

# Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

## MATEMAATIKA II VOOR

6. veebruar 1993. a.

IX klass

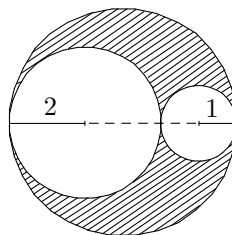
Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 5 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Kristiina emal on 65 cm kõrgune ümmargune laud, mille plaadi läbimõõt on 1 m. Kristiina tahab kinkida emale selle laua jaoks paraja ruudukujulise lina. Ta teab ema soovi, et lina ulatuks vähemalt 25 cm võrra üle laua ääre alla. Seejuures ei tohi aga lina nurgad mõistagi põrandale ulatuda. Poes on müügil ruudukujulised linad küljepikkustega 140 cm, 150 cm, 160 cm, 170 cm, 180 cm ja 190 cm. Millised neist Kristiinale sobivad?

2. Kumb on suurem, kas suurima ringi viirutatud või viirutamata osa pindala (vt. joonist)?



3. Tõesta, et mistahes kahe paaritu arvu ruutude vahe jagub arvuga 8.
4. Leia kõik paarikaupa erinevate reaalarvude kolmikud  $(a, b, c)$ , mille korral süsteemil

$$\begin{cases} ax = b \\ bx = c \\ cx = a \end{cases}$$

on lahend.

5. Reas paiknevad  $n$  väliselt erinevat nuppu. On lubatud vahetada omavahel mistahes kaks sellist nuppu, mille vahel asub täpselt üks nupp. Kas selliste vahetuste abil on võimalik muuta nuppude järjestus esialgsega võrreldes vastupidiseks? Põhjenda vastust.

# Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

## MATEMAATIKA II VOOR

6. veebruar 1993. a.

X klass

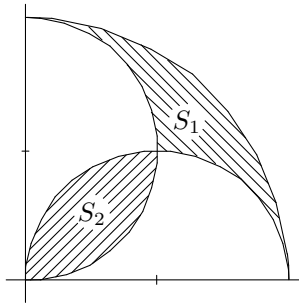
Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 5 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Tõesta, et  $101^{100} - 1$  jagub arvuga 24.

2. Leia joonisel viirutatud kujundite pindalade suhe  $S_1 : S_2$ .



3. Täisnurkse kolmnurga siseringjoone ja hüpotenuusi puutepunkt jaotab hüpotenuusi lõikudeks pikkustega  $a$  ja  $b$ . Leia selle kolmnurga pindala.

4. Leia kõik reaalarvud  $x$ , mille korral

$$x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4 - x^2}.$$

5. Reas paiknevad  $n$  väliselt erinevat nuppu. On lubatud vahetada omavahel mistahes kaks sellist nuppu, mille vahel asub täpselt üks nupp. Kas selliste vahetuste abil on võimalik muuta nuppude järjestus esialgsega võrreldes vastupidiseks? Põhjenda vastust.

# Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

## MATEMAATIKA II VOOR

6. veebruar 1993. a.

XI klass

Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 5 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Olgu  $x, y$  positiivsed arvud ja  $x + y = 1$ . Tõesta, et

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

2. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga pindala ei ole suurem kui üks neljandik hüpotenuusi ruudust. Millisel juhul võib pindala võrduda ühe neljandikuga hüpotenuusi ruudust?
3. Leia  $a_{1993}$ , kui  $a_1 = 0$  ja

$$a_k = \frac{2}{3 - a_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

4. Täisnurkses kolmnurgas  $ABC$  on kaatetele  $AC$  ja hüpotenuusile tõmmatud mediaanid risti. Leia kolmnurga  $ABC$  pindala, kui kaateti  $AB$  pikkus on 1.
5. Reas paiknevad  $n$  väliselt erinevat nuppu. On lubatud vahetada omavahel mistahes kaks sellist nuppu, mille vahel asub täpselt üks nupp. Kas selliste vahetuste abil on võimalik muuta nuppude järjestus esialgses järjekorras vastupidiseks? Põhjenda vastust.

# Eesti koolinoorte XL täppisteaduste olümpiaad

## MATEMAATIKA II VOOR

6. veebruar 1993. a.

XII klass

Lahendamisaega 5 tundi.

Iga ülesande õige ja korrektselt vormistatud lahendus annab 5 punkti.

Taskuarvuti kasutamine ei ole lubatud.

1. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga pindala ei ole suurem kui üks neljandik hüpotenuusi ruudust. Millisel juhul võib pindala võrduda ühe neljandikuga hüpotenuusi ruudust?
2. Tähistagu  $d(n)$  naturaalarvu  $n$  kõigi positiivsete jagajate arvu. Leia piirväärtus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(n)}{n}$ .
3. Ringi raadiusega  $R$  on joonestatud täisnurkne kolmnurk teravnurgaga  $\alpha$  nii, et kolmnurga hüpotenuus on ringjoone kõõluks ja täisnurga tipp asub hüpotenuusiga paralleelsel ringjoone diameetril. Leia selle kolmnurga pindala.
4. Tõesta, et iga naturaalarvu  $k \geq 2$  korral leiduvad  $k$  paarikaupa erinevat naturaalarvu  $n_1, n_2, \dots, n_k$  nii, et

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} = \frac{3}{17}.$$

5. Reas paiknevad  $n$  väliselt erinevat nuppu. On lubatud vahetada omavahel mistahes kaks sellist nuppu, mille vahel asub täpselt üks nupp. Kas selliste vahetuste abil on võimalik muuta nuppude järjestus esialgses järjekorras vastupidiseks? Põhjenda vastust.