Invariandid

Invariandiks nimetame ülesandes vaadeldava objekti mingit sellist omadust, mis teisendamiste käigus ei muutu.

Näide 1. Tahvlil on arvud $1, 2, \ldots, 2000$. Tahvlilt kustutatakse samm-sammult kaks arvu ja kummagi asemel kirjutatakse nende arvude aritmeetiline keskmine. Kas mingi lõpliku arvu selliste sammude järel võivad tahvlil olla arvud $1000, 1000, \ldots, 1000$?

Lahendus. Olgu need kaks arvu, mis kustutatakse, a ja b, seega asemele kirjutatakse arvud $\frac{a+b}{2}$ ja $\frac{a+b}{2}$. Et $a+b = \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}$ ja teised arvud tahvlil ei muutu, siis jääb tahvlil oleva 2000 arvu summa alati samaks. Alguses on arvude summa $1+2+\ldots+2000 = \frac{1+2000}{2} \cdot 2000 = 2001000$, küsitavas lõppseisus aga $2000 \cdot 1000 = 2000000$. Et need summad ei ole võrdsed ja teisenduste käigus summa ei muutu, ei ole võimalik saada tahvlile arve $1000, 1000, \ldots, 1000$.

Näide 2. Rahaautomaat annab raha peeneks vahetades iga mündi asemele alati viis münti. Kas selle automaadi abil on võimalik ühte metallmünti vahetada 26-ks mündiks?

Lahendus. Automaat annab iga mündi vastu viis münti, seega suureneb iga vahetamisega müntide arv 4 võrra. Et alguses on üksainus münt (müntide arv annab neljaga jagamisel jäägi 1), siis ka pärast iga vahetust annab müntide arv neljaga jagamisel jäägi 1. Et aga arv 26 annab jäägi 2 neljaga jagamisel, ei ole võimalik saada selle automaadi abil ühe mündi asemele 26 münti.

Ülesandeid

1. Tahvlile kirjutatakse ritta arvud $1, 2, \ldots, 2007$. Edasi tegutsetakse nii, et igal sammul kustutatakse rea algusest kaks arvu ära ja kirjutatakse nende korrutis rea lõppu juurde. Milline arv jääb lõpuks ainsana tahvlile?

2. Tünnis on 2007 õuna. Maarja ja Andre võtavad vaheldumisi tünnist õunu, kusjuures korraga võib võtta ühe kuni kolm õuna ning esimesena võtab õunu Maarja. Kes mängijatest saab alati tagada endale võimaluse võtta tünnist viimane õun?

3. Kaur arvutas arvu $A_1 = 2007^{2008}$ ja liitis kokku kõik selle arvu numbrid, saades A_2. Seejärel arvutas ta A_2 numbrite summa, saades A_3. Ta jätkas numbrite kokkuliitmist, kuni tal jäi alles ühekohaline arv. Aare tegi omakorda läbi samad operatsioonid arvuga 2008^{2007} ning sai lõppvastuseks sama ühekohalise arvu, mis Kaur. Kas poisid arvutasid õigesti?

4. Tahvlile on kirjutatud arvud 4, 5 ja 6. Ühe sammuga võib valida kaks tahvlil olevat arvu, olgu need a ja b, kustutada need ning asemele kirjutada arvud $0{,}6a - 0{,}8b$ ja $0{,}8a + 0{,}6b$. Kas lõpliku arvu selliste sammude järel võivad tahvlil olla arvud 1, 6 ja 6?

5. Ringjoonel asub 12 lampi. Alguses üks neist põleb, ülejäänud ei põle. Ühe sammuga saab muuta suvalise kahe kõrvutiasetseva lambi olekud. Kas mingi arvu selliste sammude rakendamisel on võimalik saavutada olukord, kus ringjoonel põleb
   a) täpselt iga neljas lamp?
   b) täpselt iga kuues lamp?

6. Õpetaja kirjutab tahvlile 2002-kohalise arvu $999\ldots9$. Esimene õpilane lahutab selle arvu kahe 1-st suurema teguri a ja b korrutiseks ning kustutab siis tahvlil oleva arvu ja kirjutab selle asemele kaks sellist arvu a' ja b', et $|a-a'| = 2$ ja $|b-b'| = 2$. Teine õpilane valib ühe tahvlil olevatest arvudest, lahutab selle arvu kahe 1-st suurema teguri c ja d korrutiseks ning kustutab siis valitud arvu tahvlilt ja kirjutab selle asemele kaks sellist arvu c' ja d', et $|c-c'| = 2$ ja $|d-d'| = 2$. Kolmas õpilane valib omakorda ühe tahvlil olevatest arvudest ning asendab selle sama reegli kohaselt kahe uue arvuga, jne. Kas on võimalik, et pärast seda, kui mingi arv õpilasi on käinud tahvli juures, on kõik tahvlil olevad arvud võrdsed 9-ga?

Värvimised

Ka värvimine kujutab endast ühte invariandi liiki. Vaatleme näiteks kaht järgmist ülesannet.

Näide 3. Malelauast lõigatakse välja üks nurgaruut. Kas järelejäänud osa on võimalik tükeldada 2×1 tükkideks?

Näide 4. Malelauast lõigatakse välja kaks teineteise vastas asuvat nurgaruutu. Kas järelejäänud osa on võimalik tükeldada 2×1 tükkideks?

Tükeldamisena mõistame mingi hulga jaotamist tükkideks (alamhulkadeks) nii, et ühelgi kahel tükil ei ole ühisosa ning tükeldatava hulga iga element kuulub ühte neist tükkidest.

Lahendades näidet 3 me tõenäoliselt invariandist ei mõtle. Siiski, võime võtta invariandiks 2×1 tükkidest moodustatud mistahes kujundi omaduse koosneda paarisarvust malelaua ruutudest. Et terve malelaud koosneb 64 ruudust, siis ilma ühe nurgaruuduta malelaud koosneb 63 ruudust. Et see on paaritu arv, siis ei ole nõutud tükeldus võimalik.

Näite 4 puhul koosneb ilma kahe nurgaruuduta malelaud 62 ruudust, niisiis ei saa paarsus olla takistuseks tükeldamisel. Tuleb leida mingi teine invariant või olemasolev tükeldusviis (kui saab tükeldada).

Paneme tähele, et iga 2×1 tükk sisaldab täpselt ühe valge ja ühe musta malelaua ruudu. Niisiis, kui meil oleks 31 sellist tükki, sisaldaks nad 31 valget ja 31 musta ruutu. Kuid meie vaadeldaval nurkadeta malelaual on üht värvi ruute 32 ja teist värvi ruute 30. Järelikiult soovitud tükeldamine pole võimalik.

Ülesandeid

1. Kas oda saab mingist ruudust alustades kõik malelaua ruudud läbi käia? Aga ratsu?
2. Lõpmatul malelaual paiknevad 7002 maleratsut. Tõesta, et nende hulgast on võimalik välja valida 2007 sellist, millest ükski pole teise tule all.
3. Olgu meil malelaual ratsu asemel "sõjaratsu", kes liigub kolm sammu mingis suunas ja ühe sammu kõrvale. Kas sõjaratsu saab mingist ruudust alustades kõik malelaua ruudud läbi käia?
4. Ruudustiku 5×5 igal ruudul istub üks konn. Teatud üuhel ja samal hetkel hüppab iga konn naaberruudule, mis omas esialgsega ühist serva. Tõesta, et pärast hüppamist jääb ruudustikku väahemalt üks tühi ruut.
5. Kas 10×10 ruutu saab lõigata 1×4 ristkülikuteks?
6. Hiir hakkab sööma juustust kuubikut, mille serva pikkus on 3 ja mis on jaotatud 27-ks ühikkuubiks. Kui hiir on ära söönud mingi ühikkuubi hakkab ta sööma järgmist ühikkuupi, millel oli eelnevaga ühine tahk. Kas hiir saab ära süüa kõik ühikkuubid peale keskmise?
7. Kas $10 \times 10 \times 10$ kuupi saab tükeldada $1 \times 4 \times 4$ risttahukateks?
8. Kas mänguvälja mõõtmetega 10×10 ruutu saab katta
   a) 4 ühikruudust koosnevate L-kujuliste kujunditega;
   b) 4 ühikruudust koosnevate T-kujuliste kujunditega;
   c) nii L-kui ka T-kujuliste kujunditega?
9. Karlsson ja Väikevend tahavad omavahel jaotada $m \times n$ ruudust koosnevat šokolaaditahvlit. Selleks lõikavad nad kordamööda tahvlist tükke. Karlsson nõudis, et tema tohib iga kord lõigata ühe 2×2 tüki, Väikevend aga ühe 1×1 tüki. Väikevend jäi nõusse tingimusel, et kui Karlsson enam ühtegi soovitud suurusega tükki lõigata ei saa, saab Väikevend kogu järelejäänud šokolaadi. Kumb saab mõlema poole parima strateegia korral rohkem šokolaadi, Karlsson või Väikevend?
10. Ristkülikukujulise karbi põhi täideti tükkidega suurusega 2×2 ja 1×4. Tükid võeti karbist välja ja üks 2×2 tükk kaotati ära. Selle asemel leiti lisaks üks 1×4 tükk. Tõesta, et nüüd ei saa karbi põhja nende tükkidega katta.
11. Kas 2007×2007 malelauda saab katta 4×1 klotsidega nii, et ainult malelaua keskmine ruut jääb katmata? (Eeldame, et iga klots katab täpselt neli malelaua ruutu.)
12. Ruudustik mõõtmetega 5×5 kaetakse kaheksa nurgikuga (kolmest ühikruudust koosnev kujund) nii, et üks ruut jääb vabaks. Tee kindlaks kõik ruudustiku ruudud, mis võivad pärast katmist vabaks jääda.
13. Antud on ruuduline mängulaud mõõtmetega 2007×2007. Mängulaua mingile ruudule asetatakse nupp, millega on lubatud teha kahte tüüpi käike: nupu võib nihutada kas suvalisele sellisele naaberruudule, millel on senise ruuduga ühine külg, või suvalisele sellisele naaberruudule, millel on senise ruuduga ühine tipp, kuid mitte ühist külge. Kaks järjestikust käiku peavad alati olema erinevat tüüpi. Kas on võimalik valida lähteruut ja järgnevad käigud nii, et nupp viibiks mängulaua igal ruudul täpselt üks kord (lõpetades lähteruudust erineval ruudul)?