Lisakonstruktsioonid geomeetrias

Reimo Palm

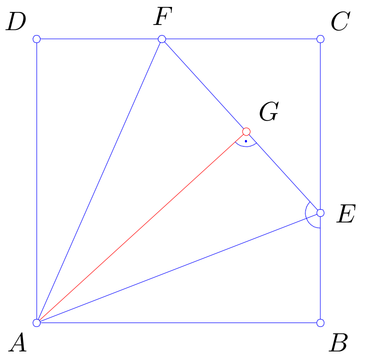
4. detsember 2004

§ 1. TSENTRAALPUNKT

Väga sageli piisab geomeetriaülesannete lahendamisel lisakonstruktsioonist, kus tuuakse sisse üksainus sobivalt valitud punkt, mis jagab joonise teatud mõttes eraldiseisvateks osadeks. See punkt tuleb valida nii, et ta seoks võimalikult hästi ülesande andmeid (nurgad vajaliku suurusega, lõigud võrdse pikkusega, lõikude pikkuste suhe õige vms). Tihti asub see punkt mingil lõigul ning tema sissetoomisega jaguneb joonis kaheks sarnaseks osaks, mida saab analüüsida teineteisest enam-vähem sõltumatult.

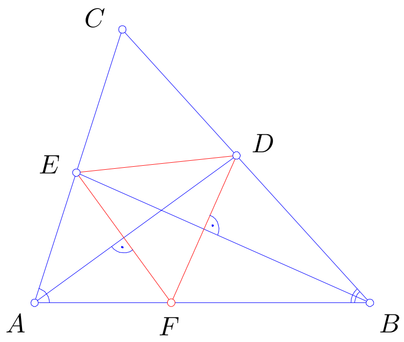
1. (Eesti 2002) Ruudu $ABCD$ külgedel CD ja BC valitakse vastavalt punktid E ja F nii, et $\angle AEB = \angle AEF$. Leia nurga EAF suurus.

Lahendus. Tõmbame punktist A lõigule EF ristlõigu aluspunktiga G (joonisel on lisakonstruktsioonid tähistatud punasega). Täisnurksed kolmnurgad AGE ja ABE on kongruentsed, sest neil on ühine hüpotenuus ning üks paar võrdse suurusega teravnurki. Järelikult $AG = AB = AD$ ning täisnurksed kolmnurgad AGF ja ADF on samuti kongruentsed. Nurk EAF on seega parajasti kaks korda väiksem kui nurk BAD ehk $45°$.



2. (Balti tee 1999) Kolmnurga ABC nurkade A ja B poolitajad lõikavad külgi BC ja CA vastavalt punktides D ja E. Leia nurga C suurus, kui $|AE| + |BD| = |AB|$.

Lahendus. Valime küljel AB sellise punkti F, et $|AF| = |AE|$ ja $|BF| = |BD|$. Et sirge AD on võrdhaarse kolmnurga AEF tipunurga poolitaja, siis on ta alusega EF risti. Sellest järeldub, et $|DE| = |DF|$. Analoogiliselt leiame $|DE| = |EF|$. Kolmnurk DEF on seega võrdkülgne ja $\angle DFE = 60°$. Nüüd on $\angle AFE + \angle BFD = 120°$, $\angle AEF + \angle BDF = 120°$ ning $\angle CAB + \angle CBA = 120°$, millest $\angle ACB = 60°$.

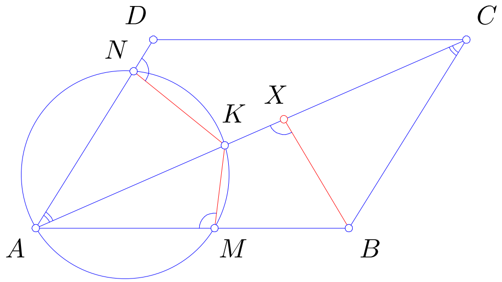


3. (Balti tee 2001) On antud rööpkülik $ABCD$. Punkti A läbiv ringjoon lõikab lõike AB, AC ja AD vastavalt nende sisepunktides M, K ja N. Tõesta, et

$$|AB| \cdot |AM| + |AD| \cdot |AN| = |AK| \cdot |AC| .$$

Lahendus. Valime lõigul AC punkti X nii, et $\angle AXB = \angle AMK$. Siis on kolmnurk AXB sarnane kolmnurgaga AMK, mistõttu $|AB| : |AX| = |AK| : |AM|$. Kolmnurk CXB on sarnane kolmnurgaga ANK, järelikult $|CB| : |CX| = |AK| : |AN|$. Arvestades, et $|AD| = |CB|$, saame nüüd

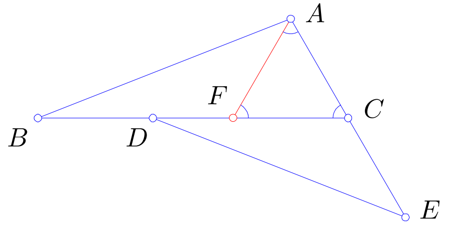
$$|AB| \cdot |AM| + |AD| \cdot |AN| = |AK| \cdot |AX| + |AK| \cdot |CX| = |AK| \cdot |AC|.$$



4. (Balti tee 1999) Kolmnurgas ABC on $\angle C = 60°$ ja $|AC| < |BC|$. Punkt D asub küljel BC ja rahuldab tingimust $|BD| = |AC|$. Külge AC pikendatakse punktini E, nii et $|AC| = |CE|$. Tõesta, et $|AB| = |DE|$.

Lahendus. Valime küljel BC punkti F nii, et $|CF| = |BD|$. Kolmnurk ACF on võrdhaarne tipunurgaga $60°$, st võrdkülgne. Kolmnurgad AFB ja

ECD on kongruentsed, sest $\angle AFB = \angle ECD = 120°$, samuti $|AF| = |EC|$ ja $|FB| = |CD|$. Järelikult $|AB| = |DE|$.

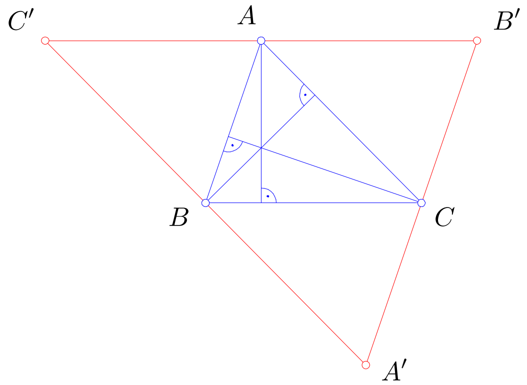


§ 2. JOONISE SÜMMETRISEERIMINE

Teine lisakonstruktsioonide võte on joonise täiendamine nii, et esialgse joonise kõik või mõned elemendid kuuluksid suurema ja „sümmeetrilisema" joonise koosseisu. Näiteks kui joonisel esineb täisnurkne kolmnurk, siis võime püüda seda täiendada ristkülikuks või ruuduks, samuti pikendada sirgeid ja lõike nii, et mingist punktist või sirgest teisel pool tekiks olemasolevaga analoogiline pilt. Samuti võime sisse tuua uusi lõike, et kuskile tekitada mujal juba esinev nurk, sarnased kolmnurgad vms.

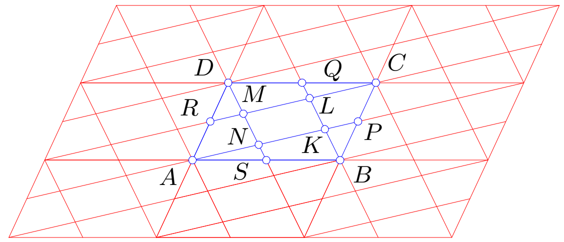
5. Tõesta, et kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis.

Lahendus. Joonistame läbi kolmnurga tippude sirged, mis on paralleelsed vastasküljedega. Kolmnurgad BAC', $CB'A$ ja $A'CB$ on kõik kongruentsed kolmnurgaga ABC. Järelikult on kolmnurga ABC tipud kolmnurga $A'B'C'$ külgede keskpunktid ning kolmnurga ABC kõrgused kolmnurga $A'B'C'$ külgede keskristsirged. Viimased aga lõikuvad ühes punktis, kolmnurga ümberringjoone keskpunktis.



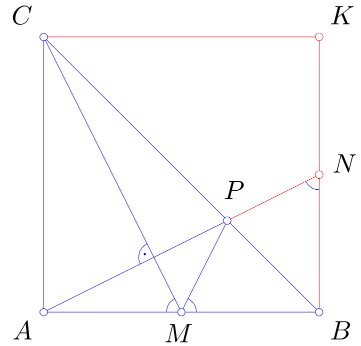
6. (Eesti 1993) Rööpküliku $ABCD$ tipud A, B, C, D ühendatakse vastavalt külgede BC, CD, DA ja AB keskpunktidega. Niiviisi tekkinud lõigud lõikuvad omavahel punktides K, L, M, N. Leia nelinurkade $ABCD$ ja $KLMN$ pindalade suhe.

Lahendus. Rööpkülikut koos sirgetega võime vaadelda osana kogu tasandit katvast lõikuvate joonte süsteemist, kui kopeerida joonist lõpmatult igas suunas. Lihtne on näha, et kujundite AKB, BLC, CMD, DNA ja $KLMN$ pindalad võrduvad kõik ühe väikese rööpküliku pindalaga. Seega $S_{KLMN} : S_{ABCD} = 1 : 5$.



7. (Balti tee 2000) Olgu ABC võrdhaarne kolmnurk, kus $\angle A = 90°$. Olgu M lõigu AB keskpunkt. Lõigule CM läbi punkti A tõmmatud ristsirge lõikab külge BC punktis P. Tõesta, et $\angle AMC = \angle BMP$.

Lahendus. Täiendame kolmnurga ABC ruuduks $ABKC$. Olgu N sirge AP lõikepunkt ruudu küljega BK. Kolmnurgad AMC ja BNA on kongruentsed (saadavad üksteisest 90° pöördega). Seega on N lõigu BK keskpunkt ning samuti $\angle AMC = \angle BNA$. Kolmnurgad NBP ja MBP on kongruentsed, sest $\angle NBP = \angle MBP$ ning nende nurkade lähisküljed on vastavalt võrdsed. Seega $\angle BNP = \angle BMP$.



8. (Balti tee 1998) Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ning D punktist A küljele BC tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Punkt E asub lõigul AD ja rahuldab võrdust

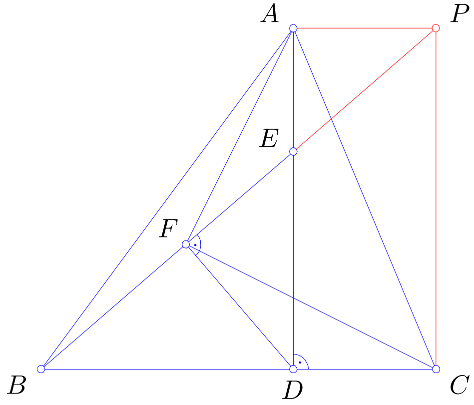
$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|} .$$

Olgu F punktist D lõigule BE tõmmatud ristlõigu aluspunkt. Tõesta, et $\angle AFC = 90°$.

Lahendus. Täiendame kolmnurga ADC ristkülikuks $ADCP$. Võrdustest

$$\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|DB|}$$

saame, et täisnurksed kolmnurgad DEB ja AEP on sarnased ehk sirge BE läbib punkti P. Et $\angle DFP = 90°$, siis asub punkt F ristküliku $ADCP$ ümberringjoonel. Järelikult $\angle AFC = \angle ADC = 90°$.



9. (Eesti 2001) Kolmnurga ABC külgedel BC, CA ja AB võetakse vastavalt punktid D, E ja F nii, et lõikudel AD, BE ja CF on ühine punkt O. Tõesta, et

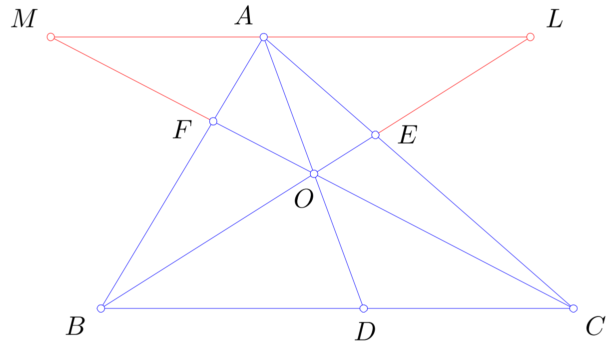
$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|}.$$

Lahendus. Tõmbame läbi punkti A sirgega BC paralleelse sirge. Olgu L ja M vastavalt sirgete BO ja CO lõikepunktid selle sirgega. Et kolmnurgad EAL ja EBC on sarnased, siis $|AE| : |EC| = |AL| : |BC|$. Samuti on sarnased kolmnurgad FAM ja FBC, mistõttu $|AF| : |FB| = |AM| : |BC|$. Järelikult

$$\frac{|AE|}{|EC|} + \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AL|}{|BC|} + \frac{|AM|}{|BC|} = \frac{|ML|}{|BC|}.$$

Kasutades homoteetiat punkti O suhtes, näeme, et kolmnurkade OBC ja OLM lineaarsed elemendid on võrdelised, seega

$$\frac{|ML|}{|BC|} = \frac{|AO|}{|OD|}.$$

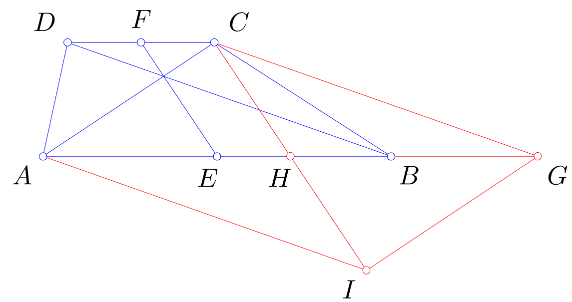


§ 3. JOONISE ELEMENTIDE ÜMBERPAIGUTAMINE

Lisakonstruktsioone võib ette võtta ka eesmärgiga viia joonisel eraldiasuvad elemendid kokku, näiteks tuua eraldiseisvad lõigud kokku või moodustada nendest kolmnurk. Nurki saab viia tipuga samasse punkti. Igasugusel ümberpaigutamisel tuleb alati silmas pidada ülesande lõppsihti, uus joonis peab olemasolevat informatsiooni mingis mõttes paremini ära kasutama.

10. Trapetsi diagonaalide pikkused on 3 ja 5 ning aluste keskpunkte ühendava lõigu pikkus 2. Leia trapetsi pindala.

Lahendus. Olgu $ABCD$ vaadeldav trapets. Viime diagonaali DB paralleellükkega punktist C lähtuvaks lõiguks CG. Kolmnurga AGC pindala võrdub trapetsi pindalaga. Samamoodi viime trapetsi aluste keskpunkte ühendava lõigu EF punktist C lähtuvaks lõiguks CH. Lõik CH osutub siis kolmnurga ACG mediaaniks. Seega kui pikendame lõiku CH tema pikkuse võrra punktini I, saame rööpküliku $ACGI$, mille pindala on kaks korda suurem trapetsi pindalast. Pool sellest rööpkülikust on kolmnurk CGI külgedega 3, 4, 5. Järelikult on trapetsi pindala võrdne selle kolmnurga pindalaga ehk 6.



11. (IMO eelvalik 1998) Olgu $ABCDEF$ kumer kuusnurk, milles $\angle B + \angle C + \angle E = 360°$ ja

$$\frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|CD|}{|DE|} \cdot \frac{|EF|}{|FA|} = 1.$$

Tõesta, et

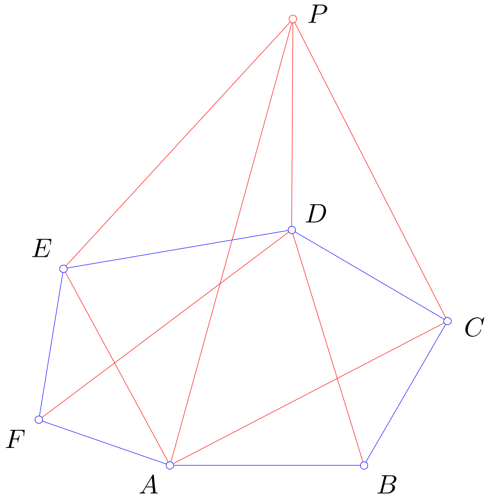
$$\frac{|BC|}{|CA|} \cdot \frac{|AE|}{|EF|} \cdot \frac{|FD|}{|DB|} = 1.$$

Lahendus. Valime punkti P nii, et ta asuks väljaspool nurga $\angle CDE$ sisepiirkonda ning kolmnurgad EFA ja EDP oleksid sarnased. Siis on ka kolmnurgad CBA ja CDP sarnased, sest $\angle CBA = \angle CDP$ ning

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE| \cdot |FA|}{|CD| \cdot |EF|} = \frac{|DP| \cdot |FA|}{|AF| \cdot |CD|} = \frac{|PD|}{|DC|}.$$

Et $\angle FED = \angle AEP$ ja $|FE| : |ED| = |AE| : |EP|$, siis on kolmnurgad FED ja AEP sarnased, millest saame $|AE| : |FE| = |PA| : |DF|$. Analoogiliselt on kolmnurgad BCD ja ACP sarnased, mistõttu $|BC| : |AC| = |DB| : |PA|$. Järelikult

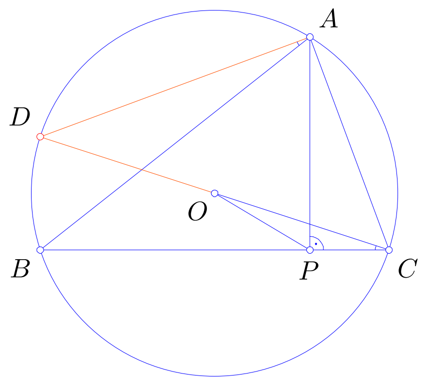
$$\frac{|BC|}{|CA|} \cdot \frac{|AE|}{|EF|} \cdot \frac{|FD|}{|DB|} = \frac{|DB|}{|PA|} \cdot \frac{|PA|}{|DF|} \cdot \frac{|FD|}{|DB|} = 1.$$

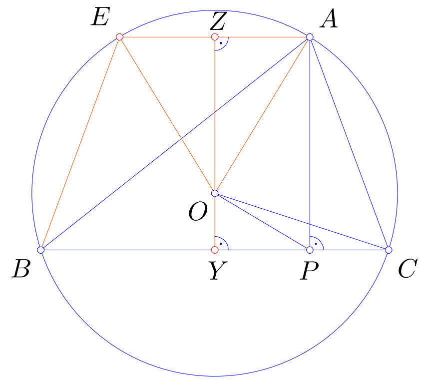


12. (IMO 2001) Olgu ABC teravnurkne kolmnurk ümberringjoone keskpunktiga O ning olgu P tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt küljel BC. On teada, et $\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30°$. Tõesta, et $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

Lahendus. Olgu D sirge CO lõikepunkt kolmnurga ümberringjoonega. Siis $\angle CAD = 90°$. Ent $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = \angle CAB + \angle BCD$. Seega tuleb meil tõestada, et $\angle BCD > \angle COP$ ehk $|PO| > |PC|$.

Valime kolmnurga ABC ümberringjoonel punkti E nii, et $AE \parallel BC$. Olgu Y külje BC keskpunkt ja Z külje EA keskpunkt. Et $\angle EBA = \angle EBC - \angle ABC = \angle BCA - \angle ABC \geqslant 30°$, siis $\angle EOA = 2\angle EBA \geqslant 60°$. See tähendab, et $|AE| \geqslant r$, kus r on ringjoone raadius. Järelikult $|PO| > |PY| = |AZ| \geqslant r/2$, seevastu aga $|PO| = |YC| - |PY| < r - |PY| \leqslant r/2$.





§ 4. ARVUTUSTEKS VAJALIKUD ABIELEMENDID

Kui ülesandeks on leida mingi arvuline väärtus (näiteks pikkuste või pindalade suhe), siis võib proovida sisse tuua mingi abielemendi, millest nö kinni hakata. Tihtipeale seostub see lõikude ümberpaigutamisega, et näiteks kanda mõnda pikkust ühest kohast teise või ära kasutada ülesandes antud infot lõikude pikkuste kohta.

13. Kolmnurgas ABC tõmmatakse tipust A nurgapoolitaja AD. On teada, et $|AB| + |BD| = a$ ja $|AC| - |CD| = b$. Leia $|AD|$.

Lahendus. Valime küljel AB pikendusel punkti E nii, et $|BE| = |BD|$ ning küljel AC punkti F nii, et $|CD| = |CF|$. Tõestame, et kolmnurgad ADE ja AFD on sarnased. Tõepoolest, tähistades kolmnurga ABC nurgad tähtedega α, β ja γ, saame

$$\angle ADE = \pi - \frac{\alpha}{2} - \angle AED = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\pi + \gamma}{2}$$

ning

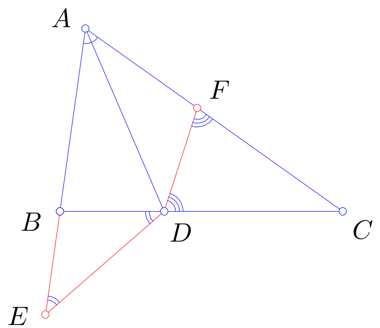
$$\angle AFD = \pi - \angle CFD = \pi - \frac{\pi - \gamma}{2} = \frac{\pi + \gamma}{2},$$

samuti ilmselt $\angle EAD = \angle DFA$. Seega $|AE| : |AD| = |AD| : |AF|$. Et $|AE| = a$ ja $|AF| = b$, siis $|AD| = \sqrt{ab}$.

Märkus. Selle ideega saab avaldada kolmnurga nurgapoolitaja pikkuse nurgapoolitaja lähisküĺgede pikkuste ja vastasküljel tekkivate osalõikude pikkuste kaudu. Nimelt

$$d^2 = (|AB| + |BD|)(|AC| - |CD|) =$$
$$= |AB| \cdot |AC| - |BD| \cdot |CD| + (|BD| \cdot |AC| - |AB| \cdot |CD|).$$

Viimastes sulgudes olev avaldis on null, sest nurgapoolitaja omaduse põhjal $|AB| : |BD| = |AC| : |CD|$.



A
F
B
D
C
E