1 Kompleksarvud ja geomeetria

1.1 Kompleksarvu definitsioon, tehted kompleksarvudega

Definitsioon 1.1 Kompleksarvuks *nimetatakse avaldist kujul*

$$a + bi,$$

kus $a, b \in \mathbb{R}$. *Kõigi kompleksarvude hulka* $\{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ *tähistatakse sümboliga* $\mathbb{C}$. *Sümbolit* i *nimetatakse* imaginaarühikuks. *Arvu* a *nimetatakse kompleksarvu* reaalosaks, *avaldist* bi *aga* imaginaarosaks.

Kui $b = 0$, jääb kompleksarvust $a+bi$ järele lihtsalt reaalarv a. Kui aga $a = 0$, nimetatakse arvu bi *puhtimaginaararvuks*.

Kompleksarvude liitmine ja lahutamine toimub nii, nagu oleks tegu tavalise kaksliikmega, kus a on vabaliige ja i muutuja, st

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i,\\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i.\end{aligned}$$

Kahe kompleksarvu korrutamine toimub samuti samal põhimõttel, lisaks loetakse $i^2 = -1$:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + ad \cdot i + bc \cdot i + bd \cdot i^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Kompleksarvude jagamisel tuleb jagaja enne reaalarvuks teisendada:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Ülesanne 1.1. Tõesta, et

1. $\forall z, w \in \mathbb{C}\, [z + w = w + z]$;
2. $\forall z, w, t \in \mathbb{C}\, [(z + w) + t = z + (w + t)]$;
3. $\exists e \in \mathbb{C}\, \forall z \in \mathbb{C}\, [z + e = e + z = z]$;
4. $\forall z, w \in \mathbb{C}\, [(z + w) - w = z]$;
5. $\forall z, w \in \mathbb{C}\, [z \cdot w = w \cdot z]$;
6. $\forall z, w, t \in \mathbb{C}\, [(z + w) \cdot t = z \cdot t + w \cdot t]$;
7. $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \left[\frac{1}{z} \cdot z = 1\right]$.

Vali veel mõni reaalarvude aritmeetiline omadus ja kontrolli, et see kehtib ka kompleksarvude korral.

1.2 Komplekstasand, kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Kompleksarvud ja koordinaattasandi punktid võib seada üksühesesse vastavusse:

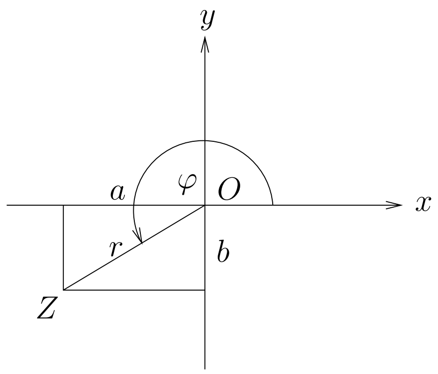
$$a + bi \longleftrightarrow (a, b).$$

Kui tasandi punktide koordinaate vaadeldakse kompleksarvudena, kõneldakse *komplekstasandist*.

Siin ja edaspidi tähistame kompleksarve ladina väiketähtedega ja neile vastavaid tasandi punkte vastavate suurtähtedega, kui kontekstist ei selgu vastupidist.

Olgu komplekstasandi nullpunkt $o = 0 + 0i$ ning olgu tasandil võetud mingi nullist erinev punkt $z = a + bi$. Ülaltoodud kokkuleppe kohaselt võime siis kirjutada ka $O(0, 0)$ ja $Z(a, b)$.

Olgu punkti Z kaugus nullpunktist r ning kiire OZ ja x-telje vaheline (positiivne!) nurk φ.



Siis kehtivad seosed

$$\begin{aligned} a &= r \cdot \cos\varphi, \\ b &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

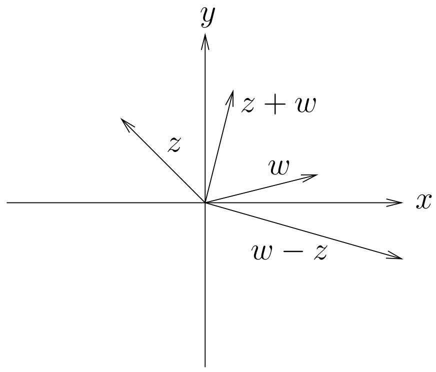
ja järelikult

$$z = a + bi = r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Definitsioon 1.2 *Kuju* $r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ *nimetatakse kompleksarvu* z trigonomeetriliseks kujuks. *Arvu* r *nimetatakse kompleksarvu* z mooduliks *ja nurka* φ *tema* argumendiks. *Kompleksarvu* z *moodulit tähistatakse* $|z|$ *ja argumenti* $Arg(z)$.

1.3 Tehted komplekstasandil

Kuna kompleksarvu reaal- ja imaginaarosa vastavad üksüheselt vastava tasandi punkti x-ja y-koordinaadile, on kompleksarvude liitmine ja lahutamine lihtsalt käsitletav vastavate vektorite liitmise ja lahutamisena.



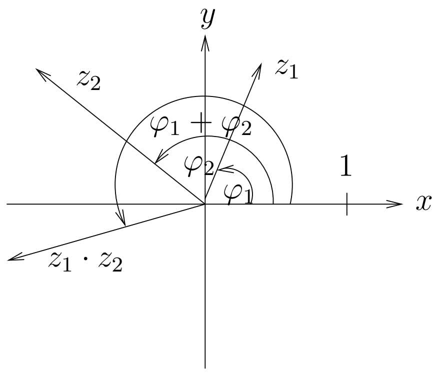
Kahe kompleksarvu korrutamiseks vaatleme nende trigonomeetrilist kuju. Olgu antud kompleksarvud

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{ja} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Nende korrutis avaldub siis kujul

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Niisiis: *kahe kompleksarvu korrutis on kompleksarv, mille moodul on algsete kompleksarvude moodulite korrutis ja mille argument on algsete kompleksarvude argumentide summa.*



Ülesanne 1.2. Kompleksarvu naturaalarvuline aste defineeritakse analoogiliselt reaalarvudega: $z^2 = z \cdot z$, $z^3 = z \cdot z \cdot z$ jne. Olgu n naturaalarv. Leia kõik sellised kompleksavud z, et $z^n = 1$.

Ülesanne 1.3. Tõesta, et kahe kompleksarvu jagatis on kompleksarv, mille moodul on algsete kompleksarvude moodulite jagatis ja mille argument on algsete kompleksarvude argumentide vahe.

Ülesanne 1.4. Tõesta, et sirgete OZ ja OW vaheline nurk võrdub kompleksarvu $\frac{w}{z}$ argumendiga. Kuidas leida sirgete ZW ja TU vahelist nurka suvaliste punktide Z, W, T, U korral?

1.4 Kompleksarvu kaaskompleks ja pöördarv

Definitsioon 1.3 *Kompleksarvu* $z = a + bi$ kaaskompleksarvuks (kaaskompleksiks) *nimetatakse kompleksarvu* $a - bi$ *ja seda tähistatakse* $\overline{z}$.

Ilmselt on kompleksarv reaalarv parajasti siis, kui $z = \overline{z}$.

Ülesanne 1.5. Tõesta, et

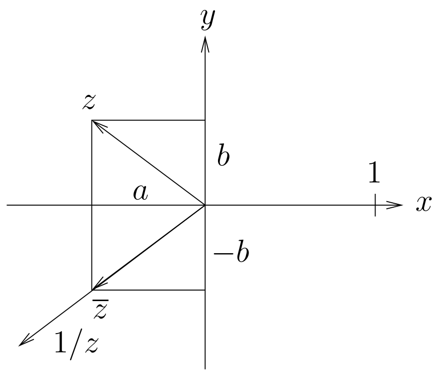
1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
2. $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$;
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$;
5. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$,
6. $\overline{\overline{z}} = z$.

Geomeetriliselt tähendab kaaskompleksi leidmine peegeldust tasandi x-teljest.

Kompleksarvu pöördarvu olemuse mõistmiseks vaatleme jälle trigonimeetrilist kuju. Olgu antud kompleksarv $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, siis

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{r} \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r} \cdot (\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).\end{aligned}$$

Järelikult on *antud kompleksarvu pöördarvu moodul selle kompleksarvu enda mooduli pöördarv, argument aga on sama suur teise suunaga nurk.*



Jooniselt võime näha, et kompleksarvud $\overline{z}$ ja $\frac{1}{z}$ asuvad samal nullpunktist lähtuval kiirel, kusjuures $\overline{z} = \frac{1}{z}$ parajasti siis, kui $|z| = 1$ ehk kui kompleksarv z asub tasandi ühikringjoonel.

1.5 Tasandi teisendused komplekskujul

Osutub, et kõiki klassikalisi tasandi teisendusi saab väga lihtsalt ja mugavalt esitada kompleksarvude keeles. Kui meil on komplekstasandil antud kaks teisendust $f(z)$ ja $g(z)$, siis nende kompositsioon esitub kujul

$$f \circ g : z \mapsto g(f(z)).$$

1.5.1 Lüke

Punkt $Z(z)$ kujutub lükkel vektori $\overrightarrow{OA}$ (= kompleksarvu a = vektori $\overrightarrow{a}$) võrra punktiks $z + a$:

$$T_{\overrightarrow{a}} : z \mapsto z + a.$$

Ülesanne 1.6. Tõesta, et kahe lükke kompositsioon on lüke.

1.5.2 Tsentraalsümmetria

Tsentraalsümmetria nullpunkti O suhtes avaldub kujul

$$S_O : z \mapsto -z,$$

tsentraalsümmeetria suvalise punkti W suhtes aga

$$S_W : z \mapsto -(z - w) + w = 2w - z.$$

Ülesanne 1.7. Tõesta, et kahe tsentraalsümmeetria kompositsioon on lüke. Kas suvalise lükke saab esitada kahe tsentraalsümmeetria kompositsioonina?

Ülesanne 1.8. Tõesta, et lükke ja tsentraalsümmeetria kompositsioon (ükskõik kumba enne rakendades) on tsentraalsümmeetria.

1.5.3 Pööre

Pööre nullpunkti O ümber nurga φ võrra vastupäeva avaldub kujul

$$R_O^\varphi : z \mapsto z \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

ning pööre punkti W ümber nurga φ võrra vastupäeva kujul

$$R_W^\varphi : z \mapsto (z - w) \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) + w.$$

Ülesanne 1.9. Tõesta, et kui kahe pöörde nurkade summa ei ole 360° kraadi kordne, siis on nende pöörete kompositsioon samuti pööre. Mis saab, kui pöörete nurkade summa on 360°?

1.5.4 Homoteetia ja pöördehomoteetia

Homoteetia kordajaga $r \in \mathbb{R}$ keskpunktiga nullpunktis avaldub kujul

$$H_O^r : z \mapsto r \cdot z$$

ning homoteetia kordajaga $r \in \mathbb{R}$ keskpunktiga punktis W avaldub kujul

$$H_W^r : z \mapsto r \cdot (z - w) + w.$$

Pöördeomoteetia kordajaga $r \in \mathbb{R}$ keskpunktiga nullpunktis ja nurgaga φ avaldub kujul

$$H_O^{r,\varphi} : z \mapsto r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot z$$

ning pöördeomoteetia kordajaga $r \in \mathbb{R}$ keskpunktiga punktis W ja nurgaga φ avaldub kujul

$$H_W^{r,\varphi} : z \mapsto r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot (z - w) + w$$

Tähistades $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = t$, avalduvad pöördehomoteetia teisendused samal kujul kui tavalise homoteetia omad, ainult homoteetsustegur on kompleksarv:

$$H_O^{r,\varphi} : z \mapsto t \cdot z, \quad H_W^{r,\varphi} : z \mapsto t \cdot (z - w) + w.$$

Ülesanne 1.10. Tõesta, et kui $r_1 r_2 \neq 1$, siis on kahe homoteetia kompositsioon samuti homoteetia. Tõesta analoogine väide pöördehomoteetia korral.

1.5.5 Telgsümmeetria

Punkti Z peegeldus x-teljest avaldub kujul

$$S_x : z \mapsto \overline{z}.$$

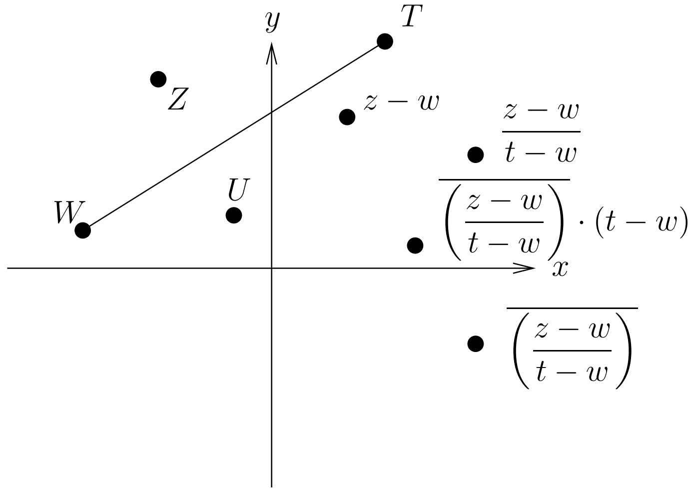
Leidmaks, kuidas avaldub telgsümmeetria suvalisest sirgest, olgu punkt U punkti Z peegeldus sirgest WT. Kõigepealt tuleb sirge WT viia x-teljeks. Selleks teisendame punkti W nihkega nullpunktiks (punkt z teiseneb siis punktiks $z - w$) ning pöörame seejärel tasandit vektori $\overrightarrow{WT}$ tõusunurga võrra päripäeva. Viimane operatsioon tähendab komplekstasandil jagamist suurusega $t - w$. NB! Kuna kompleksarvu $t - w$ moodul ei pruugi olla 1, tähendab see pööre ka homoteetiat, mis hiljem kompenseeritakse (vt allpool). Selliste operatsioonide tagajärjel teisendub punkt z punktiks $\dfrac{z - w}{t - w}$.

Järgmiseks peegeldame seda punkti x-telje suhtes ning saame punkti $\overline{\left(\dfrac{z - w}{t - w}\right)}$. Nüüd teeme ülalsooritatud pöördehomoteetia pöördteisenduse, korrutades saadud kompleksavaldist suurusega $t - w$. Teisenduste seeria lõpetab lüke vektori $\overrightarrow{OW}$ võrra tagasi, mis arvutuslikult tähendab suuruse w liitmist. Kokkuvõtteks oleme saanud

$$u = \overline{\left(\frac{z - w}{t - w}\right)} \cdot (t - w) + w$$

ehk

$$\frac{u - w}{t - w} = \overline{\left(\frac{z - w}{t - w}\right)}.$$



1.5.6 Inversioon

Definitsioon 1.4 *Inversiooniks ringjoone $C(I, r)$ suhtes nimetatakse teisendust, mis viib tasandi suvalise punkti $X \neq I$ punktiks X', mis asub kiirel IX ja rahuldab seost $|IX| \cdot |IX'| = r^2$.*

Inversioon komplekstasandi ühikringjoone suhtes avaldub kujul

$$I_O^1 : z \mapsto \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Ülesanne 1.11. Leia, millisel kujul avaldub inversioon suvalise keskpunkti ja suvalise inversiooniringjoone raadiuse korral.

Ülesanne 1.12. Tõesta, et inversioon on iseenda pöördteisendus.

Ülesanne 1.13. Tõesta, et inversioon säilitab joontevahelised nurgad.

1.6 Lihtsaid ülesandeid

Ülesanne 1.14. Tõesta, et kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt M avaldub valemiga

$$m = \frac{a+b+c}{3}.$$

Ülesanne 1.15. Olgu kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunktiks nullpunkt $O(0)$. Tõesta, et kolmurga kõrguste lõikepunkt H avaldub valemiga

$$h = a + b + c.$$

Ülesanne 1.16. Tõesta, et punktid D, E, F asuvad ühel sirgel parajasti siis, kui

$$\begin{vmatrix} e-d & \overline{e}-\overline{d} \\ f-d & \overline{f}-\overline{d} \end{vmatrix} = 0.$$

Ülesanne 1.17. Tõesta, et $\angle ABC = \angle DEF$ parajasti siis, kui suurus

$$\frac{c-b}{a-b} : \frac{f-e}{d-e}$$

on positiivne reaalarv. Tõesta, et selle suuruse väärtus on siis

$$\frac{BC \cdot DE}{AB \cdot EF}.$$

Ülesanne 1.18. Tõesta, et kolmnurgas ABC kehtib seos $\angle ACB = 2\angle ABC$ parajasti siis, kui suurus

$$\left(\frac{a-b}{c-b}\right)^2 : \frac{b-c}{a-c}$$

on positiivne reaalarv.

1.7 Raskeid ülesandeid

Ülesanne 1.19. Olgu M ja N sellised punktid kolmnurga ABC sees, et kehtivad võrdused

$$\angle MAB = \angle NAC \quad \text{ja} \quad \angle MBA = \angle NBC.$$

Tõesta, et

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

Ülesanne 1.20. Olgu kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt H, ümberringjoone keskpunkt O ja ümberringjoone raadius R. Olgu D punkti A peegeldus sirgest BC, E punkti B peegeldus sirgest CA ja F punkti C peegeldus sirgest AB. Tõesta, et punktid D, E, F asuvad ühel sirgel parajasti siis, kui $OH = 2R$.

Ülesanne 1.21. Olgu $ABCDEF$ kumer kuusnurk, milles kehtivad seosed $\angle B + \angle D + \angle F = 360°$ ja

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Tõesta, et

$$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1.$$