Juhend matemaatiliste väidete tõestamiseks

Üldist

Väite **tõestamine** tähendab sellele väitele tõestuse esitamist.

Tõestus kujutab endast sammsammulist arutlust, kus iga esitatud väide on ilmselt põhjendatud eelmiste väidete, selgelt formuleeritud eelduste, tuntud matemaatikatõdede ja/või terve mõistusega.

Väite P **tõestus** on tõestus, mille viimase arutlussammuna põhjendatakse väide P, kusjuures see samm ei tugine ei otseselt ega kaudselt tõestuse jooksul meelevaldselt juurde võetud lisaeeldustele.

Tõestussammud

Järgnevas vaatame ükshaaval läbi klassikalised elementaararutlussammud. Muuhulgas saab siis täpselt selgeks ka see, mida eelmise jaotise viimases lõigus mõeldakse mingile eeldusele tuginemise all.

Arutlusreeglid on grupeeritud selle järgi, milliste lausekonstruktsioonidega nad seonduvad. Iga lausekonstruktsiooni jaoks on vähemalt üks reegel, mille järgi selliselt konstrueeritud väiteid saab põhjendada, ja vähemalt üks reegel, mille järgi selliselt konstrueeritud eeldustest saab järeldusi teha. Seega ütleb antud eelduste ja tõestatava väite ehitus suuresti ette, kuidas ülesandele võiks läheneda.

Reegliskeemide järel on nende tähendust selgitatud ja toodud neile vastavaid näitearutlusi. Muidugi tuleb aru saada, et kui arutluse eeldused on väärad, ei maksa ka järeldustest targemat loota. Kõik loogikareeglid võimaldavad vaid tõestest eeldustest tõeseid järeldusi teha.

Konjunktsioon

Suvaliste väidete P, Q korral tähistab $P \wedge Q$ väidet, millele loomulikus keeles vastavad ligikaudu konstruktsioonid “P ja Q”, “nii P kui ka Q”, “P, kuid Q” jne. Tehet $\wedge$, samuti väidet kujul $P \wedge Q$, nimetatakse **konjunktsiooniks**.

Konjunktsiooniga seonduvad arutlusreeglid on väga lihtsad ja ilmselt ei vaja lähemaid sisulisi selgitusi. Skemaatiliselt kujutatakse neid järgmiselt.

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q} \qquad\qquad \frac{P \wedge Q}{P} \qquad\qquad \frac{P \wedge Q}{Q}$$

Esimene skeem ütleb, et kui meil mingite väidete P, Q korral on teada nii P kui Q kehtivus, saame järeldada $P \wedge Q$.

Näide. *Teame, et aastal 1996 valiti Eesti presidendiks Lennart Meri. Samuti on teada, et aastal 2001 valiti Eesti presidendiks Arnold Rüütel.*

Järelikult 1996 valiti Eesti presidendiks Lennart Meri, kuid 2001 Arnold Rüütel.

Teine skeem ütleb, et alati, kui meil mingite väidete P, Q korral on teada $P \wedge Q$ kehtivus, saab sellest järeldada P.

Näide. *Päikene paistab ja loodus lokkab.*

Järelikult päikene paistab.

Analoogselt sätestab viimane skeem, et alati, kui meil mingite väidete P, Q korral on teada $P \wedge Q$ kehtivus, saab sellest järeldada Q.

Näide. *Päikene paistab ja loodus lokkab.*

Järelikult loodus lokkab.

On ilmne, et kokku fikseerivad need reeglid täpselt konjunktsiooni soovitud tähenduse. Seejuures esimene skeem formuleerib võimaliku arutlussammu selleks, et konjunktsiooni kujul väidet põhjendada, järgnevad kaks skeemi formuleerivad aga võimalikud arutlussammud olukorra jaoks, kus meil on konjunktsiooni kujul väide teada.

Implikatsioon

Suvaliste väidete P, Q korral tähistab $P \Rightarrow Q$ väidet, millele loomulikus keeles vastavad ligikaudu konstruktsioonid “kui P, siis Q”, “Q siis, kui P”, “P ainult siis, kui Q”, “P-st järeldub Q” jne. Tehet $\Rightarrow$, samuti väidet kujul $P \Rightarrow Q$, nimetatakse **implikatsiooniks**.

Implikatsiooniga seonduvad arutlusreeglid on konjunktsiooni omadest pisut keerukamad. Skemaatiliselt kujutatakse neid järgmiselt.

$$\frac{\begin{array}{c} P \\ \vdots \\ Q \end{array}}{P \Rightarrow Q} \qquad\qquad \frac{P \Rightarrow Q \qquad P}{Q}$$

Vasakpoolne skeem sätestab, et kui mingite väidete P, Q korral on lisaeeldusel P tõestatud Q, siis ilma selle eelduseta võib teha järelduse $P \Rightarrow Q$.

NÄIDE. *Oletame, et ma õpin kõik sessioonil räägitu hästi selgeks ja omandan ülesannete lahendamise nipid. Siis suudan ma piirkondlikus voorus kõik ülesanded ära teha, mistõttu mind kutsutakse lõppvooru. Et ma olen sessioonil räägitu hästi selgeks õppinud ja kõik ülesannete lahendamise nipid omandanud, siis teen ma ka lõppvoorus kõik ülesanded ära, seega tulen lõppvoorus esimesele kohale, mis tähendab, et mind kutsutakse valikvõistlusele.*

Järelikult kui ma õpin kõik sessioonil räägitu hästi selgeks ja omandan ülesannete lahendamise nipid, siis kutsutakse mind kevadel valikvõistlusele.

Parempoolne skeem ütleb, et kui mingite väidete P, Q jaoks on teada väidete $P \Rightarrow Q$ ja P kehtivus, siis saab järeldada Q.

NÄIDE. *Kui Arno avaldab Teelele, kelleks ta saada tahab, siis ka Teele avaldab Arnole, kelleks tema saada tahab. Arno avaldab Teelele, kelleks ta saada tahab.*

Järelikult Teele avaldab Arnole, kelleks tema saada tahab.

Nagu esimesest reeglist näha, võib tõestuses lokaalselt esineda ka täiesti meelevaldselt lisatud eeldusi. Tõestamaks väidet kujul $P \Rightarrow Q$, me eeldame meelevaldselt P ja tõestame sellest lähtuvalt Q. Lisaeelduse P valik pole seejuures mitte millegagi piiratud, ta võib olla mis iganes vaja. Pangem tähele, et lõppjärelduse tegemisel meelevaldne eeldus hüljatakse: kui Q tõestamisel me tuginemegi lisaeeldusele P, siis $P \Rightarrow Q$ on sellega tõestatud ilma sellele lisaeeldusele tuginemata.

Disjunktsioon

Suvaliste väidete P, Q korral tähistab $P \vee Q$ väidet, millele loomulikus keeles vastab ligikaudu konstruktsioon "P või Q". Tehet $\vee$, samuti väidet kujul $P \vee Q$, nimetatakse **disjunktsiooniks**.

Disjunktsiooniga seonduvad arutlusreeglid on skemaatiliselt järgmised.

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{Q}{P \vee Q} \qquad \frac{P \vee Q \quad \begin{array}{c} P \\ \vdots \\ R \end{array} \quad \begin{array}{c} Q \\ \vdots \\ R \end{array}}{R}$$

Esimene ja teine skeem ütlevad kahepeale kokku, et kui on teada väidetest P ja Q emmakumma kehtivus, siis saab järeldada $P \vee Q$.

NÄIDE. *Juss õpib koolitükid hästi selgeks.*

Järelikult Juss õpib koolitükid hästi selgeks või taob terve õhtu väljas palli.

NÄIDE. *Juss taob terve õhtu väljas palli.*

Järelikult Juss õpib koolitükid hästi selgeks või taob terve õhtu väljas palli.

Need näited tunduvad mõneti kentsakad, sest tavaliselt kui on teada, kumb disjunktsiooni alternatiividest kehtib, siis väidetaksegi ainult seda ja disjunktsiooni ei formuleerita. Disjunktsioon sellest hoolimata kehtib (kujutagem ette, et Jussi ema ütleb selle disjunktsiooni kujul lause teile; niipea kui te veendute ühe või teise disjunktsiooni poole kehtivuses, olete automaatselt ka disjunktsiooniga nõus, tähendab rakendasite üht neist kahest arutlusreeglist).

Viimane skeem on olukorra jaoks, kus disjunktsiooni kujul väide on teada, ja ütleb, et kui nii üht kui teist alternatiivi eraldi eeldades on järeldatud mingi üks ja sama väide, siis sellesama väite saab järeldada ka disjunktsioonist ilma nende lisaeeldusteta.

NÄIDE. *Andrus läheb Tartust Tallinna bussi või rongiga. Vaatleme juhtu, kus ta läheb bussiga. Sõiduplaani kohaselt võtab tema sõit aega vähemalt 2 tundi ja 25 minutit, mis on üle 2 tunni. Vaatleme nüüd juhtu, kus ta läheb rongiga. Sõiduplaani kohaselt võtab rongisõit aega vähemalt 2 tundi 32 minutit, mis on samuti üle 2 tunni.*

Järelikult Andruse sõit võtab aega üle 2 tunni.

Ka disjunktsiooni kujul eelduse kasutamine võib nõuda meelevaldsete lisaeelduste sissetoomist, nagu see oli implikatsiooni põhjendamise korral. Kui meil on teada, et kehtib $P \vee Q$, st üks väidetest P ja Q, kuid me ei tea, kumb nimelt kehtib, siis juhul, kui meil õnnestub nii P-st kui Q-st järeldada mingi üks ja sama väide R, saame selle väite R järeldada ka disjunktsioonist $P \vee Q$, sest oleme näidanud, et R kehtib sõltumata sellest, kumb väidetest P ja Q tegelikult paika peab.

Disjunktsiooni põhjendamise reeglid (toodud kolmest esimesed kaks skeemi) näitavad, et tegemist on nn **mittevälistava võiga**: disjunktsioon $P \vee Q$ kehtib ka siis, kui nii P kui Q kehtivad, sest nt esimese reegli rakendamisel ei ole oluline, kas disjunktsiooni teine pool kehtib või ei kehti (Juss võib pallimängimisest hoolimata koolitükid hästi selgeks õppida).

Eitus

Suvalise väite P korral tähistab $\neg P$ väidet, millele loomulikus keeles vastab ligikaudu konstruktsioon "ei ole õige, et P". Tehet $\neg$, samuti väidet kujul $\neg P$, nimetatakse **eituseks**.

Eitusega seonduvad reeglid esituvad järgmiste skeemidena.

$$\dfrac{\begin{array}{cc} P & P \\ \vdots & \vdots \\ Q & \neg Q \end{array}}{\neg P} \qquad\qquad \dfrac{\neg\neg P}{P}$$

Esimene skeem sätestab nn **vastuväitelise tõestuse** meetodi, kus selleks, et näidata mingi väite P eituse kehtivus ehk väite P mittekehtivus, oletatakse meelevaldselt P ja tuletatakse sellest vastuolu (väited Q ja $\neg Q$ mingi Q jaoks). Vastuolu ei saa tegelikult kehtida, seega saab järeldada, et ka meelevaldselt tehtud eeldus ei saa tegelikult paika pidada.

NÄIDE. *Oletame, et Osama bin Laden läks Estoniaga põhja. Siis Osama bin Laden suri 28. septembril 1994. Sellisel juhul oli ta surnud ka aastal 2001 ja ei saanud korraldada terrorirünnakuid USA-le, mis on vastuolus tuntud faktidega.*

Järelikult Osama bin Laden ei läinud Estoniaga põhja.

Viimane skeem formuleerib, et P eituse eitamine toob kaasa P jaatamise.

NÄIDE. *Ei ole õige, et inimene ei vaja toiduga loomseid valke.*

Järelikult inimene vajab toiduga loomseid valke.

Eitus ja eituse reeglid annavad loogikale olulise osa tema võimsusest — ülejäänud senivaadeldud tehetest võiksime alles jätta vaid ühe (ükskõik millise) ja väljendusvõimsus sellest ei kannataks.

Üldväide

Olgu P üldine väiteskeem ühe parameetriga. See tähendab, et iga mõtteka objekti x korral on $P[x]$ mingi väide, meil on tegemist n-ö väidete perega. Siis $\forall x\, P[x]$ tähistab väidet, millele loomulikus keeles vastavad ligikaudu konstruktsioonid “iga x korral $P[x]$”, “alati P” jne, kui aga P väljendub eesti keeles eitavalt, ütleb eesti keel *iga* asemel hoopis *ühegi*. Märki $\forall$ nimetatakse **üldisuskvantoriks**.

Üldisuskvantoriga seonduvad reeglid on väljendatavad järgmiste skeemidega.

$$\dfrac{\begin{array}{c} x \\ \vdots \\ P[x] \end{array}}{\forall x\, P[x]} \qquad\qquad \dfrac{\forall x\, P[x]}{P[t]}$$

Esimene skeem ütleb, et kui suvalise fikseeritud x korral on tõestatud $P[x]$, võib sellest järeldada $\forall x\, P[x]$.

NÄIDE. *Olgu x suvaline seaduskuulekas Läti kodanik. Seadused ei luba Eesti kodanikul olla samal ajal mõne teise riigi kodanikud, seega x ei ole Eesti kodanik. Eestit esindavasse rahvusvahelise olümpiaadi võistkonda aga võetakse ainult Eesti kodanikke. Seega x ei pääse Eestit esindavasse rahvusvahelise olümpiaadi võistkonda.*

Järelikult ükski seaduskuulekas Läti kodanik ei pääse Eestit esindavasse rahvusvahelise olümpiaadi võistkonda.

Selle tõestusvõtte puhul on oluline x suvalisus. Tema kohta ei tohi eeldada midagi, mis ei kehti tema iga mõtteka valiku korral, muidu me ei saaks tema abil saadud järeldusi üldistada kõigile mõttekatele objektidele.

Teine skeem ütleb, et kui on teada $\forall x\, P[x]$, võib sellest järeldada $P[t]$ mistahes (kontekstis mõtteka) suuruse t jaoks.

NÄIDE. *Iga kodanik on arvel rahvastikuregistris.*

Kuna mina olen kodanik, siis järelikult mina olen arvel rahvastikuregistris.

Olemasoluväide

Olgu P väiteskeem ühe parameetriga nagu üldväiteosaski. Siis $\exists x\, P[x]$ tähistab väidet, millele loomulikus keeles vastavad ligikaudu konstruktsioonid “mingi x korral $P[x]$”, “leidub x, mille korral $P[x]$”, “mõnikord P” jne. Märki $\exists$ nimetatakse **olemasolukvantoriks**.

Olemasolukvantoriga seonduvad reeglid on väljendatavad järgmiste skeemidega.

$$\dfrac{P[t]}{\exists x\, P[x]} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{cc} & x : P[x] \\ & \vdots \\ \exists x\, P[x] & Q \end{array}}{Q}$$

Vasakpoolne skeem ütleb, et kui $P[t]$ on teada mingi (kontekstis mõtteka) t korral, siis võib järeldada $\exists x\, P[x]$.

NÄIDE. *Pika Hermanni tornis lehvib sinimustvalge lipp.*

Järelikult leidub paik, kus lehvib sinimustvalge lipp.

See skeem formuleerib tõdemuse, et kui meil on lausa teada üks konkreetne väärtus t, mille korral $P[t]$ kehtib, siis tingimust P rahuldav objekt x ilmselt leidub.

Parempoolne skeem tegeleb olukorraga, kui olemasolukvantoriga algava väite kehtivus on teada. Ta sätestab, et kui suvalise (mõtteka) tingimust P rahuldava objekti x sissetoomise korral on õnnestunud tõestada mingi üks ja sama väide Q, siis võib Q järeldada ka väitest $\exists x\, P[x]$.

NÄIDE. *Teame, et Eestis leidub inimesi, kes sooritavad kuritegusid. Olgu x suvaline inimene, kes sooritab kuritegusid. Ilmselt peab Eesti politsei x-ga tegelema, Eesti politseil on tööd.*

Järelikult Eesti politseil on tööd.

Parempoolse skeemi puhul on oluline x suvalisus. Kui me teame väite $\exists x\, P[x]$ kehtivust, st teame, et P-d rahuldav element leidub, kuid me ei oska tuua konkreetset näidet ühestki sellisest elemendist, siis ei tohi sissetoodud x kohta eeldada midagi mittetriviaalset peale P, et järeldus Q oleks sõltumatu sellest, millise objekti x korral tegelikult $P[x]$ paika peab. Olukord on analoogiline disjunktsiooni viimase reegliga.

Matemaatika keele ja loomuliku keele seostest (eesti keele näitel)

Matemaatilise sümboolikaga tähistatavate lausekonstruktsioonide vastavust toodud loomuliku keele konstruktsioonidega ei tohiks võtta absoluutse tõena, sest kui matemaatilise teksti lausekonstruktsioonid omavad fikseeritud, ühest tähendust, siis loomulikus keeles lausekonstruktsioonide tähendus varieerub tugevalt sõltuvalt kontekstist ja siin viidatakse vaid kõige enam levinud tähendusele.

Teada on näiteks konstruktsiooni "kui P, siis Q" tähenduse uperpallid loomulikus keeles. Tihti juhtub, et niisuguse lause all mõeldakse hoopis implikatsiooni $Q \Rightarrow P$, mitte implikatsiooni $P \Rightarrow Q$ "nagu peaks". Aga näiteks eelmise lõigu viimase lause kõrvallause, mis algab sõna "sest" järel, on küll kujul "kui P, siis Q", kuid implikatsiooniga pole tal mingit pistmist ja tähendab hoopiski nende P ja Q konjunktsiooni. Konstruktsioon "kui ..., siis ..." esineb ka samaaegsuse tähenduses; näiteks "kui Arno isaga koolimajja jõudis, olid tunnid juba alanud" ei ole implikatsioon.

Samuti varieerub loomulikus keeles sidesõna *või* tähendus. Mõnikord tähendab lause kujul "P või Q" ühtlasi, et üks väidetest P ja Q peab olema vale (nn **välistav või**). Selline mõte esineb tavaliselt koos sissejuhatava sõnaga *kas* ("kas P või Q").

Ekvivalents

Suvaliste väidete P, Q korral tähistab $P \iff Q$ väidet, millele loomulikus keeles vastavad konstruktsioonid "P siis ja ainult siis, kui Q", "P parajasti siis, kui Q", "P ja Q on samaväärsed (ekvivalentsed)".

Formaalselt võib $P \iff Q$ defineerida kui implikatsioonide $P \Rightarrow Q$ ja $Q \Rightarrow P$

konjunktsiooni, st

$$P \iff Q \;=\; (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

Niisiis, "P siis ja ainult siis, kui Q" ehk "P parajasti siis, kui Q" tähendab definitsiooni põhjal seda, et nii P-st järeldub Q kui ka Q-st järeldub P.

On ilmne, et kui $P \iff Q$, siis et väidetest P ja Q kas kehtivad mõlemad või ei kehti kumbki, sest kui P ei kehti, siis ei saa $Q \Rightarrow P$ tõttu ka Q kehtida. Seega kui mingid väited P, Q on samaväärsed, siis igas kontekstis, kus on oluline vaid väidete tõesus või väärus, võib väiteid P ja Q teineteisega asendada.

Kokkuvõtteks

Iga matemaatikaülesande korralikus lahenduses peaks iga arutlussamm vastama ühele siintoodud skeemidest.

Põhimõtteliselt on võimalik isegi kogu matemaatika üles ehitada, kasutades vaid siintoodud loogikareegleid ja käputäit aksioome. Võistlustööde hindajad muidugi ei oota, et lahendus hakkaks peale sellistest universaalsetest aksioomidest. Nendega tegelevad matemaatilise loogika spetsialistid. Aksioome asendavad meil matemaatikas üldteada faktid ja ilmselged tõed.

Samuti on aktsepteeritav ja enamasti isegi vajalik mitme arutlussammu tegemine ühekorraga, jättes vahetulemused kirjutamata, kui need on kergesti läbi nähtavad ja taastatavad, sest kõigi vahetulemuste väljakirjutamisel veniks lahendus tarbetult pikaks.

Tihti pole tõestamist vajava väite eeldused ega väide esitatud otse niisugusel kujul, millele saaks otse rakendada siintoodud arutlusreegleid, vaid nad vajavad **lahtimõtestamist**, st neis kasutatud terminid tuleb vastavalt definitsioonile (või mõnele tuntud faktile) lahti kirjutada. Näiteks tõestamisel, et mingi arv p on algarv, tuleb tõenäoliselt näidata seda, et iga positiivse täisarvu a korral kui p jagub a-ga, siis $a = 1$ või $a = p$, toetudes sellele, et algarv olemine definitsiooni põhjal seda just tähendabki.

Mõned üldtuntud üldkehtivad väiteskeemid

Palju seaduspärasusi on võimalik tõestada loogikatasemel suvaliste väidete või väiteperede kohta, ilma et kasutataks nende konkreetset iseloomu. Nende üldkehtivuse tõttu võib neid nimetada **loogikaseadusteks**. Et omavahel samaväärseid väiteid võib matemaatilises tekstis üldjuhul teineteisega asendada, omavad erilist tähtsust just ekvivalentsi kujul esituvad seadused.

Järgnevas on toodud tähtsamad üldtuntud loogikatõed; P, Q, R tähistavad suvalisi väiteid.

Matemaatilises tekstis kasutatakse neid enamasti ilma neile isegi viitamata.

$$
\begin{array}{ll}
P \wedge P \iff P & P \vee P \iff P \\
P \wedge Q \iff Q \wedge P & P \vee Q \iff Q \vee P \\
P \wedge (Q \wedge R) \iff (P \wedge Q) \wedge R & P \vee (Q \vee R) \iff (P \vee Q) \vee R \\
P \vee \neg P & P \iff \neg\neg P \\
P \vee Q \iff \neg(\neg P \wedge \neg Q) & P \wedge Q \iff \neg(\neg P \vee \neg Q) \\
(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q & \\
(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R) & \\
(P \iff Q) \wedge (Q \iff R) \Rightarrow (P \iff R) & \\
(P \iff Q) \iff (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) & \\
\forall x\, \forall y\, P[x][y] \iff \forall y\, \forall x\, P[x][y] & \exists x\, \exists y\, P[x][y] \iff \exists y\, \exists x\, P[x][y] \\
\neg \forall x\, P[x] \iff \exists x\, \neg P[x] & \neg \exists x\, P[x] \iff \forall x\, \neg P[x]
\end{array}
$$

Nende lugemisel tuleb tähele panna, et loogikatehtemärkidel kehtib prioriteedisüsteem nagu aritmeetikatehtemärkidelgi, kus $+$ ja $-$ on madalama prioriteediga kui $\cdot$ ja $:$. Loogikatehtemärkidest on $\wedge$ ja $\vee$ kõrgema prioriteediga kui $\Rightarrow$ ja $\iff$; teisi sõnu, $\wedge$ ja $\vee$ seovad oma naabriks olevaid sümboleid tugevamini kui $\Rightarrow$ ja $\iff$. See tähendab, et näiteks $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ on sama mis $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ jne.

Lõpetuseks

Kasutades eelnevalt kirjeldatud reegleid, kujutab tõestuse kirjapanek endast väidete jada esitamist, kus iga väide järeldub eelmistest. Nimetame seda **loogilise järeldumise järjekorraks**.

Reaalselt ei ole selles iseenesest midagi halba, kui need väited pannakse kirja mõnes teises järjekorras. Peaasi on, et esitatud väited on põhimõtteliselt võimalik loogilise järeldumise järjekorda panna ning see on ka kirjapandud arutlusest kergesti näha.

NÄIDE. *Olgu ülesandeks leida arv x, mis rahuldab tingimust $x + 6 = 3x$.*

Õpilane kirjutab lahenduseks:

$$
\begin{aligned}
x + 6 &= 3x \\
2x &= 6 \\
x &= 3
\end{aligned}
.
$$

Siin on arutlussammud tehtud tagurpidi, sest näidata tuleb, et arv 3 rahuldab tingimusi, st "kui $x = 3$, siis $x + 6 = 3x$", mitte "kui $x + 6 = 3x$, siis $x = 3$". Kuna aga korrektse tõestuse saamiseks piisab lihtsalt, kui lugeda kirjutatut lõpust alguse poole, saab õpilane siin täispunktid.

NÄIDE. *Olgu antud järgmine ülesanne. Vaatleme jada $a_1, a_2, \ldots$. Tõestada, et kui iga $i > 1$ korral kehtib võrdus $\frac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3} = a_i$, siis see jada on aritmeetiline.*

Õpilane kirjutab lahenduseks:

$$
\begin{array}{l}
a_{i-1} = a_i - d \qquad a_{i+1} = a_i + d \\
\dfrac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3} = \dfrac{a_i - d + a_i + a_i + d}{3} = \dfrac{3a_i}{3} = a_i
\end{array}
.
$$

Siin on samuti arutlus vales suunas: vaja on tõestada "kui $\frac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3} = a_i$, siis jada on aritmeetiline", tõestatakse aga hoopis "kui jada on aritmeetiline, siis $\frac{a_{i-1} + a_i + a_{i+1}}{3} = a_i$". Siin pole võimalik kirjutatu osade järjekorra muutmisega asja parandada ning õpilane jääb punktidest ilma. (See on 2002 piirkondliku vooru 12. klassi 5. ülesanne, õiget lahendust vaata veebist.)

Tihti valitakse tõestamisel väidete esitamiseks just loogilise järeldumise järjekorrale vastupidine: arutlusega minnakse mitte eeldustest väite suunas, vaid väitest eelduste suunas. See tähendab, et alustatakse tõestatavast väitest ning igal sammul otsitakse ja pannakse kirja väide, mis arutluses kirjapandud veel tõestamata väiteid põhjendaks, kuni jõutakse olukorrani, kus kõik kirjapandud väited on tõestatud või kujutavad endast ülesandes antud eeldusi. Niisugust tõestuse kirjapaneku metoodikat nimetatakse **väite taandamiseks eeldustele** ja seda järgis korrektselt kahest viimatitoodud näitest esimene.

Tavaliselt ei moodusta väitest eelduste poole sooritatud sammud tervet kirjapandud arutlust, vaid seda metoodikat rakendatakse vaid kohati mugavuse mõttes. Tüüpiliseks näiteks on nn **üldisust kitsendamata eelduse** tegemine. Üldisust kitsendamata eelduse tegemine kujutab endast tagurpidisammu, kus põhjendatav üldine väide järeldatakse kergesti mõnest kitsamast väitest ning taandatakse nii üldisem ülesanne konkreetsemale. Samuti tähistab tagurpidisamme tihti sõnaühend "piisab näidata, et …".

Näiteks 2004 lõppvooru 9. klassi 2. ülesanne kõlas järgmiselt: "Viie erineva positiivse täisarvu a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 positiivsed vahed $a_i - a_j$ (neid vahesid on kokku 10) on kõik erinevad. Leia arvudest a_i suurima vähim võimalik väärtus.". Lahendus algab üldisust kitsendamata eeldusega, et $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. See kujutab endast tagurpidisammu: ülesanne kõikvõimalike arvuviisikute $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ kohta on taandatud probleemiks kasvavate arvuviisikute kohta. Seda saab teha: vastus kasvavate arvuviisikute jaoks sobib ka vastuseks kõigi arvuviisikute kohta, kuna viiest arvust suurima väärtus ei sõltu sellest, mis järjekorras need viis arvu on esitatud.

Tagurpidisamme sisaldavad 2004 lõppvooru ülesannetest veel 10-2 ja 12-1 lahendused. Ülesandes 10-2 taandatakse tõestatav väide, et punkt D paikneb nurga APC poolitajal, väitele, et D asub selle nurga haaradest võrdsel kaugusel. Ülesandes 12-1 taandatakse võrratuse $\angle KOL < 75°$ näitamine ühes olukorras mingi segmendi suuruse hinnangu näitamisele teises olukorras.