

Juhend ülesannete tekstidest arusaamiseks

Eessõna

Oleme matemaatikavõistlusi korraldades pidevalt tundnud, et paljud võistlejad kaotavad ülemäära palju punkte lihtsalt sellepärast, et mõistavad ülesande teksti valesti ja ei saa põhimõtteliseltki aru, mida neilt lahenduseks oodatakse.

Ülesande tekst võib olla võistlejale esitatud küll tema emakeeles, kuid mitmed tavakeelsed sõnad ja väljendid omavad matemaatilises tekstis oma spetsiifilist sisu, mida kogenematu võistleja ei tunne.

Peamine võimalus võistlusele tulijal enda sellekohaseks harimiseks on olnud harjutada matemaatiliste tekstide mõistmist eelmiste võistluste ülesandeid ja lahendusi uurides ja küsides: kui ülesande küsimus kõlab nii, siis mida on lahenduseks tegelikult tehtud? Käesolev juhend püüab huvilist selles osas aidata.

Järgnevas sõnastikutaolises osas on märksõnad ja -väljendid jaotatud tähenduse järgi gruppideks. Iga grupi juures on seletus, mida peab niisuguse väljendiga ülesandepüstituse korral lahendus sisaldama. Lisatud on nimekiri Eesti võistlustel aastal 2004 esinenud vastavasse gruppi kuuluvatest ülesannetest. Nende läbitöötamine peaks andma selgust, mida sellist tüüpi ülesannete puhul lahenduseks oodatakse. Seejuures on kasutatud järgmisi lühendeid.

LVS	sügisene lahtine võistlus	N- <i>n</i>	noorem rühm, ülesanne <i>n</i>
LVK	kevadine lahtine võistlus	V- <i>n</i>	vanem rühm, ülesanne <i>n</i>
PKV	olümpiaadi piirkondlik voor	<i>k-n</i>	<i>k-s</i> klass, ülesanne <i>n</i>
LPV	olümpiaadi lõppvoor		

Tõestusülesanded

Tõesta, et

Näita, et

Niisuguse ülesande puhul on lahenduseks nõutud väite tõestus. Kuna tõestamise mõiste lahtiseletamine nõuab teist niisama suurt “juhendit” ning see kuulub kõigest hoolimata veel mingil määral kooliprogrammi, siis siinkohal me tõestamisest lähemalt ei kirjuta.

Vastust tõestusülesandel ei ole.

Tõestusülesanded on võistlustel tavalisimad. Vaid mõned näited aastal 2004 toimunud võistlustelt on PKV 9-3, PKV 10-5, PKV 10-6b, PKV 11-1, PKV 11-4, LPV 9-4, LPV 10-3, LPV 11-2, LPV 11-3, LVS N-3, LVS N-4.

Tõestamine kuulub osana iga võistlusülesande lahendusse. Selles mõttes on selle tüüpi ülesanded kõigest kõige lihtsamad, kuna püstituses on ette öeldud, mida tuleb tõestada.

Täisvastusülesanded

Tüüpiline selle tüüpi ülesanne esitab lõpus küsimuse, millele lahendaja peab vastama. Küsimusi saab esitada väga palju erinevaid ja neid pole võimalik kõiki ette lugeda. Mõeldud on siin üldiselt niisuguseid ülesandeid, milles kästakse piiritleda mingi omadusega objektide hulk. Taoline püstitus võib olla antud ka ilma küsisõnata.

Milliste . . . korral . . . ?

Milline saab (võib) olla . . . ?

Leia kõik

Tee kindlaks kõik

jne, jne

Kõigi niisuguste ülesannete lahendusse kuuluvad

- vastus — küsitud objektide hulga kirjeldus, mis annab temast selge ettekujutuse,
- tõestus, et iga nõutud omadusega objekt on vastuseks antud hulga element,
- tõestus, et vastuseks antud hulga iga element on nõutud omadusega.

Vastuses ei ole tingimata vaja hulga elemente üksikhaaval üles lugeda. See on üldjuhul üldse võimatu, kuna vastuseks võib olla ka lõpmatu hulk.

Nimetatud kaht tõestust nimetatakse kokku *kahepoolseks tõestuseks*. Kahepoolne tõestus näitab, et antud vastus on täpne, st ükski otsitav objekt pole puudu ega sisalda vastusvõõrlahendeid.

Lahendusse ei kuulu kirjeldused, kuidas vastus leiti. Koolitunnis esitatavates lahendustes võib olla seda vaja kirjeldada, et näidata õpetajale teatavate lahendusvõtete valdamist, kuid olümpiaadidel piisab ülalloeletud tõestustest.

Näited aastal 2004 toimunud võistlustelt oleksid PKV 7-1, PKV 8-1, PKV 9-2, LVK V-2, LVK V-3, LPV 9-1, LPV 10-1, LPV 11-1, LPV 11-4, LVS N-2, LVS V-4.

Lahenda võrrand (võrrandisüsteem)

Ka võrrandi (võrrandisüsteemi) lahendamine kuulub siia tüüpi, sest võrrandi (võrrandisüsteemi) lahendamine tähendab kõigi võrrandit rahuldavate arvude (võrrandisüsteemi rahuldavate arvukomplektide) kindlaksmääramist.

Võrrandi (võrrandisüsteemi) lahendamise puhul kujutab kahepoolse tõestuse esimene pool endast lahendite leidmist ja teine pool kontrolli, et leitud lahendid sobivad.

Standardsete võrrandite (võrrandisüsteemide) korral ei pruugi siiski mõlemat poolt vaja olla, sest üks pool võib teisest tuntud fakti põhjal järelduda. Näiteks ruutvõrrandi puhul piisab täiesti lahendite leidmisest lahendivalemiga, mingit kontrolli pole vaja, sest on tuntud fakt, et kõik ruutvõrrandi lahendivalemiga leitud arvud rahuldavad võrrandit. Samuti

piisab ruutvõrrandi lahendamiseks tegelikult kahe lahendi kontrollimisest, sest on tuntud fakt, et rohkem lahendeid ühelgi ruutvõrrandil ei ole (muidugi juhul, kui pealiikme kordaja on nullist erinev). Ka kui lineaarne võrrandisüsteem lahendada standardsete võtetega lõpuni, pole analoogisel põhjusel lahendite kontrolli vaja.

Näiteks aastal 2004 toimunud võistlustelt oleks PKV 10-1.

Etteütlevad täisvastusülesanded

Ka selle ülesandeklassi tüüpiline esindaja esitab lahendajale küsimuse, millele on vaja vastata.

Millise ... korral ... ?

Milline on ... ?

Kumb ... ?

Leia ...

Arvuta ...

Avalda ... (... kaudu).

jne, jne

Nende küsimuste erinevus eelmisest küsimuseliigist seisneb selles, et küsimuseasetus viitab nõutud omadusega objekti olemasolule ja üheselt määratusele.

Niisugust küsimusevormi kasutatakse tavaliselt siis, kui ühesus on ülesande kontekstis ilmne (tihti on ilmne ka olemasolu). Siis piisab lahenduseks esitada vastus ning selle jaoks näidata, et ta rahuldab tingimusi. Paljudel juhtudel seisneb see vastuse “väljaarvutamises”. Juhtub aga ka seda, et küsimus asetatakse eeldavas vormis, samal ajal kui ühesus tegelikult ilmne ei ole. Sellisel juhul tuleb tõestus ka teises suunas läbi viia, näidates, et teisi nõutud omadusega objekte ei leidu.

Seega see ülesandetüüp siiski põhimõtteliselt eelmisest ei erine, kuna ilmseid fakte ei pea niikuinii tõestama.

Näited tüüpilistest seda liiki ülesannetest aastal 2004 toimunud võistlustelt oleksid PKV 7-2, PKV 8-2, PKV 8-3, PKV 9-1, PKV 10-2, PKV 10-4, PKV 10-6a, PKV 11-2, PKV 11-3, PKV 12-2, PKV 12-5, LVK N-2, LVK N-5, LPV 10-4, LPV 10-5.

Kas ... ?

Mingis mõttes kuulub ka see siia, kuna nõuab täpset vastust, samal ajal kui kahepoolset tõestust pole vaja. *Kas*-küsimuse vastus on kas “ei” või “jah” ja kui neist ühe korrektsus on tõestatud, ei ole enam vaja eraldi näidata, et teine ei sobi, sest see on niigi selge.

Näited aastal 2004 toimunud võistlustelt on PKV 10-3, PKV 11-5, PKV 11-6, LVK N-1, LVK N-3, LPV 11-5, LVS N-5, LVS V-1b.

Osavastusülesanded

Siia kuuluvad ülesanded, milles otseselt ainult ühepoolset lahendust nõutaksegi.

Too näide ...

Leia viga ...

Sellise ülesande lahendusse kuuluvad

- vastus — ühe konkreetse nõutud omadusega objekti kirjeldus,
- tõestus, et see objekt on nõutud omadusega.

Ei mängi rolli, kas otsitav on üheselt määratud või ei.

Näitena aastal 2004 toimunud võistlustelt toome PKV 12-1, LVS V-5b.

Lõpetuseks

Tuleb mõista, et kahepoolse tõestuse puhul ei pea tõestuse pooli tingimata teineteisest eraldi nullist peale tegema. Peaasi on, et mõlemad pooled saaksid tõestatud. Kuidas lahendust kõige otstarbekam kirja panna on, sõltub konkreetsest ülesandest. Toodud näiteülesannetele žürii poolt esitatud ametlikest lahendustest võib igaüks näha, et enamasti niisugust jaotust üheks ja teiseks pooleks tekstis välja ei paista. Mõnikord on üks pooltest ilmne, siis pole tema kohta vajagi midagi märkida.

Samas on võimalik, et liigi järgi ühepoolse tõestusega ülesanne osutub nõutud omaduse iseloomu tõttu sisuliselt kahepoolseks. Sellised on näiteks kõikvõimalikud ekstreemumülesanded, mis esinevad meie võistlustel väga tihti.

Vähemalt (minimaalselt) kui palju ... ?

Ülimalt (maksimaalselt) kui palju ... ?

Milline on vähim (minimaalne) võimalik ... ?

Milline on suurim (maksimaalne) võimalik ... ?

jne, jne

Ülalesitatud liigituse järgi on tegemist ülesandega, kus nõutud omadusega objekt on ilmselt üheselt määratud — ei saa ju mitu arvu olla ühtede ja samade arvude seas mõlemad suurimad ega mõlemad vähimad. Seepärast kehtib siingi reegel, et lahenduseks piisab vastusest ja tõestusest, et vastuseks esitatud arv on nõutud omadusega.

Pangem aga tähele, et sellistes ülesannetes koosneb see “nõutud omadus” ise kahest väitest: üks, et arv rahuldab tingimusi, ja teine, et ükski suurem (või väiksem) arv ei rahulda tingimusi. Seepärast lähebki niisuguses ülesandes siiski tavaliselt vaja kaheosalist tõestust.

Näited sellistest ülesannetest aastal 2004 oleksid PKV 7-3, LVK V-1, LVK V-5, LPV 9-2, LVS N-1, LVS V-3.