

XL Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

6 февраля 1993 г.

IX класс

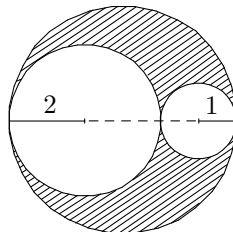
Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 5 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. У матери Кристины имеется круглый стол высотой 65 см и диаметром плиты 1 м. Кристине хочется подарить матери квадратобразную скатерть для этого стола. Она знает желание матери, чтобы края скатерти висели от стола не менее чем на 25 см. Разумеется, при этом углы скатерти не должны касаться пола. В магазине продаются квадратобразные скатерти со стороной 140 см, 150 см, 160 см, 170 см, 180 см и 190 см. Какие из них подходят Кристине?

2. Какая часть самого большого круга имеет бóльшую площадь, заштрихованная или незаштрихованная (см. рисунок)?



3. Доказать, что разность квадратов любых двух нечетных чисел делится на 8.
4. Найти все тройки (a, b, c) попарно различных вещественных чисел, при которых система

$$\begin{cases} ax = b \\ bx = c \\ cx = a \end{cases}$$

имеет решение.

5. В ряд расположены n внешне различных фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, между которыми стоит ровно одна фишка. Можно ли посредством таких перестановок менять порядок фишек на противоположный исходному? Обосновать ответ.

XL Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

6 февраля 1993 г.

X класс

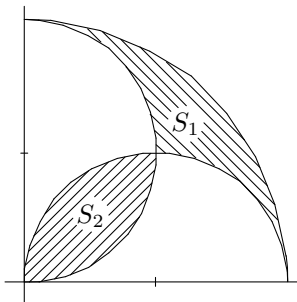
Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 5 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что $101^{100} - 1$ делится на 24.

2. Найти отношение $S_1 : S_2$ площадей фигур, заштрихованных на рисунке.



3. В прямоугольном треугольнике точка касания гипотенузы с вписанной окружностью делит гипотенузу на отрезки длин a и b . Найти площадь треугольника.

4. Найти все вещественные числа x , удовлетворяющие соотношению

$$x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4 - x^2}.$$

5. В ряд расположены n внешне различных фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, между которыми стоит ровно одна фишка. Можно ли посредством таких перестановок менять порядок фишек на противоположный исходному? Обосновать ответ.

XL Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

6 февраля 1993 г.

XI класс (не выпускники)

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 5 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть x, y — положительные числа и $x+y=1$. Доказать, что

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

2. Доказать, что площадь любого прямоугольного треугольника не больше чем одна четвертая от квадрата его гипотенузы. В каком случае площадь треугольника может равняться одной четвертой квадрата гипотенузы?

3. Найти a_{1993} , если $a_1 = 0$ и

$$a_k = \frac{2}{3 - a_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

4. В прямоугольном треугольнике ABC медианы, опущенные на катет AC и на гипотенузу, пересекаются под прямым углом. Найти площадь треугольника ABC , если катет AB имеет длину 1.

5. В ряд расположены n внешне различных фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, между которыми стоит ровно одна фишка. Можно ли посредством таких перестановок менять порядок фишек на противоположный исходному? Обосновать ответ.

XL Олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии

МАТЕМАТИКА II ТУР

6 февраля 1993 г.

XI, XII класс (выпускники)

Время, отводимое для решения: 5 часов.

Верное и корректно оформленное решение каждой задачи дает 5 баллов. Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что площадь любого прямоугольного треугольника не больше чем одна четвертая от квадрата его гипотенузы. В каком случае площадь треугольника может равняться одной четвертой квадрата гипотенузы?
2. Обозначим через $d(n)$ число всех положительных делителей натурального числа n . Найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(n)}{n}$.
3. Прямоугольный треугольник с острым углом α расположен внутри окружности радиуса R так, что гипотенуза треугольника является хордой окружности, а вершина прямого угла треугольника лежит на диаметре окружности, параллельной гипотенузе. Найти площадь этого треугольника.
4. Доказать, что при любом натуральном $k \geq 2$ найдутся попарно различные натуральные числа n_1, n_2, \dots, n_k такие, что

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} = \frac{3}{17}.$$

5. В ряд расположены n внешне различных фишек. Разрешается менять местами любые две фишки, между которыми стоит ровно одна фишка. Можно ли посредством таких перестановок менять порядок фишек на противоположный исходному? Обосновать ответ.