Kuhjamängud

Jan Willemson

23. november 2004. a.

1 Mäng POOLITAJA

Vaatleme järgmist mängu.

> Laual on n hunnikut vastavalt $k_1, k_2, \ldots, k_n$ kiviga. Oma käigul valib mängija ühe kuhja ning jagab selle osadeks järgmise reegli alusel: kui kuhjas on $2k$ kivi, jagatakse kuhi täpselt pooleks, kui kuhjas on $2k+1$ kivi ($k \geq 1$), siis jäävad alles kuhjad kas suurustega k ja $k+1$ või 1, k ja k kivi. Kaotab see mängija, kes enam ühtki kuhja jagada ei saa (st kui tema käigu saabudes on kõigis kuhjades 1 kivi).

Loengu lõpuks on meie eesmärk jõuda selle mängu lahendamiseni (st olukorrani, kus me oskaksime iga algseisu korral öelda, kes võidab), aga see pole niisama lihtne. Huvi pärast võid proovida, mis juhtub näiteks algseisus $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Üsna kiirelt leiad, et mõttekäigud "ma alustan nii, siis on vastasel need-ja-need võimalused, mille peale mina saan käia nii-ja-nii" ei vii sihile, sest erinevaid võimalusi ja nende kombinatsioone on väga palju.

Vana tarkus õpetaja Laurilt ütleb, et kui tervet ülesannet korraga teha ei jõua, proovi osa. Proovime siis lihtsamaid variante.

- Tõesta, et algseisus k, k alustaja kaotab.
- Tõesta, et kui algseisus on ainult üks kuhi $k > 1$ kiviga, siis alustaja võidab.

Mõlemad väited õnnestub lihtsasti tõestada "strateegia varastamisega". Kui alustaja teeb seisus k, k ühes kuhjas mingi käigu, saab teisena käija teha sama teises kuhjas ja nii alati endale käigu kindlustada. Samas kui alustajal on ees üks kuhi $2k$ või $2k + 1$ kiviga, saab ta sellest teha vastavalt teisele mängijale kaotava seisu k, k või $1, k, k$.

On huvitav tähele panna, et teadmisest, kuidas lõppeb mäng ühe konkreetse kuhja korral, ei piisa teadasaamiseks, milline on tulemus kuhjade komplekti jaoks. Nii nägime, et alustajal on võitev strateegia iga konkreetse kuhja 2, 3 ja 4 puhul, kuid ...

- Tõesta, et algseisus $3, 4$ on alustajal võitev strateegia, kuid algseisus $2, 4$ mitte.

Juhul $2, 4$ on tegu lihtsa läbivaatusega, seisust $3, 4$ saab alustaja aga tekitada seisu $1, 2, 4$.

Mõtle nüüd sellise ülesande peale.

- Tõesta, et seisudes $k, k, k_1, k_2, \ldots, k_n$ ja $k_1, k_2, \ldots, k_n$ võidab sama mängija.

Ka selle ülesande lahendus on lihtne – seni kuni kahte esimest kuhja suurusega k ei puudutata, järgib võitja oma strateegiat. Kui vastane teeb mingi käigu ühes esimestest kuhjadest, vastab võitja selle kuhja paarilises, nagu ülalpoolgi. Paneme tähele, et võitjal ei teki kunagi vajadust ise esimestes kuhjades käia, sest vastavalt võidutingimusele jääb talle alati käik tagumistes. Seega jääb ka kogu mängus viimane käik talle.

Sisuliselt mängiti viimases näites mänge k, k ning $k_1, k_2, \ldots, k_n$ paralleelselt ja vaheldumisi, kusjuures mängu k, k lisamine ei muutnud kogu mängu tulemust. Paneme tähele, et mängu k, k asemel võiks olla suvaline mäng, mille alustaja kaotab, põhimõtteliselt isegi hoopis teiste reeglite järgi toimuv mäng. Tõepoolest, viimase ülesande lahendamisel läks mängu k, k omadustest vaja vaid seda, et võitjal (ükskõik kumb mängijatest see siis ei oleks) on kaotaja käigule selles mängus alati vastus olemas. Need tähelepanekud põhjendavad järgmise definitsiooni.

> Mängude G ja H *summaks* $G + H$ nimetame mängu, mis koosneb mängude G ja H paralleelselt mängimises, kusjuures käik tehakse korraga parajasti ühes komponendis. Mängu, kus alustaja kaotab, nimetame nullmänguks ja tähistame 0.

- Tõesta järgmised omadused:
  - kõigi mängude G ja H korral $G + H = H + G$,
  - kõigi mängude G, H ja I korral $(G + H) + I = G + (H + I)$.

Kuigi me pole formaalselt defineerinud ei mänge, nende liitmist ega võrdust, põhjendab ülaltoodud arutelu sellegipoolest ka, et kõigi mängude G korral võime kirjutada $G + 0 = G$.

2 Mäng NIM

Vaatleme klassikalist kuhjamängu NIM.

> Laual on kolm kivikuhja. Käigulolles tohib mängija valida ühe kuhja ning võtta sealt ära suvalise arvu kive (kasvõi kõik). Kaotab see mängija, kes enam käia ei saa (st mängija, kelle käigu alguseks on järel seis $0, 0, 0$).

- Kes võidab seisus k, k, l?
- Aga seisus $1, 2, 4$?
- Aga seisus $1, 2, 3$?
- Proovi veel erinevate erinevate algseisudega ja katsu ära arvata, mis reegli alusel võitjat määrata saab.

Osutub, et seda reeglit polegi niisama lihtne ära arvata. Kasutame jälle õpetaja Lauri tarkust ning katsume õnne lihtsama ülesandega. Proovime muuta kuhjade arvu.

- Kes võidab ühe kuhjaga NIM-i?
- Kes võidab kahe kuhjaga NIM-i?

Järgmiseks proovime õnne olukorras, kus kuhje on rohkem kui kolm. Vaatleme niisugust erijuhtu.

- Tõesta, et NIM-mängudes $1, 3, k_1, k_2, \ldots, k_n$ ja $2, k_1, k_2, \ldots, k_n$ võidab sama mängija (st alustaja või tema vastane).

Oletame, et üks mängija võidab teises mängus. Kui tema võidustrateegia sisaldab teise mängu esimeses kuhjas käiku $2 \to 1$, siis esimeses mängus võib ta selle asemel käia $3 \to 0$, kui aga võitja strateegia sisaldab teises mängus käiku $2 \to 0$, siis esimeses mängus võib ta selle asemel käia $3 \to 1$, sest allesjääv alamseis $1, 1$ on sama hea kui nullkuhi. Mis aga juhtub, kui kaotaja otsustab esimese mängu esimeses kuhjas teha käigu $1 \to 0$? Siis võib võitja vastata käiguga $3 \to 2$ ja saavutada täpselt sama võitva seisu, mis tal teises mängus on. Samamoodi võib käigule $3 \to 2$ vastata käiguga $1 \to 0$. Kaotaja käik esimese mängu teises kuhjas $3 \to 0$ on sama hea, kui ta teeks teise mängu esimeses kuhjas käigu $2 \to 1$ ning sellele on võitjal vastavalt meie eeldusele vastus olemas. Kaotaja käik $3 \to 1$ on aga sama hea, kui ta teeks teise mängu esimeses kuhjas käigu $2 \to 0$ ja ka sellele oskab võitja eelduse kohaselt reageerida.

Niisiis näeme, et NIM-kuhjade 1 ja 3 summa (1. peatüki mõttes) on sama hea kui NIM-kuhi 2 sõltumata sellest, mis ülejäänud mängus toimub. Osutub, et kahe NIM-kuhja summa on alati samaväärne mingi kolmanda NIM-kuhjaga. See on nii tähtis väide, et väärib eraldi teoreemina sõnastamist ja tõestamist.

Teoreem. Kahe NIM-kuhja summa on samaväärne mingi kolmanda NIM-kuhjaga.

Tõestus. Tähistame NIM-mängu $k_1, k_2, \ldots, k_n$ väärtust $\mathcal{G}_{NIM}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Ühekuhjalise mängu puhul kirjutame lihtalt $\mathcal{G}_{NIM}(k) = k$. Teoreemi väite põhjendamiseks piisab tõestada, et iga k, l korral leidub niisugune m, et $\mathcal{G}_{NIM}(k, l) = m$. Edasi n kuhja juhule saab siis väite üldistada lihtsa induktsiooniga.

Vajaliku väite tõestame omakorda induktsiooniga $k+l$ järgi. Induktsiooni baasi jaoks on lihtne tähele panna, et $\mathcal{G}_{NIM}(0, 0) = 0$. Induktsiooni sammu jaoks tähistame kõigepealt $M(k, l)$ kõigi seisude hulka, millesse seisust k, l ühe käiguga saada võib; seega

$$M(k, l) = \{(i, j) : (i = k \,\&\, 0 \le j < l) \vee (0 \le i < k \,\&\, j = l)\}.$$

Edasi näitame, et

$$\mathcal{G}_{NIM}(k, l) = \operatorname{mex}\{\mathcal{G}_{NIM}(i, j) : (i, j) \in M(k, l)\}$$

kus mex tähistab vähimat mittenegatiivset täisarvu, mida argumentide seas ei leidu (nt $\operatorname{mex}\{3, 0, 9, 2, 1\} = 4$, $\operatorname{mex}\{7, 1, 5\} = 0$ jne). Kuna iga $(i, j) \in$

$M(k,l)$ korral $i + j < k + l$, on induktsiooni eeldus täidetud ja me võime järeldada, et kõik niisugused mängud i, j on samaväärsed ühe NIM-kuhjaga.

Olgu siis

$$M = \{\mathcal{G}_{NIM}(i,j) : (i,j) \in M(k,l)\} = \{m_1, m_2, \ldots, m_s\}.$$

Mängu M tuleb mõista kui sellist, kus käigul olija saab oma käigu tulemuseks valida kuhja suurusega m_1, m_2, ... või m_s. Meie eesmärk on näidata, et sama hästi võib mänguks olla NIM-kuhi suurusega $m = \text{mex}(M)$. Selleks tõestame, et iga mängu G korral on mängudes $m + G$ ja $M + G$ võitjaks sama mängija (kus liitmine toimub mängude paralleelselt ja vaheldumisi mängimisena nagu 1. peatükis).

Tõestus on sisuliselt sama kui viimases ülesandes. Olgu ühel mängijal võitev strateegia mängus $m + G$, näitame, et ta võidab ka mängus $M + G$. Komponentides G toimub mäng mõlemal juhul samamoodi. Vaatame läbi võimalikud juhud, kus tänu komponentide m ja M erinevusele probleem võib tekkida.

- Kui võitja tahab mängus $m + G$ teha käiku kuhjas m, siis on tal selleks võimalused $0, 1, \ldots, m - 1$. Samas mex'i definitsiooni põhjal on samad valikud olemas ka hulgas M.

- Kui kaotaja käib komponendis M, on tal selleks kaks võimalust – ta võib valida NIM-kuhja suurusega $m' < m$ või suurusega $m' > m$ (sest kuhja suurusega m hulgas M ei ole).

  - Kui kaotaja teeb käigu $m' < m$, siis on see sama hea, kui ta oleks mängus $m + G$ teinud käigu komponendis m.
  - Kui aga kaotaja teeb mängus $M + G$ esimeses komponendis käigu $m' > m$, võib võitja vastuseks teha kuhjast m' teha kuhja suurusega m ja järgida edasi oma võidustrateegiat mängus $m + G$.

Seega oleme näidanud, et kahe (ja üldiselt suvalise lõpliku hulga) NIM-kuhja(de) summa on alati samaväärne ühe NIM-kuhjaga.

MOTT

Tabel 1: NIM-liitmise tabel

$\stackrel{*}{+}$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	4	5	4	3	2	0

Teoreemi tõestus annab meile ka reegli NIM-kuhjade liitmiseks. Seda liitmist hakkame peale $\mathcal{G}_{NIM}$ lühiduse huvides tähistama ka sümboliga $\stackrel{*}{+}$. Kuna nullmängu lisamine teisi mänge ei mõjuta, saame endiselt iga k korral $k \stackrel{*}{+} 0 = k$. Arvutame näiteks, millega võrdub $1 \stackrel{*}{+} 1$:

$$1 \stackrel{*}{+} 1 = \mathcal{G}_{NIM}(1,1) = \text{mex}\{\mathcal{G}_{NIM}(1,0), \mathcal{G}_{NIM}(0,1)\} = \text{mex}\{1,1\} = 0.$$

Tõepoolest – kahe ühekivise kuhjaga mängitud NIM on alustajale kaotatud e. nullmäng. Arvutame veel:

$$\begin{aligned} 1 \stackrel{*}{+} 2 &= \text{mex}\{\mathcal{G}_{NIM}(0,2), \mathcal{G}_{NIM}(1,1), \mathcal{G}_{NIM}(1,0)\} = \text{mex}\{2,0,1\} = 3, \\ 1 \stackrel{*}{+} 3 &= \text{mex}\{\mathcal{G}_{NIM}(0,3), \mathcal{G}_{NIM}(1,2), \mathcal{G}_{NIM}(1,1), \mathcal{G}_{NIM}(1,0)\} \\ &= \text{mex}\{3,3,0,1\} = 2. \end{aligned}$$

Sama moodi jätkates saame NIM-liitmise tabeli 1.

Peast NIM-liitmise lihtsustamiseks saab kasutada järgmist reeglit. Esitame kuhjade suurused binaarkujul ning liidame bitikaupa ilma ülekandeta (st reeglite $0+0=0$, $0+1=0$ ja $1+1=0$ alusel). Kui tulemuseks koosneb ainult 0-dest, siis kaotab alustaja, muidu teisena käija.

- (Kodune ülesanne) Tõesta, et lihtsustatud NIM-liitmine annab sama tulemuse, mis mex-funktsiooni abil leitu.

- Tuleta reegel NIM-seisus võidukäigu leidmiseks.

- (Kodune ülesanne) Tõesta, et NIM-liitmisel on järgmised omadused:
  - $m \overset{*}{+} n = n \overset{*}{+} m$,
  - $(l \overset{*}{+} m) \overset{*}{+} n = l \overset{*}{+} (m \overset{*}{+} n)$,
  - $m \overset{*}{+} m = 0$.

3 Erapooletute mängude NIM-väärtused

Lugedes hoolega eelmise peatüki teoreemi tõestust, võib veenduda, et tegelikult pole oluline, et mängitakse just NIM-i. Oluliseks osutuvad ainult järgmised omadused:

1. on kaks mängijat, kes teevad käike vaheldumisi;
2. on lõplik arv võimalikke seise ja reeglid, mis ütlevad, millistest seisudest ühe käiguga millistesse seisudesse jõuda võib;
3. mäng on lõplik ja lõppeb ühe mängija käigupuudusega; see mängija loetakse siis kaotajaks;
4. igas seisus on mõlemal mängijal samad võimalikud käigud.

Neist omadustest viimane on teistest natuke erinev, nimelt ei rahulda seda mitte kõik mängud. Nii näiteks on kabes ühel mängijal liigutamiseks mustad nupud ja teisel valged, mistõttu nende lubatud käikude hulgad ei oma isegi ühisosa, kokkulangemisest rääkimata. Samas praktiliselt kõik olümpiaadidel ette tulevad kuhjamängud (nagu näiteks POOLITAJA või NIM) rahuldavad ka viimast nõuet. Ülaltoodud neljale omadusele vastavaid mänge minetatakse *erapooletuteks mängudeks*. Eelmise peatüki põhitulemuse üldistusena on võimalik sõnastada järgmine teoreem.

Teoreem. Iga erapooletu mäng on samaväärne mingi NIM-kuhjaga.

Seda teoreemi me siinkohal ei tõesta, aga tõestus on sisuliselt sama, kui eelmises peatükis. Teoreemi tõestasid esimestena 1930ndatel aastatel R. Sprague ja P. M. Grundy poolt. Grundy auks tähistatakse mänguseisu NIM-väärtust sageli ka $\mathcal{G}$ (nagu eelpool juba tegime).

- (Kodune ülesanne) Tõesta teoreem üldiste erapooletute mängude jaoks.

Teades lihtsamate (nt ühekuhjaliste) mängude NIM-väärtusi, saame paralleelselt mängitavate mängude jaoks leida vastavad väärtused NIM-liitmise abil. Kui seejuures on tulemuseks 0, siis võidab teisena käija, muidu alustaja.

Ühekuhjaliste mängude NIM-väärtused arvutame jällegi mex-funktsiooni abil samamoodi nagu eelmises peatükis. Vaatleme näitena mängu POOLITAJA. Kuna ei 0 ega 1 kiviga kuhjas keegi käia ei saa, siis $\mathcal{G}_{POOLITAJA}(0) = \mathcal{G}_{POOLITAJA}(1) = 0$. Edasi leiame:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{POOLITAJA}(2) &= \text{mex}\{\mathcal{G}_{POOLITAJA}(1,1)\} = \\
&= \text{mex}\{\mathcal{G}_{POOLITAJA}(1) \overset{*}{+} \mathcal{G}_{POOLITAJA}(1)\} = \\
&= \text{mex}\{0 \overset{*}{+} 0\} = \text{mex}\{0\} = 1, \\
\mathcal{G}_{POOLITAJA}(3) &= \text{mex}\{\mathcal{G}_{POOLITAJA}(1,1,1), \mathcal{G}_{POOLITAJA}(1,2)\} = \\
&= \text{mex}\{0 \overset{*}{+} 0 \overset{*}{+} 0, 0 \overset{*}{+} 1\} = \text{mex}\{0,1\} = 2, \\
\mathcal{G}_{POOLITAJA}(4) &= \text{mex}\{\mathcal{G}_{POOLITAJA}(2,2)\} = \\
&= \text{mex}\{\mathcal{G}_{POOLITAJA}(2) \overset{*}{+} \mathcal{G}_{POOLITAJA}(2)\} = \\
&= \text{mex}\{1 \overset{*}{+} 1\} = \text{mex}\{0\} = 1, \\
\mathcal{G}_{POOLITAJA}(5) &= \text{mex}\{\mathcal{G}_{POOLITAJA}(1,2,2), \mathcal{G}_{POOLITAJA}(2,3)\} = \\
&= \text{mex}\{0 \overset{*}{+} 1 \overset{*}{+} 1, 1 \overset{*}{+} 2\} = \text{mex}\{0,3\} = 1.
\end{aligned}$$

Nii jätkates näeme, et iga $m \geq 4$ korral $\mathcal{G}_{POOLITAJA}(m) = 1$. Alustaja kaotab mängu POOLITAJA parajasti siis, kui kuhjade NIM-väärtuste NIM-summa on 0, mis omakorda on nii parajasti siis, kui kuhje suurusega 3 on paarisarv ning kuhje suurustega $2, 4, 5, \ldots$ on ka kokku paarisarv. Igal muul juhul alustaja võidab.

4 Veel ülesandeid

- Laual on hulk kivikuhje. Oma käigul tohib mängija võtta mingist kuhjast 1, 2 või 3 kivi. Kes enam käia ei saa, kaotab. Leia, milliste algseisude korral kes võidab.

- BW 2004-14.