = -1$, siis $x + 1 = x \cdot (-1)$, kust $x = -\frac{1}{2}$.

3. *Vastus:* $4 - \pi$.

   Nelinurk $KLMN$ on ruut küljepikkusega 2, mis koosneb viirutatud kujundist ja neljast sektorist, igaüks pindalaga $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2$ (vt. joonist 4).



Joonis 4

4. *Vastus:* 15.

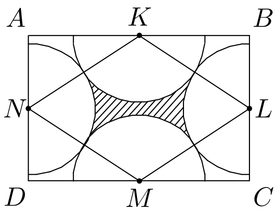
   Iga paari numbrite summa on kas 4, 9, 16 või 25. Seetõttu peab number 18 olema paaris numbriga 7, number 17 numbriga 8, number 16 numbriga 9, number 2 numbriga 14. Number 1 paariline võiks olla kas 3 või 15. Kui number 1 oleks paaris numbriga 3, siis peaks paaris olema numbrid 15 ja 10, 13 ja 12, 4 ja 5. Järele jäävad numbrid 6 ja 11, mille summa pole täisruut. Kui number 1 on paaris numbriga 15, on ülejäänud paarid 3 ja 13, 6 ja 10, 5 ja 11, 4 ja 12.

5. Kui kumera nelinurga $ABCD$ sees leiduks punkt P, mis pole kaetud ühegagi selle nelinurga külgedele kui diameetritele konstrueeritud ringidest, siis peaksid nurgad $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPD$, $\angle DPA$ olema kõik väiksemad kui 90°. Nende nurkade summa on aga 360°.

X klass.

1. *Vastus:* $\dfrac{144}{39} - \pi$.

   Nelinurk $KLMN$ on romb küljepikkusega 2 ja diagonaalide pikkuste suhtega $3:2$. Olgu selle rombi pikema diagonaali pikkus x, siis $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{3}\right)^2 = 4$, kust $x^2 = \dfrac{144}{13}$ ja rombi $KLMN$ pindala on $S = \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{144}{39}$. Romb $KLMN$ koosneb viirutatud kujundist ja neljast sektorist, mis kokku pannes moodustavad ringi pindalaga $\pi \cdot 1^2 = \pi$.



Joonis 5

2. *Vastus:* 2.

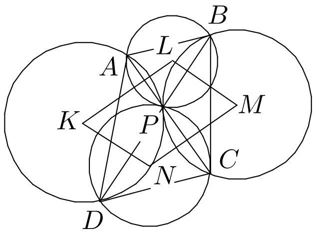
   Lahutame arvu $\underbrace{999\ldots99}_{999 \text{ numbrit}} = 10^{999} - 1$ tegureiks:

$$\begin{aligned} 10^{999} - 1 &= (10^{333} - 1)(10^{666} + 10^{333} + 1) = \\ &= (10^{111} - 1)(10^{222} + 10^{111} + 1)(10^{666} + 10^{333} + 1). \end{aligned}$$

   Esimene tegur jagub üheksaga, jagatise ristsumma on 111. Teise ja kolmanda teguri ristsumma on 3. Seega jagub antud arv arvu 9 ruuduga, aga ei jagu selle kuubiga.

3. Kolmnurga ümberringjoone keskpunkt on tema külgede keskristsirgete lõikepunkt. Seepärast on nelinurga $KLMN$ küljed KL ja MN (kui lõigud, mis asuvad vastavalt lõikude AP ja PC keskristsirgetel) mõlemad risti nelinurga $ABCD$ diagonaaliga AC ning

küljed LM ja NK on samal põhjusel risti nelinurga $ABCD$ diagonaaliga BD (vt. joonist 6).

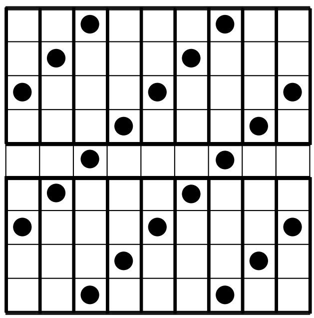


Joonis 6

4. *Vastus:* $(11;110)$, $(12;60)$, $(14;35)$, $(15;30)$, $(20;20)$, $(30;15)$, $(35;14)$, $(60;12)$ ja $(110;11)$.

Et liidetavad $\frac{1}{x}$ ja $\frac{1}{y}$ on mõlemad positiivsed, siis $x, y > 10$. Asendades $x = 10 + a$, $y = 10 + b$, saame esialgsega samaväärsed võrdused $(10 + a)(10 + b) = 10 \cdot (20 + a + b)$ ning $ab = 100$, kus $a, b > 0$. Lahutades arvu 100 teguriteks, leiame ülaltoodud 9 lahendit.

5. *Vastus:* 20.



Joonis 7

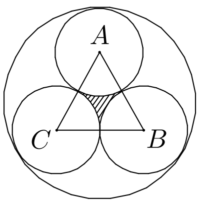
Et igas joonisel 7 jämedama joonega piiratud vertikaalses 4×1

ribas peab vähemalt üks ruut olema must ja keskmises 1×9 horisontaalribas peavad vähemalt kaks ruutu olema mustad, on vaja mustaks värvida vähemalt 20 ruutu. Nagu selgub joonisel esitatud näitest (kus mustaks värvitavad ruudud on märgitud täpiga), on see arv ka piisav.

XI klass.

1. *Vastus:* $S = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}$, $R = 1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

   Võrdkülgse kolmnurga ABC küljepikkus on 2 ja pindala $\sqrt{3}$; see kolmnurk koosneb viirutatud kujundist ja kolmest võrdsest sektorist, igaüks pindalaga $\dfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2$ (vt. joonist 8). Suure ringjoone keskpunkt on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunktis ning tema raadius seega $1 + \dfrac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$.



Joonis 8

2. Kui $\sqrt{2} + \sqrt{n}$ oleks ratsionaalarv, siis peaksid olema ratsionaalarvud ka $\dfrac{2-n}{\sqrt{2}+\sqrt{n}} = \sqrt{2} - \sqrt{n}$ ja $\dfrac{1}{2}\big((\sqrt{2}+\sqrt{n}) + (\sqrt{2}-\sqrt{n})\big) = \sqrt{2}$.

3. Olgu kolmnurga küljed $a-d$, a ja $a+d$, siseringjoone raadius r ja pool ümbermõõtu p, siis selle kolmnurga pindala on

$$S = pr = \frac{1}{2}\big((a-d) + a + (a+d)\big)r = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot a\,.$$

   Seega $r = \dfrac{1}{3}h$, kus h on küljele pikkusega a tõmmatud kõrgus.

4. Kui mingite arvude x ja y korral oleks $|\sin x| > |\cos y|$ ja $|\sin y| \leqslant |\cos x|$, siis oleks $\sin^2 x > \cos^2 y$, $\cos^2 x \geqslant \sin^2 y$ ning $1 = \sin^2 x + \cos^2 x > \cos^2 y + \sin^2 y = 1$, mis ei ole võimalik. Täpselt samuti jõuame vastuoluni juhul, kui $|\sin x| \leqslant |\cos y|$ ja $|\sin y| > |\cos x|$.

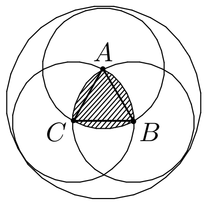
5. *Vastus:* 191 nädalat.

   Kui kahel järjestikusel nädalal on edetabelis samad 20 laulu, siis peab vähemalt üks neist olema teisel nädalal järjestuses langenud, ja see laul ei saa enam endisele kohale tagasi tõusta. Seepärast võivad samad laulud püsida edetabelis igal juhul mitte kauem kui 20! nädalat. Vaatleme laulude järjekorda viimasel nädalal, mil kõik need 20 laulu edetabelis on. Laul, mis siis on 20. kohal, võib olla tahapoole langenud ülimalt 19 korda, laul, mis on 19. kohal — ülimalt 18 korda, ..., teisel kohal olev laul ülimalt ühe korra. Et $1 + 2 + \ldots + 19 = 190$ ja igal nädalal alates teisest pidi vähemalt üks laul järjestuses tahapoole langema, ei saa samad laulud tabelis püsida kauem kui 191 nädalat. See maksimum on saavutatav, kui algul langeb esimesel nädalal esikohal olnud laul ühe koha haaval tahapoole, kuni jõuab 20. kohale (teiste laulude omavaheline järjestus ei muutu), seejärel langeb esimese nädala teine laul samuti ühe koha haaval tahapoole, kuni jõuab 19. kohale, jne.

XII klass.

1. *Vastus:* $S = \dfrac{\pi - \sqrt{3}}{2}$, $R = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

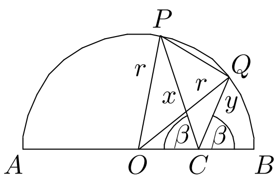
   Viirutatud kujund koosneb kolmest üksteise peale asetatud 60° sektorist, igaüks pindalaga $\dfrac{\pi}{6}$, mille ühine osa on võrdkülgne kolmnurk ABC küljepikkusega 1 ja pindalaga $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (vt. joonist 9). Selle kujundi pindala on niisiis $3 \cdot \dfrac{\pi}{6} - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\pi - \sqrt{3}}{2}$. Suure ringjoone keskpunkt on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunktis ning tema raadius on seega $1 + \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Joonis 9

2. *Vastus:* kõik naturaalarvud, mis ei jagu neljaga.

   Tähistame $f(n) = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$. Et arvud 1^4, 2^4, 3^4 ja 4^4 annavad viiega jagades jäägi 1, siis arvud a^n ja a^{n+4}, kus a on üks arvudest 1, 2, 3, 4 ja n on mistahes naturaalarv, annavad viiega jagades ühe ja sama jäägi. Seetõttu $f(n+4k)$ jagub viiega siis ja ainult siis, kui jagub $f(n)$, ning piisab uurida jaguvust juhtudel $n = 1$, 2, 3 ja 4.



Joonis 10

3. Olgu O poolringjoone keskpunkt ja r selle raadius, $x = PC$ ja $y = QC$ (vt. joonist 10). Siis saame kolmnurgast OPC

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + OC^2 - 2x \cdot OC \cdot \cos\beta = \\ &= (x - OC\cos\beta)^2 + OC^2 \sin^2\beta\ , \end{aligned}$$

   millest $x = \sqrt{r^2 - OC^2 \sin^2\beta} + OC\cos\beta$. Kolmnurgast OQC leiame samal viisil $y = \sqrt{r^2 - OC^2 \sin^2\beta} - OC\cos\beta$. Seega $xy = r^2 - OC^2$ ja $x^2 + y^2 = 2(r^2 + OC^2\cos 2\beta)$. Nüüd saame kolmnurgast PQC

$$PQ^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos 2\beta = 2r^2(1+\cos 2\beta) = 4r^2\cos^2\beta\ .$$

Niisiis $PQ = |2r\cos\beta|$, s.t. ei sõltu tõepoolest punkti C valikust.

4. *Vastus:* $m = 6$ ja $m = -\dfrac{6}{19}$.

Kui a on antud võrrandi vähim positiivne lahend, siis on $-a$ selle võrrandi suurim negatiivne lahend. Kuna nende vahel ei paikne ühtki teist lahendit (arv 0 ei ole lahendiks, vastasel juhul $m = 0$ ja võrrandil oleks ainult kolm erinevat lahendit), siis on aritmeetilise jada vahe $2a$ ning ülejäänud kaks lahendit peavad olema $3a$ ja $-3a$. Seega

$$x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = (x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2)\ ,$$

kust $10a^2 = 3m + 2$ ning $9a^4 = m^2$. Teisest võrdusest saame $m = \pm 3a^2$, millest esimesse võrdusse asendades leiame vastavalt $m = 6$ ja $m = -\dfrac{6}{19}$.

5. Vt. XI klass, ül. 5.