Geomeetria põhivara

Jan Willemson

19. mai 2000.a.

1 Kolmnurk

Kolmnurgas tasub mõelda järgmistest lõikudest ja sirgetest: kõrgused, nurgapoolitajad, välisnurkade poolitajad, külgede keskristsirged, mediaanid, kesklõigud. Hästi peaksid teada olema järgmised faktid:

- kõrgused lõikuvad ühes punktis;
- nurgapoolitajad lõikuvad ühes punktis, mis kujutab endast kolmnurga siseringjoone keskpunkti;
- külje vastasnurga poolitaja ja ta lähisnurkade välisnurkade poolitajad lõikuvad ühes punktis, mis kujutab enesest seda külge puudutava külgringjoone keskpunkti;
- külgede keskristsirged lõikuvad ühes punktis, mis kujutab endast kolmnurga ümberringjoone keskpunkti;
- mediaanid lõikuvad ühes punktis, mis kujutab endast kolmnurga massikeset, lisaks jaotab mediaanide lõikepunkt mediaanid suhtes 1:2;
- kolmnurga kesklõik on paralleelne ühe küljega ning sellest kaks korda lühem.

Kasulik on meeles pidada ka kolmnurga nurgapoolitaja omadusi poolitada ümberringjoone kaar, mis toetub poolitatava nurga vastasküljele, ja jagada see külg samas suhtes nagu suhtuvad poolitatava nurga lähisküljed.

Enimekspluateeritavate valemite hulka suvaliste kolmnurgaülesannete lahendamise juures kuuluvad loomulikult **siinus**– ja **koosinusteoreem**:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

kus R on kolmnurga ümberringjoone raadius. Koosinusteoreemist saab lihtsalt tuletada **Stewarti teoreemi**: jagagu kolmnurga tipust vastasküljele pikkusega c tõmmatud lõik pikkusega d selle külje lõikudeks pikkustega a' ja b'. Siis

$$d^2 = a^2\frac{b'}{c} + b^2\frac{a'}{c} - a'b'.$$

Võttes Stewarti teoreemis $a' = b' = \frac{c}{2}$, muutub vaadeldav lõik mediaaniks, seega mediaani m_c pikkus avaldub kolmnurga külgede kaudu kujul

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Nurgapoolitaja korral $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, seega saame nurgapoolitaja pikkuse jaoks valemi

$$l_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right).$$

Kolmnurga pindala leidmiseks kõikvõimalikest andmetest lähtudes on välja mõeldud kõikvõimalikke valemeid. Mõned neist:

$$S_\triangle = \frac{ah}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2} = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = r_a(p-a) = \sqrt{rr_ar_br_c},$$

kus $p = \frac{a+b+c}{2}$ ja r_a tähistab külge a puudutava külgringjoone raadiust.

Tänuväärsed objektid geomeetriaülesannete lahendamisel on võrdhaarsed, sarnased ja täisnurksed kolmnurgad.

Kolmnurga võrdhaarsuseks on tarvilik ja piisav, et

- ta kaks nurka on võrdsed
- ta kaks nurgapoolitajat, kõrgust või mediaani on võrdse pikkusega
- langevad kokku kaks järgmistest joontest:

- nurga $\angle A$ poolitaja
- tipust A tõmmatud kõrgus
- tipust A tõmmatud mediaan
- tipu A vastaskülje keskristsirge

Kaks kolmnurka on sarnased parajasti siis, kui

- nende küljed on vastavalt võrdelised
- nende nurgad on vastavalt võrdsed
- nende kaks külge on vastavalt võrdelised ning nendevahelised nurgad võrdsed

Tasub märkida, et viimases tingimuses on sõna 'nendevahelised' oluline, kuivõrd kahe külje võrdelisusest ning mõnede teiste nurkade võrdsusest ei pruugi järelduda kolmnurkade sarnasus.

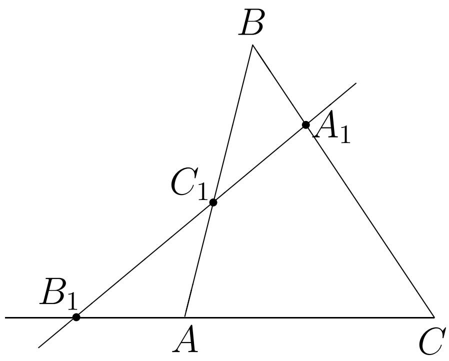
Analoogiliselt saab anda ka kolmnurga täisnurksusega samaväärseid tingimusi. Neist tuntumad on **Pythagorase teoreem** $a^2 + b^2 = c^2$, **Eukleidese teoreem** $a^2 = ca'$ ja Eukleidese teoreemi järeldus $h^2 = a'b'$, kus a' ja b' on kaatetite a ja b projektsioonid hüpotenuusile. Ja veelkord: need pole paljalt täisnurkses kolmnurgas kehtivad seosed, vaid ka tingimused, milledest saab järeldada kolmnurga täisnurksust (siis on a' ja b' lihtsalt kahe külje projektsioonid kolmandale).

Kui tuleb tõestada kolme sirge lõikumist ühes punktis, on kõige standardsem võimalus loomulikult **Ceva teoreem**. Olgu kolmnurga ABC külgedel AB, BC ja AC võetud vastavalt punktid C_1, A_1 ja B_1. Sirged AA_1, BB_1 ja CC_1 lõikuvad ühes punktis parajasti siis, kui

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Teiseks sagelikasutatavaks võtteks sirgete ühes punktis lõikumise tõestamiseks on leida mõni kolmnurk, mille nurgapoolitajateks, kõrgusteks, mediaanideks või keskristsirgeteks need sirged on.

Ceva teoreemiga analoogne tingimus kolme punkti asumiseks ühel sirgel on **Menelaose teoreem**. Olgu kolmnurga ABC külgedel AB, BC ja AC või nende pikendustel (kuid mitte tippudes) võetud vastavalt punktid C_1, A_1 ja B_1, kusjuures pikendustel olgu võetud neist punktidest üks või kõik kolm.



Punktid A_1, B_1 ja C_1 asuvad ühel sirgel parajasti siis, kui

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1,$$

kus lõike mõistame suunatutena ning samasihiliste lõikude pikkuste jagatise märgiks loeme + ning erisihilistel −. Selle teoreemi kasutusväli ei piirdu punktide ühel sirgel asumise tõestamisega, kasulikuks võivad osutuda ka vahendid lõikude pikkuste suhete leidmiseks.

Tähistagu h_a küljele a tõmmatud kõrgust ja r_a sama külge puudutavat külgringjoont. Siis

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

Neid on lihtne tõestada kolmnurga pindala valemite $S_\triangle = pr = r_a(p-a)$ abil.

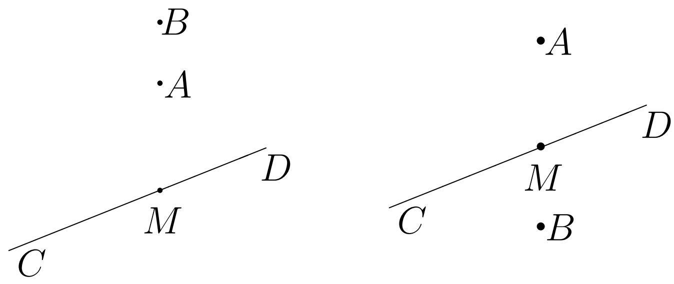
Kolmnurga ümberringjoone ja siseringjoone keskpunktide vaheline kaugus on $\sqrt{R^2 - 2Rr}$.

2 Kasulikke teadmisi punktidest ja sirgetest

Tõestamaks, et kolm punkti ühel sirgel on, võib samuti otsida homoteetsusteisendust keskpunktiga ühes neist punktides, mis viib teise vaadeldava punkti kolmandaks, või kasutada järgmisi omadusi. Asugu punkt M sirgel CD, siis on ta punktidega A ja B ühel sirgel, kui

- punktid A ja B asuvad sirgest CD ühel pool ning $\angle CMA = \angle CMB$ või $\angle CMA + \angle DMB = 180°$ või

- punktid A ja B asuvad sirgest CD erineval pool ning $\angle CMA = \angle DMB$ või $\angle CMA + \angle CMB = 180°$

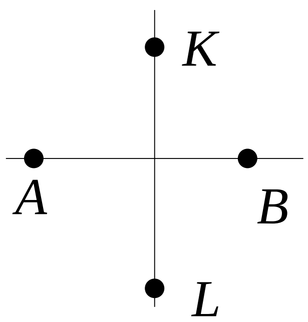


Asugu punktid C ja D ühel pool sirget AB. Siis $AB \parallel CD$ parajasti siis, kui $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD}$.

Ka kahe sirge (lõigu) ristseisu kontrollimiseks saab anda teatavad tingimused.

Lõigud AB ja KL on risti parajasti siis, kui

- $AK^2 - BK^2 = AL^2 - BL^2$ või
- $\angle LKA + \angle BAK = 90°$.



Esimesest neist seostest saab järeldada **Carnot**' teoreemi: punktidest A_1, B_1, C_1 kolmnurga külgedele BC, AB, CA tõmmatud ristsirged lõikuvad ühes punktis parajasti siis, kui kehtib võrdus

$$A_1B^2 - BC_1^2 + C_1A^2 - AB_1^2 + B_1C^2 - CA_1^2 = 0.$$

Lõikude ristseisu võib proovida tõestada ka pöördhomoteetiaga, mille pöördenurk on $90°$ ja mis ühe neist lõikudest teiseks viib.

Kui on tarvis leida punktihulk U, mille kõik punktid rahuldavad mingit tingimust, koosneb tõestus kahest osast:

1. tuleb tõestada, et kõik seda tingimust rahuldavad punktid kuuluvad hulka U ja
2. rohkem selliseid punkte pole.

Kui kaks punkti asuvad ühel pool sirget, siis lühim tee ühest teise antud sirget puudutades järgib sirgest kui peeglist peegelduva kiire teed.

3 Vektorarvutus

Vektorite liitmisel ja lahutamisel kehtivad järgmised võrratused:

$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}| &\leq |\vec{a}|+|\vec{b}| \\ |\vec{a}-\vec{b}| &\geq |\vec{a}|-|\vec{b}| \end{aligned}$$

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ **skalaarkorrutis** defineeritakse valemiga

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma$$

ehk koordinaatides (kus $\vec{a}=(X_{1,}Y_1,Z_1)$ ja $\vec{b}=(X_2,Y_2,Z_2)$):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2).$$

Skalaarkorrutisel on järgmised omadused:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (kommutatiivsus),
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (distributiivsus),
- $(m\vec{a})\cdot\vec{b}=m(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (skalaarne assotsiatiivsus),
- $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ (Cauchy-Bunjakovski võrratus),
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$ (vektorite ristseisu tunnus).

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ *vektorkorrutis* on vektor $\vec{a}\times\vec{b}$, mille

- pikkus on $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, kus φ on nurk vektorite vahel
- siht on risti mõlema vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ sihtidega

- suund on selline, et vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{a} \times \vec{b}$ moodustavad parema käe kolmiku. Arvutamiseks kasutatakse valemit

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix}$$

  Vektorkorrutisel on järgmised omadused:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (antikommutatiivsus);
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (distributiivsus);
- $(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b})$ (skalaarne assotsiatiivsus),
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow$ üks vektoritest on nullvektor või $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ **segakorrutis** defineeritakse valemiga

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Segakorrutise arvutusvalem on

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

Kolme vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ segakorrutis on skalaarne suurus, mille absoluutväärtus võrdub neile vektoritele ehitatud rööptahuka ruumalaga.

Iga kahe kõrvutiasetseva teguri ümberpaigutamine muudab skakaarkorrutise märgi vastupidiseks:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}.$$

Kui M on kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt, kehtib suvalise punkti P (mis ei pea asuma kolmnurga ABC tasandis) korral võrdus

$$\overrightarrow{PM} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})/3.$$

4 Tasandi teisendused

Sageli kasutatakse ülesannete lahendamiseks tasandi teisendusi. Kõige levinumad nende hulgas on järgmised.

Teisendus	Tähis
lüke vektori $\vec{a}$ võrra	$T_{\vec{a}}$
pööre ümber punkti O nurga φ võrra vastupäeva	R_O^{φ}
tsentraalsümmeetria punkti A suhtes	S_A
telgsümmeetria sirge a suhtes	S_a
homoteetia punkti A suhtes teguriga $k \neq 0$	H_A^k
inversioon ringjoone suhtes keskpunktiga A ja raadiusega r	I_A^r

Homoteetia punkti A suhtes teguriga k on teisendus, mis viib tasandi iga punkti X punktiks X', mille korral $\overrightarrow{AX'} = k \cdot \overrightarrow{AX}$.

Inversioon on teisendus, mis määratakse tasandil ringjoone $C = C(A, r)$ abil. Igale tasandi punktile $X \neq A$ seatakse vastavusse punkt X', mis asub kiirel AX ja rahuldab seost $AX \cdot AX' = r^2$.

Pöörde ja homoteetia kompositsiooni nimetatakse pöördhomoteetiaks.

Kasulik on teada ka seoseid nende teisenduste vahel:

- kahe lükke kompositsioon on lüke: $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$,
- tsentraalsümmeetria punkti A suhtes on nii pööre ümber punkti A nurga π võrra kui ka homoteetia punkti A suhtes teguriga -1: $S_A = H_A^{-1} = R_A^{\pi}$,
- kahe tsentraalsümmeetria kompositsioon on lüke: $S_B \circ S_A = T_{2\vec{AB}}$,
- kui a on punkte A ja B ühendav sirge, siis $T_a \circ S_A = S_B$ ja $S_B \circ T_a = S_A$,
- kahe telgsümmeetria kompositsion on:
  - lüke vektori $2\vec{u}$ võrra (kus $\vec{u}$ viib ühe telje teiseks ja on nendega risti), kui teljed on paralleelsed: $S_a \circ S_b = T_{2\vec{u}}$,
  - pööre nurga 2α võrra ümber telgede lõikepunkti O (kus α on telgede vaheline nurk), kui teljed lõikuvad: $S_a \circ S_b = R_O^{2\alpha}$,
- suvalise liikumise tasandil saab avaldada ülimalt kolme telgsümmeetria kompositsioonina, seepärast on telgsümmeetriate kompositsioon tundu-

valt võimsam ülesannete lahendamise meetod kui näiteks tsentraalsümmeetria; sageli on kasulik lahutada ka pööre kahe telgsümmeetria kompositsiooniks, kusjuures üheks sümmeetriateljeks võib võtta suvalise pöördekeskpunkti läbiva sirge,

- kahe pöörde kompositsioon on:
  - pööre, kui pöördenurkade summa ei ole 2π kordne: $R_B^\beta \circ R_A^\alpha = R_C^\gamma$, kus $\gamma = \alpha + \beta$, $\angle BAC = \alpha/2$, $\angle ABC = \beta/2$,
  - lüke vektori $\vec{u}$ võrra, kus $\vec{u}$ viib sirge a sirgeks b ning on mõlemaga risti; sirged a ja b on sellised, et lõik AB moodustab nendega vastavalt nurga $\alpha/2$ ja nurga $\beta/2$,
- kahe homoteetia kompositsioon teguritega k_1 ja k_2 on:
  - homoteetia teguriga k_1k_2, kui $k_1k_2 \neq 1$; keskpunkt asub sirgel, mis on määratud esialgsete homoteetiate keskpunktidega,
  - lüke, kui $k_1k_2 = 1$; lükke siht ühtib homoteetiate keskpunkte ühendava sirge sihiga,
- homoteetia
  - viib sirge sirgeks (kusjuures säilitab punkti A läbivad sirge),
  - viib ringjoone ringjooneks,
  - säilitab joontevahelised nurgad,
- inversioon
  - säilitab ringjoone C punktid,
  - säilitab joontevahelised nurgad,
  - viib punkti A mitte sisaldava sirge punkti A sisaldavaks ringjooneks ja vastupidi,
  - viib punkti A mitte sisaldava ringjoone punkti A mitte sisaldavaks ringjooneks,
  - viib punkti A sisaldava sirge iseendaks.

5 Ringjooned, nurgad, lõigud, hulknurgad

Hulknurgad. Kaks hulknurka on sarnased, kui nende küljed on võrdelised ja vastavad nurgad võrdsed. ühestainsast tingimusest ei piisa!

Nelinurk on rööpkülik parajasti siis, kui on täidetud üks järgmistest tingimustest

- vastasküljed on paralleelsed
- diagonaalid poolitavad teineteist

Rööpkülikus kehtib seos $d_1^2 + d_2^2 = 2(a_1^2 + a_2^2)$.

Kui nelinurga diagonaalid on risti, siis võib tema pindala arvutada valemist

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Erijuhul saame selle valemiga leida rombi pindala.

Ennast mittelõikava n-nurga sisenurkade summa on $(n-2) \cdot 180°$.

Nelinurgas küljepikkustega a, b, c, d, diagonaalidega m, n ja kahe vastasnurgaga A, C kehtib "koosinusteoreem"

$$m^2 n^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\angle A + \angle C).$$

Kõõlnelinurk. Kumer nelinurk $ABCD$ on kõõlnelinurk parajasti siis, kui

- $\angle ABC + \angle CDA = \pi$ või
- $\angle ABD = \angle ACD$.

Kõõlnelinurga pindala valem on

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-c)}.$$

Kõõlnelinurgas küljepikkustega a, b, c, d ja diagonaalidega d_1, d_2 kehtib **Ptolemaiose teoreem**

$$ac + bd = d_1 d_2.$$

On olemas ka teatav Ptolemaiose teoreemi üldistus. Nimetame ringjoonte ω_1 ja ω_2 *puutulakauguseks* $d(\omega_1, \omega_2)$ nende ringjoonte ühise välise puutujalõigu pikkust.

Puutugu ringjooned ω_1, ω_2, ω_3 ja ω_4 sisemiselt (või välimiselt) ringjoont ω. Siis

$$d(\omega_1, \omega_2) d(\omega_3, \omega_4) + d(\omega_1, \omega_3) d(\omega_2, \omega_4) = d(\omega_1, \omega_4) d(\omega_2, \omega_3).$$

Puutujanelinurk. Kumer nelinurk külgedega a, b, c, d on puutujanelinurk parajasti siis, kui

$$a + c = b + d.$$

Puutujanelinurga (ja tegelikult suvalise puutujahulknurga) pindala valem on

$$S = pr,$$

kus p on pool ümbermõõtu.

Kesk- ja piirdenurga omadus. Piirdenurk võrdub poolega vastavast kesknurgast. Järeldusena saame siit, et kehtivad järgnised väited:

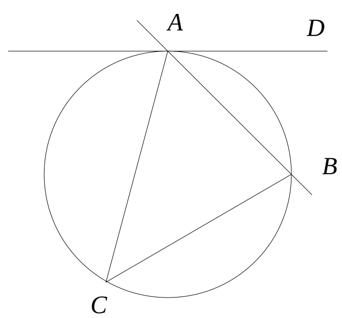
- Thalese teoreem: ringjoone diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk,
- vastavalt ristuvate haaradega nurgad on kas võrdsed või on nende summa π,
- ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed.

Viimase väite pöördväide on samuti õige: kõik need punktid, kust ringjoone kaar (või siis kaare otspunkte ühendav sirglõik) paistab ühe ja sama nurga alt, moodustavad ringjoone kaare.

Ringjoone lõikaja ja puutuja omadusi.

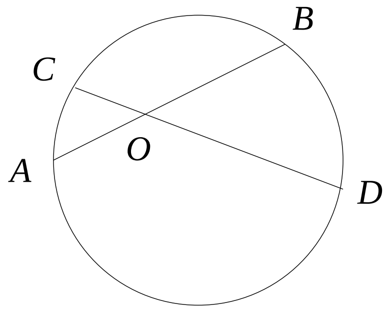
- Ringjoone puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.
- Kui ringjoone punktist A on ringjoonele tõmmatud puutuja ja lõikaja, mille teine lõikepunkt ringjoonega on B, siis nendevaheline nurk on võrdne lõikajakõõlule toetuva piirdenurga suurusega:

$$\angle DAB = \angle ACB$$



- Ringjoone puutujate lõikepunkt on mõlemast puutepunktist võrdsel kaugusel.
- Lõikuvate kõõlud jagavad teineteise lõikudeks, millede pikkuste korrutised on võrdsed:

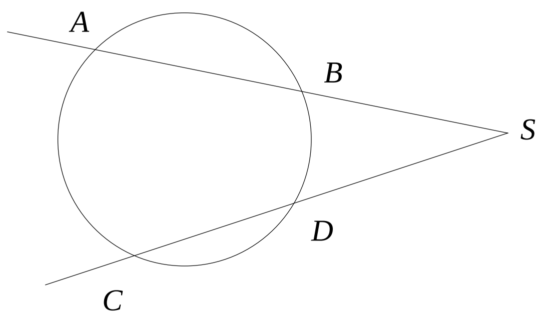
$$OA \cdot OB = OC \cdot OD \tag{1}$$



Kehtib ka selle väite pöördväide: kui lõigud AB ja CD lõikuvad punktis O ning kehtib seos 1, siis asuvad punktid A, B, C, D ühel ringjoonel.

- Lõikajate nende osade korrutised, mis on võetud lõikajate ühisest punktist lõikepunktideni ringjoonega, on võrdsed:

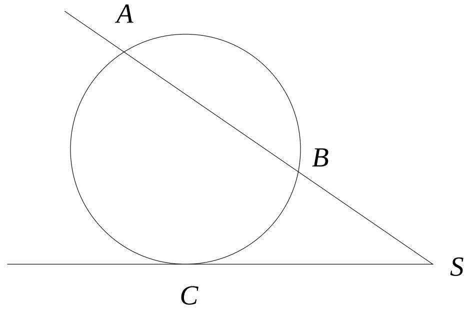
$$SA \cdot SB = SC \cdot SD$$



Jällegi kehtib ka pöördväide.

- kui kahe lõikaja asemel on tegu lõikaja ning puutujaga, siis taandub eelmine valem valemiks

$$SC^2 = SA \cdot SB$$



6 Geomeetrilised võrratused

- **Kolmnurgavõrratus.** Kolmnurga külgede a, b ja c vahel kehtivad järgmised seosed:

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad a + c > b \tag{2}$$

$$|a - b| < c, \quad |b - c| < a, \quad |a - c| < b \tag{3}$$

  Vastupidi, kui positiivsete arvude a, b ja c jaoks on õiged kas võrratused (2) või võrratused (3), leidub kolmnurk nende küljepikkustega.

- Mediaani pikkus on väiksem lähisküljede pikkuste poolsummast: $m_a < \frac{b+c}{2}$.

- Kui kaks kumerat hulknurka on joonestatud üksteise sisse, siis on sisemise hulknurga ümbermõõt väiksem kui välimise hulknurga ümbermõõt

- Kumera nelinurga diagonaalide pikkuste summa on suurem tema kahe vastaskülje pikkuste summast (mõlema vastasküljede paari jaoks).

- Kolmnurgas on suurema nurga vastas suurem külg ja vastupidi, suurema külje vastas on suurem nurk.

- Kui mingi lõik asub kumera hulknurga sisepiirkonnas, siis tema piikus ei ületa kas hulknurga pikimat külge või pikimat diagonaali; samuti ei ületa tema pikkus hulknurga poolt ümbermõõtu .

- Igas kolmnurgas kehtib võrratus $R \geq 2r$, kusjuures võrdus kehtib ainult võrdkülgse kolmnurga korral.

- **Erdős-Mordelli võrratus.** Olgu M punkt kolmnurga ABC sees ja tähistagu d_a, d_b, d_c vastavalt punkti M kaugusi külgedest a, b, c. Siis

$$|MA| + |MB| + |MC| \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

- **Ptolemaiose võrratus.** Olgu nelinurga külgede pikkused a, b, c, d ning diagonaalide pikkused d_1, d_2. Siis

$$ac + bd \geq d_1 d_2,$$

  kusjuures võrdus kehtib vaid kõõlnelinurga korral.

Geomeetriliste võrratuste tõestamiseks kasutatakse tihti ka algebralisi võrratusi, näiteks $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Spikrisse pole vähimatki mõtet panna kirja kõigi ülesannete kõiki lahendusi, sest ülesannete lahendamisel tuleb kõige rohkem kasutada ikka oma mõistust.

7 Tänud

Soovin tänada Reimo Palmi, kellega koostöös sündis käesoleva materjali algvariant.