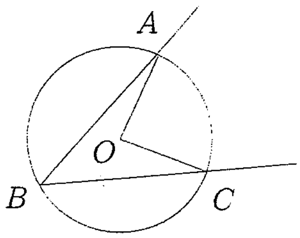
# Nurgad, ringid, hulknurgad

## 1 Ringjoonega seotud nurgad

### 1.1 Põhitõed

**Teoreem 1.1** *Kaarele toetuv kesknurk on kaks korda suurem vastavast piirdenurgast, st* $\angle AOC = 2\angle ABC$ *(vt joonis 1).*




Joonis 1: Teoreem piirde- ja kesknurgast

**Ülesanne 1.1.** Tõesta, et kõik samale kaarele (võrdse pikkusega kõõlule) toetuvad piirdenurgad on võrdsed.

**Ülesanne 1.2.** Tõesta, et võrdse suurusega piirdenurgad toetuvad sama pikkadele kõõludele (sama suurtele kaartele).

**Ülesanne 1.3.** Tõesta, et ringjoone diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

**Ülesanne 1.4.** Tõesta, et kolmnurgas $ABC$ kehtib seos

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R,$$

kus $R$ tähistab kolmnurga $ABC$ ümberringjoone raadiust.

**Ülesanne 1.5.** Tõesta, et kõõlnelinurgas $ABCD$ kehtib võrdus $\angle ABC + \angle ADC = 180°$.

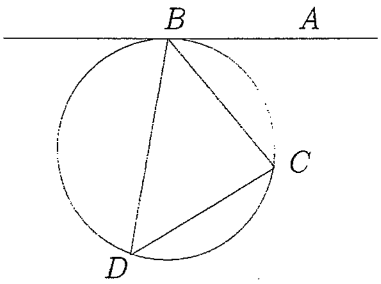
**Ülesanne 1.6.** Olgu tasandil antud kaks erinevat punkti $A$ ja $C$ ning nurgasuurus $\alpha$. Leia kõigi selliste tasandi punktide hulk $B$, et kehtiks võrdus $\angle ABC = \alpha$.

**Ülesanne 1.7.** Tõesta, et kui kumeras nelinurgas $ABCD$ kehtib võrdus $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, siis saab läbi punktide $A$, $B$, $C$ ja $D$ joonestada ringjoone (st nelinurk $ABCD$ on kõõlnelinurk).

**Ülesanne 1.8.** Olgu tasandil antud neli erinevat punkti $A$, $B$, $C$ ja $D$, kusjuures $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Tõesta, et läbi punktide $A$, $B$, $C$ ja $D$ joonestada ringjoone.

**Ülesanne 1.9.** Tasandil on antud sirged $s$, $t$, $u$ ja $v$, kusjuures $s \perp u$, $t \perp v$, nurk sirgete $s$ ja $t$ vahel on $\alpha$ ning nurk sirgete $u$ ja $v$ vahel on $\beta$. Tõesta, et $\alpha = \beta$ või $\alpha + \beta = 180°$.

**Teoreem 1.2** *(Teoreem kõõlust ja puutujast)* *Ringjoonele on tõmmatud kõõl $BC$ ning punktis $B$ puutuja $AB$. Kaarel $BC$ on võetud punkt $D$ (vt joonis 2). Siis kehtib võrdus $\angle ABC = \angle BDC$.*




Joonis 2: Teoreem kõõlust ja puutujast

**Ülesanne 1.10** Tõesta teoreem kõõlust ja puutujast,

**Ülesanne 1.11.** Kaks ringjoont lõikuvad punktides $P$ ja $Q$. Ühel ringjoonel võetakse punkt $A$; kiir $AP$ lõikab teist ringjoont teistkordselt punktis $B$, kiir $AQ$ aga lõikab teist ringjoont teistkordselt punktis $C$. Tõesta, et sirge $BC$ on paralleelne esimesele ringjoonele punktis $A$ tõmmatud puutujaga.

## 1.2 Harjutamiseks

**Ülesanne 1.12.** Kolmnurgas $ABC$ olgu $H$ tipust $A$ tõmmatud kõrguse aluspunkt ja $O$ ümberringjoone keskpunkt. Tõesta, et $\angle BAH = \angle OAC$.

**Ülesanne 1.13.** Tõesta, et kolmnurga $ABC$ tipust $A$ tõmmatud nurgapoolitaja poolitab kaare, mis toetub kolmurga ümberringjoone kaarele $BC$.

**Ülesanne 1.14.** Kaks võrdse raadiusega ringjoont lõikuvad punktides $A$ ja $B$. Läbi punkti $A$ tõmmatud sirge lõikab antud ringjooni teistkordselt vastavalt punktides $C$ ja $D$. Tõesta, et kolmnurk $BCD$ on võrdhaarne.

**Ülesanne 1.15.** Ringjoonele keskpunktiga $O$ on joonestatud kõõl $AB$ ning sellel kõõlul on valitud punkt $C$. Ringjoon läbi punktide $A$, $C$ ja $O$ lõikub esialgse ringjoonega teistkordselt punktis $D$. Tõesta, et kolmnurk $BCD$ on võrdhaarne.

**Ülesanne 1.16.** Tasandil on antud teravnurk tipuga $A$ ja selle sisepiirkonnas punkt $M$. Punktist $M$ tõmmatakse nurga haaradele ristlõigud vastavalt aluspunktidega $P$ ja $Q$. Punktist $A$ tõmmatakse lõigule $PQ$ ristlõik $AK$. Tõesta, et $\angle PAK = \angle MAQ$.

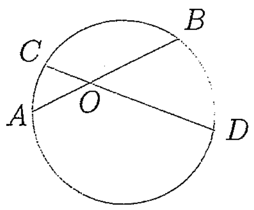
# 2 Lõigud ringjoones

**Teoreem 2.1** *(Teoreem lõikuvatest kõõludest) Kui kõõlud $AB$ ja $CD$ lõikuvad punktis $O$, siis $AO \cdot BO = CO \cdot DO$ (vt joonist 3).*

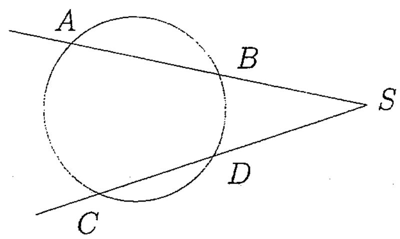
**Teoreem 2.2** *(Lõikuvate kõõlude teoreemi pöördteoreem) Kui lõigud $AB$ ja $CD$ lõikuvad punktis $O$ nii, et $AO \cdot BO = CO \cdot DO$, siis asuvad punktid $A$, $B$, $C$ ja $D$ ühel ringjoonel (vt joonist 3).*

**Ülesanne 2.17.** Tõesta teoreem lõikuvatest kõõludest ja tema pöördteoreem.

**Teoreem 2.3** *(Teoreem lõikajalõikudest) Kui ringjoonele on punktist $S$ tõmmatud lõikajad, mis lõikavad seda ringjoont vastavalt punktides $A$ ja $B$ ning $C$ ja $D$, siis $AS \cdot BS = CS \cdot DS$ (vt joonis 4).*



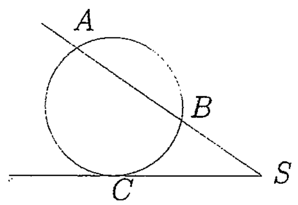

Joonis 3: Teoreem lõikuvatest kõõludest




Joonis 4: Teoreem lõikajalõikudest

**Ülesanne 2.18.** Tõesta teoreem lõikajalõikudest, sõnasta tema pöördteoreem ja tõesta ka see.

**Teoreem 2.4** *(Teoreem puutujalõigust ja lõikajalõikudest) Kui ringjoonele on punktist $S$ tõmmatud lõikaja, mis lõikab seda ringjoont punktis $A$ ja $B$ ning puutuja, mis puutub ringjoont punktis $C$, siis $AS \cdot BS = CS^2$ (vt joonis 5).*



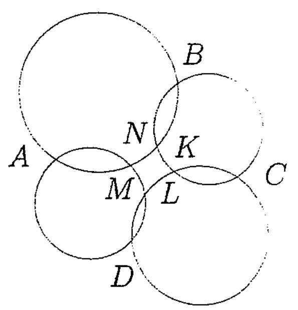

Joonis 5: Teoreem puutujalõigust ja lõikajalõikudest

**Ülesanne 2.19.** Tõesta teoreem puutujalõigust ja lõikajalõikudest, sõnasta tema pöördteoreem ja tõesta ka see.

**Ülesanne 2.20.** Tõesta, et ringjoonele samast punktist tõmmatud puutujalõigud on võrdsed.

# 3 Mitmesuguseid ülesandeid

**Ülesanne 3.21.** Neli ringjoont lõikuvad nii, nagu näidatud joonisel 6. On teada, et punktid $A$, $B$, $C$ ja $D$ asuvad ühel ringjoonel. Tõesta, et punktid $K$, $L$, $M$ ja $N$ asuvad ühel ringjoonel.

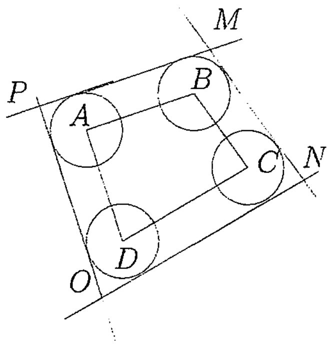



Joonis 6: Neli ringjoont

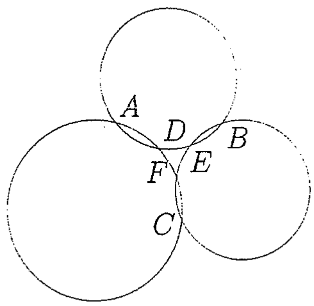
**Ülesanne 3.22.** Tasandile on joonestatud kumer nelinurk $ABCD$ ning ringjooned $K_A$, $K_B$, $K_C$ ja $K_D$ keskpunktidega vastavalt $A$, $B$, $C$ ja $D$ ning sama raadiusega $R$. Ringjoonepaaridele on tõmmatud neli välist puutujat, mis lõikuvad punktides $M$, $N$, $O$ ja $P$, nagu näidatud joonisel 7. Tõesta, et kui punktid $A$, $B$, $C$ ja $D$ asuvad ühel ringjoonel, siis asuvad ühel ringjoonel ka punktid $M$, $N$, $O$ ja $P$.

**Ülesanne 3.23.** Tasandil on antud kaks (mitte tingimata võrdse raadiusega) ringjoont keskpunktidega $O_1$ ja $O_2$. Tõesta, et nende punktide $P$ hulk tasandil, kust tõmmatud puutujalõigud neile ringjoontele on võrdsed, moodustab sirge, mis on risti sirgega $O_1O_2$.

**Ülesanne 3.24.** Tasandil on antud kolm ringjoont, mis lõikuvad punktides $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ ja $F$ nii nagu näidatud joonisel 8. Tõesta, et sirged $AD$, $BE$ ja $CF$ lõikuvad ühes punktis.




Joonis 7: Nelinurk ja ringjooned




Joonis 8: Kolm ringjoont

**Ülesanne 3.25.** Tasandil on antud ringjoon keskpunktiga $O$ ja raadiusega $R$ ning sirge $s$, mis ei läbi punkti $O$. Sirge $s$ iga punkti $P$ jaoks valitakse kiirel $OP$ selline punkt $P'$, et $OP \cdot OP' = R^2$. Tõesta, et kõik nii konstrueeritud punktid $P'$ asuvad samal ringjoonel.

**Ülesanne 3.26.** Kolmnurga $ABC$ ümberringjoonel võetakse punkt $P$. Punktist $P$ tõmmatakse ristlõigud $PK$, $PL$ ja $PM$ vastavalt sirgetele $BC$, $AC$ ja $AB$. Tõesta, et punktid $K$, $L$ ja $M$ asuvad ühel sirgel (nn *Simpsoni sirge*).

**Ülesanne 3.27.** Ringjoon kekspunktiga $O$ puudutab nurga haarasid punktides $A$ ja $B$. Lõigul $AB$ valitakse punkt $M$. Sirgele $OM$ punktis $M$ joonestatud ristsirge lõikab nurga haarasid punktides $X$ ja $Y$. Tõesta, et $MX = MY$.