Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

MATEMAATIKA II VOOR

6. veebruar 1993. a.

Lahendused ja vastused

IX klass

1. *Vastus:* 150 cm, 160 cm.

   Olgu laudlina külje pikkus a cm, siis $a \geqslant 100 + 2 \cdot 25$ ning $a\sqrt{2} \leqslant 100 + 2 \cdot 65$.

2. *Vastus:* viirutamata osa pindala on suurem.

   Suure ringi pindala on 9π, väiksematel vastavalt π ja 4π.

3. Olgu n ja m suvalised naturaalarvud, siis

$$(2n+1)^2 - (2m+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4m^2 - 4m - 1 =$$
$$= 4(n^2 - m^2) + 4(n - m) = 4(n - m)(n + m + 1)\ ;$$

   üks arvudest $(n - m)$ ja $(n + m + 1)$ on alati paaris.

4. *Vastus:* selliseid kolmikuid ei leidu.

   Ilmselt $abc \neq 0$. Erinevail viisidel võime jõuda tingimuseni $a + b + c = 0$, mis on tarvilik lahendi x olemasoluks. Seega peab üks arvudest a, b, c ülejäänutest märgi poolest erinema — siis aga on süsteemis võrrand, mille lahend on negatiivne, ja võrrand, mille lahend on positiivne.

5. *Vastus:* on võimalik parajasti siis, kui n on paaritu.

   Lubatud ümberpaigutuste abil saame esialgses järjestuses paaris (paaritutel) kohtadel paiknenud nuppe paigutada ainult paaris (paaritutele) kohtadele, kuid seda mistahes viisil.

X klass

1. Lahutame teguriteks: $101^{100}-1=(101^{50}+1)(101^{50}-1)$; mõlema sulgavaldise väärtused on paarisarvud ja üks neist jagub neljaga. Kolmega jaguvus järeldub sellest, et $101=3\cdot 34-1$.

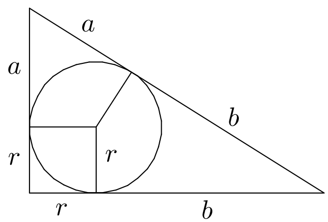
2. *Vastus:* $S_1 : S_2 = 1 : 1$.

   Olgu suurima ringi raadius 1, siis

$$S_1=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+S_2=S_2\,.$$

3. *Vastus:* ab.

   Ülesande tingimustest saame $(r+a)^2+(r+b)^2=(a+b)^2$, kust $r=\dfrac{-a-b+\sqrt{a^2+6ab+b^2}}{2}$ (vt. joonist). Kolmnurga pindala on $S=\dfrac{(r+a)(r+b)}{2}=ab$.



4. *Vastus:* selliseid arve ei leidu.

   Ilmselt $\sqrt{4-x^2}\leqslant 2$ (võrdus kehtib juhul, kui $x=0$), ning $x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqslant 2$ (võrdus kehtib juhul, kui $x=-1$).

5. *Vastus:* on võimalik parajasti siis, kui n on paaritu.

   Lubatud ümberpaigutuste abil saame esialgses järjestuses paaris (paaritutel) kohtadel paiknenud nuppe paigutada ainult paaris (paaritutele) kohtadele, kuid seda mistahes viisil.

XI klass

1. Teisendades saame:

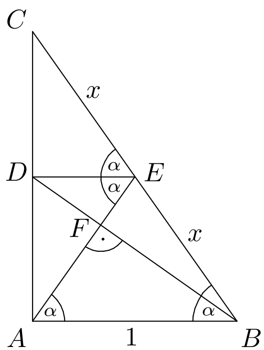
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)-9=\frac{1+x+y-8xy}{xy}=$$

$$=\frac{2-8x(1-x)}{xy}=\frac{2(2x-1)^2}{xy}\geqslant 0\,.$$

2. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on tema ümberringjoone diameetriks, seega ei ületa kolmnurga pindala veerandit selle ringjoone ümber kujundatud ruudu pindalast. Võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui kolmnurk on võrdhaarne.

3. *Vastus:* $\dfrac{2^{1993}-2}{2^{1993}-1}$.

   Kasutades matemaatilist induktsiooni tõestame, et $a_k=\dfrac{2^k-2}{2^k-1}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$.



4. *Vastus:* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Olgu $CE=EB=EA=x$ ja $\angle CED=\angle AED=\angle EAB=\alpha$ (vt. joonist). Siis $\dfrac{FE}{DE}=\cos\alpha=\dfrac{FA}{AB}$, kust $\dfrac{FE}{FA}=\dfrac{1}{2}$ ja

$FE = \dfrac{x}{3}$. Nüüd $\dfrac{DE}{CE} = \cos\alpha = \dfrac{FE}{DE}$, millest $x^2 = \dfrac{3}{4}$ ja $AC = \sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2}$. Seega pindala on $\dfrac{AB \cdot AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. *Vastus:* on võimalik parajasti siis, kui n on paaritu.

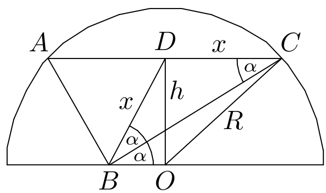
   Lubatud ümberpaigutuste abil saame esialgses järjestuses paaris (paaritutel) kohtadel paiknenud nuppe paigutada ainult paaris (paaritutele) kohtadele, kuid seda mistahes viisil.

XII klass

1. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on tema ümberringjoone diameetriks, seega ei ületa kolmnurga pindala veerandit selle ringjoone ümber kujundatud ruudu pindalast. Võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui kolmnurk on võrdhaarne.

2. *Vastus:* 0.

   Arvu n kõik positiivsed jagajad (peale $\sqrt{n}$, kui $n$õn täisruut) saame jaotada paaridesse nii, et igas paaris üks arv on väiksem kui $\sqrt{n}$. Seega $d(n) < 2\sqrt{n}$ mistahes naturaalarvu n korral.



4. *Vastus:* $\dfrac{R^2 \sin 2\alpha}{1 + \sin^2 2\alpha}$.

   Olgu x kolmnurga ABC ümberringjoone raadius, h hüpotenuusile tõmmatud kõrgus ja D hüpotenuusi keskpunkt (vt. joonist). Siis $BD = CD = x$ ja $OD = h$. Saame võrrandid $\sin 2\alpha = \dfrac{h}{x}$ ja

$x^2 + h^2 = R^2$, millest $x = \dfrac{R}{\sqrt{1+\sin^2 2\alpha}}$ ja $h = \dfrac{R\sin 2\alpha}{\sqrt{1+\sin^2 2\alpha}}$.

Kolmnurga pindala $S = xh = \dfrac{R^2 \sin 2\alpha}{1+\sin^2 2\alpha}$.

4. Kui $k = 2$, siis sobib näiteks $n_1 = 6$, $n_2 = 102$. Edasi saame liidetavate arvu suurendada, lahutades iga kord suurima nimetajaga murru kahe murru summaks:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m(m+1)}\ .$$

Et ilmselt $m+1 > m$ ja $m(m+1) > m$, on niiviisi saadud murdude nimetajad kõik erinevad.

5. *Vastus:* on võimalik parajasti siis, kui n on paaritu.

Lubatud ümberpaigutuste abil saame esialgses järjestuses paaris (paaritutel) kohtadel paiknenud nuppe paigutada ainult paaris (paaritutele) kohtadele, kuid seda mistahes viisil.