Punkti potents ja radikaaltelg

Jan Willemson

Ülesanne 1. Tasandil on antud punkt P ja ringjoon $\mathcal{C}$. Läbi punkti P tõmmatakse sirge, mis lõikab ringjoont $\mathcal{C}$ kahes (võibolla kokkulangevas) punktis A ja B. Tõesta, et suurus $|PA| \cdot |PB|$ ei sõltu sirge asendist.

Definitsioon 1 *Seda suurust nimetatakse* punkti P potentsiks *ringjoone* $\mathcal{C}$ *suhtes.*

Ülesanne 2. Olgu ringjoone $\mathcal{C}$ raadius R ja punkti P kaugus ringjoone kekspunktist d. Tõesta, et punkti P potents ringjoone $\mathcal{C}$ suhtes on

$$\begin{cases} R^2 - d^2, & \text{kui } P \text{ asub ringjoone sees,} \\ 0, & \text{kui } P \text{ asub ringjoonel,} \\ d^2 - R^2, & \text{kui } P \text{ asub ringjoonest väljas.} \end{cases}$$

Järelda siit, et ringjoonest väljaspool asuva punkti potents on võrdne sellest punktist ringjoonele tõmmatud puutujalõigu pikkuse ruuduga.

Teoreem 1 *(Euleri teoreem) Olgu O ja I vastavalt mingi kolmnurga ümber- ja siseringjoonte keskpunktid ning R ja r nende raadiused. Kui $|OI| = d$, siis kehtib võrdus*

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Ülesanne 3. (GK, lk 41) Tõesta Euleri teoreem.

Ülesanne 4. (IMO 2000 shortlist, G1) Tasandil on antud kaks ringjoont, mis lõikuvad punktides X ja Y. Tõesta, et leidub neli punkti, mis rahuldavad järgmist tingimust:

Kui mingi ringjoon puutub antud ringjooni vastavalt punktides A ja B ning lõikab sirget XY punktides C ja D, siis läbib iga sirge AB, AD, BC, BD üht neist neljast punktist.

Ülesanne 5. (Pr 3.53) Tasandil on antud kaks mittekontsentrilist ringjoont $\mathcal{C}_1$ ja $\mathcal{C}_2$. Leia nende punktide geomeetriline koht tasandil, millede potentsid nende kahe ringjoone suhtes on võrdsed.

Definitsioon 2 *Seda joont nimetatakse nende ringjoonte* radikaalteljeks.

Ülesanne 6. Tõesta, et lõikuvate ringjoonte radikaaltelg läbib nende ringjoonte lõikepunkte.

Ülesanne 7. (GK lk 47) Konstrueeri kahe mittekontsentrilise ringjoone järgi sirkli ja joonlaua abil nende radikaaltelg. Konstruktsioon peab töötama ka juhul, kui üks ringjoon asub teise sees.

Ülesanne 8. (Pr 3.55) Tasandil on antud kolm ringjoont, millede keskpunktid ei asu ühel sirgel. Tõesta, et nende ringjoonte paaride radikaalteljed läbivad ühte punkti (nn *radikaalkeset*). Mis saab siis, kui antud ringjoonde keskpunktid asuvad ühel sirgel?

Ülesanne 9. Tõesta, et ringjoon keskpunktiga I ja raadiusega r on risti ringjoonega $\mathcal{C}$ parajasti siis, kui punkti I potents ringjoone $\mathcal{C}$ suhtes on r^2.

Ülesanne 10. (Pr 3.57) Tasandil on antud kaks mittekontsentsilist ringjoont. Leia niisuguste ringjoonte keskpunktide geomeetriline koht tasandil, mis on risti mõlema antud ringjoonega.

Ülesanne 11. (Pr 3.58) Tõesta, et kahe mittelõikuva ringjoone nelja ühise puutujalõigu keskpunktid asuvad ühel sirgel.

Ülesanne 12. (BW 1991) Kolm ringjoont lõikuvad paarikaupa, kusjuures välimised lõikepunktid on A_1, B_1, C_1 ning vastavad sisemised lõikepunktid A_2, B_2, C_2. Tõesta võrdus

$$|A_1B_2| \cdot |B_1C_2| \cdot |C_1A_2| = |A_2B_1| \cdot |B_2C_1| \cdot |C_2A_1|.$$

Ülesanne 13. (Pr 3.62) Kolmnurga ABC küljel BC on võetud punkt A'. Lõigu $A'B$ keskristsirge lõikab külge AB punktis M ning lõigu $A'C$ keskristsirge külge AC punktis N. Tõesta, et punkti A' peegeldus sirgest MN asub kolmnurga ABC ümberringjoonel.

Ülesanne 14. (GK lk 47) Olgu $PAB, AQB, ABR, P'BA, BQ'A, BAR'$ sarnased kolmnurgad, mis asuvad lõiguga AB määratud sirgest samal pool. Tõesta, et punktid P, Q, R, P', Q', R' asuvad ühel ringjoonel.

Ülesanne 15. (Pr 3.64) Kumera hulknurga sees asub lõplik mittetühi hulk paarikaupa lõikumatuid erinevate raadiustega ringe. Tõesta, et antud hulknurga saab lõigata väiksemateks kumerateks hulknurkadeks nii, et igas hulknurgas asub täpselt üks ring.

Teoreem 2 *(Brianchoni teoreem) Kui kuusnurga $ABCDEF$ sisse saab joonestada ringjoone, siis lõikuvad diagonaalid AD, BE ja CF ühes punktis.*

Ülesanne 16. (Pr 3.66) Tõesta Brianchoni teoreem.

Ülesanne 17. (IMO 1999 shorlist, G5) Olgu kolmnurga ABC siseringjoon Ω. Ringjoon Ω_A on risti ringjoonega Ω ning läbib punkte B ja C; analoogiliselt defineertakse ka ringjooned Ω_B ja Ω_C. Ringjooned Ω_B ja Ω_C lõikuvad teistkordselt punktis A'; analoogiliselt defineertakse ka punktid B' ja C'. Tõesta, et kolmnurga $A'B'C'$ ümberringjoone raadius on kaks korda väiksem kui ringjoonel Ω.

Ülesanne 18. (IMO 1999) Ringjooned Ω_1 ja Ω_2 puudutavad sisemiselt ringjoont Ω vastavalt punktides M ja N ning ringjoone Ω_2 keskpunkt asub ringjoonel Ω_1. Ringjoonte Ω_1 ja Ω_2 lõikepunkte ühendav sirge lõikab ringjoont Ω punktides A ja B. Sirged MA ja MB lõikavad ringjoont Ω_1 teistkordselt vastavalt punktides C ja D. Tõesta, et sirge CD on ringjoone Ω_2 puutujaks.

Ülesanne 19. (USAMO 1997) Kolmnurga ABC külgedele BC, CA ja AB kui alustele on kolmnurgast ABC väljapoole joonistatud võrdhaarsed kolmnurgad BCD, CAE, ABF. Tõesta, et läbi punktide A, B, C vastavalt sirgetele EF, FD, DE tõmmatud ristsirged lõikuvad ühes punktis.