Graafidest

Mis on graafid?

Graaf koosneb *tippudest* ja neid ühendavatest *servadest.* Tippude hulk võib olla lõplik või lõpmatu, kuid mitte tühi. Lõpliku tippude hulgaga graafi nimetame *lõplikuks graafiks.* Iga serv ühendab kaht (harilikult erinevat) tippu, mida nimetame selle serva *otstippudeks.* Graafi servade hulk võib olla ka tühi.

Vajadusel võime ülaltoodud graafi mõistet laiendada:

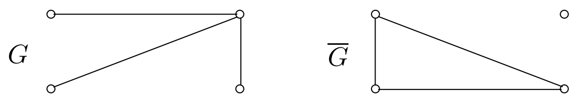
- lubades *silmuseid*, s.t. servi, mille otstipud langevad kokku;
- lubades *kordseid servi*, s.t. rohkem kui üht serva ühe ja sama tippude paari vahel;
- omistades kõikidele servadele või osale neist *suunad*, s.t. eristades serva lähte- ja siht-tippu — sellist graafi nimetame *orienteeritud graafiks*;
- omistades servadele täis- või reaalarvulised *kaalud.*

Graafina võime vaadelda näiteks:

- punkte ja nendevahelisi jooni tasandil või ruumis, kui pole oluline punktide paigutus, joonte kuju ja lõikumine väljaspool punkte;
- linnu ja nendevahelisi maanteid, lennu- või rongiliine;
- ristmikke ja nendevahelisi tänavalõike linnas;
- tube ja nendevahelisi uksi majas;
- inimesi ja nendevahelisi tutvus-, sõprus- vm. suhteid;
- mingi mängu seise ja ühest seisust teise viivaid käike.

Järgnevalt esitatavate mõistete ja faktide juures eeldame, et tegemist on harilike, s.t. silmuste ja kordsete servadeta ning orienteerimata graafidega. Tippe x ja y ühendavat serva tähistame xy.

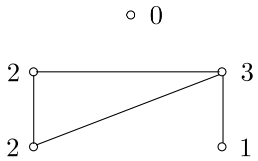
Graafi G *täiendgraafiks* nimetame graafi $\overline{G}$, mille tipud on needsamad mis graafil G ning mille mistahes kahe tipu vahel on serv siis ja ainult siis, kui samade tippude vahel graafis G serv puudub. Graafi $\overline{G}$ täiendgraafiks on omakorda graaf G.



Joonis 1: Graaf ja selle täiendgraaf

Graafi tippude astmed

Graafi tipu *astmeks* nimetame sellest lähtuvate servade arvu. Ilmselt on n tipuga graafi tippude võimalikud astmed 0 kuni $n-1$.



Joonis 2: Graafi tippude astmed

Ülesanne 1. Tõesta järgmised väited:

1) Mistahes rohkem kui ühe tipuga lõplikus graafis leidub kaks võrdse astmega tippu.
2) Mistahes lõpliku graafi kõikide tippude astmete summa on paarisarv.
3) Mistahes lõplikus graafis on paarisarv paaritute astmetega tippe.

Teed ja tsüklid. Graafi sidusus

Teeks graafi tipust x tippu y nimetame lõplikku servade järjendit xa_1, a_1a_2, $\ldots$, $a_{n-1}a_n$, a_ny. Tee pikkuseks nimetame servade arvu selles (ülaltoodud tee on niisiis pikkusega $n{+}1$).

Tee võib läbida üht tippu või serva suvaline arv kordi. Teed, mis ei sisalda ühtegi serva rohkem kui üks kord, nimetame *ahelaks.* Mittetühja ahelat, mille algus- ja lõpptipp langevad kokku, nimetame *tsükliks.* Tsükli vähim võimalik pikkus silmuste ja kordsete servadeta graafis on 3.

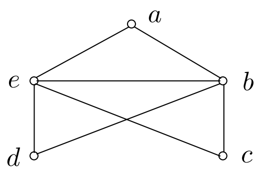
Graafi kahe tipu vaheliseks *kauguseks* nimetame neid ühendava lühima tee pikkust (kui niisugune tee on olemas).

Graafi nimetame *sidusaks*, kui selle mistahes kahe tipu jaoks leidub neid ühendav tee.

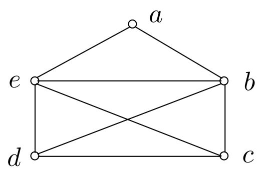
Tsüklit, mis sisaldab graafi kõik servad ja läbib graafi kõiki tippe vähemalt ühe korra, nimetame *Euleri tsükliks.* Tsüklit, mis läbib graafi iga tippu täpselt ühe korra, nimetame *Hamiltoni tsükliks.*

Joonisel 3 esitatud graafis moodustavad servad ab, bc, ce, eb, bd, de ja ea Euleri tsükli; Hamiltoni tsükkel puudub.

Joonisel 4 esitatud graafis moodustavad servad ab, bc, cd, de ja ea Hamiltoni tsükli; Euleri tsükkel puudub.



Joonis 3



Joonis 4

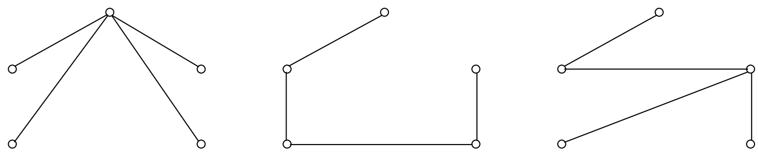
Ülesanne 2. Tõesta järgmised väited:

1) Mistahes graafi G korral on vähemalt üks graafidest G ja $\overline{G}$ sidus.
2) Kui graaf G ei ole sidus, siis mistahes kahe tipu vaheline kaugus graafis $\overline{G}$ on ülimalt 2.
3) Sidus n tipuga graaf sisaldab vähemalt $n-1$ serva.
4) Lõplikus sidusas rohkem kui ühe tipuga graafis leidub Euleri tsükkel siis ja ainult siis, kui selle kõikide tippude astmed on paarisarvud.

5*) *(Diraci teoreem)* Sidusas $n \geqslant 3$ tipuga graafis, milles iga tipu aste on vähemalt $\frac{n}{2}$, leidub Hamiltoni tsükkel.

Puud

Puuks nimetame sidusat graafi, mis ei sisalda ühtegi tsüklit.



Joonis 5: näiteid 5 tipuga puude kohta

Ülesanne 3. Tõesta järgmised väited:

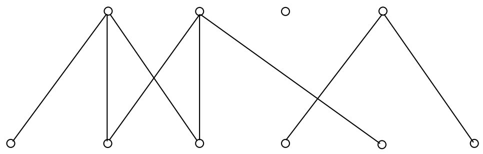
1) Graaf on puu siis ja ainult siis, kui selle mistahes kahe tipu jaoks leidub üks ja ainult üks neid ühendav ahel.

2) Sidus n tipuga graaf on puu (s.t. ei sisalda tsükleid) siis ja ainult siis, kui tema servade arv on $n-1$.
3) Tsükliteta n tipuga graaf on sidus siis ja ainult siis, kui tema servade arv on $n-1$.
4) Mistahes rohkem kui ühe tipuga lõplik puu sisaldab vähemalt kaks astmega 1 tippu.

Kahealuselised graafid

Kahealuseliseks graafiks nimetame graafi, mille tippude hulga saab jaotada kaheks ühisosata alamhulgaks nii, et graafi mistahes serva otstipud kuuluvad erinevatesse alamhulkadesse. Neid kahte tippude alamhulka nimetame kahealuselise graafi *alusteks*.

Teisisõnu on graaf kahealuseline, kui selle tipud on võimalik värvida kahe värviga nii, et mistahes serva otstipud on erinevat värvi.



Joonis 6: kahealuselise graafi näide

Ülesanne 4. Tõesta järgmised väited:

1) Mistahes puu on kahealuseline graaf.
2) Mistahes tee pikkus kahealuselise graafi tippude x ja y vahel on paarisarv, kui need tipud kuuluvad ühte ja samasse alusesse, ning paaritu arv, kui need tipud kuuluvad erinevatesse alustesse.
3) Mistahes sidusa kahealuselise graafi alused on üheselt määratud (s.t. valides mistahes tipu saame üheselt kindlaks teha, millised tipud kuuluvad selle tipuga samasse alusesse ja millised teise alusesse).
4) Graaf on kahealuseline siis ja ainult siis, kui ta ei sisalda ühtki paaritu-arvulise pikkusega tsüklit.
5) Maksimaalne võimalik servade arv n tipuga kahealuselises graafis on $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ ning see saavutatakse siis, kui tippude arvud kummaski aluses on võimalikult võrdsed.

Olümpiaadiülesandeid graafidest

1. Bussipeatuses said kokku n inimest. Millise vähima n korral leiduvad nende hulgas kindlasti kolm sellist, kes kõik üksteist tunnevad, või kolm sellist, kellest ükski paar teineteist ei tunne?

2. *(Austraalia 1998)* Härra ja proua Mäger läksid piknikule, kus peale nende osales veel 4 abielupaari. Kohale jõudes tervitasid mõned neist oma paremaid sõpru kättpidi, kuid keegi ei surunud seejuures kätt oma abikaasal. Peo edenedes tekkis hr. Mägral huvi, kui paljudega keegi neist oli kätelnud, ning ta küsis seda kõigilt teistelt (sh. ka oma abikaasalt). Kui mitme piknikul viibijaga kätles pr. Mäger, kui kõik 9 küsitletut andsid hr. Mägrale erinevad vastused?

3. *(LAV 1997)* Klassi poisid korraldasid maadlusvõistluse, kus iga poiss maadles ühe korra igaühega ülejäänutest ning iga kohtumine lõppes ühe maadleja võiduga. Tüdrukud otsustasid anda auhinna igale poisile, kes võidab igaüht ülejäänutest kas omavahelises kohtumises või kaudselt (ütleme, et poiss A võidab kaudselt poissi B, kui leiduvad poisid $C_1, \ldots, C_k$, nii et A võidab C_1, C_1 võidab C_2, ..., C_k võidab B-d).
   a) Kui palju võis n poisi korral maksimaalselt olla auhinnasaajaid?
   b) Kas on võimalik, et ükski poistest ei saanud auhinda?
   c) Tõesta, et kui auhinna sai ainult üks poiss, siis ta võitis kõik kohtumised.

4. *(Valgevene 1993)* Kosmosejaam koosneb $N \geqslant 4$ moodulist, millest mõned on omavahel ühendatud lüüsidega. Seejuures leidub mistahes kahe mooduli korral selline kolmas moodul, millesse viivad lüüsid mõlemast vaadeldavast moodulist. Milline on vähim võimalik lüüside arv kosmosejaamas?

5. *(Balti Tee 1997)* Metsas elavad n looma ($n \geqslant 3$) igaüks oma urus ning iga kaht urgu ühendab täpselt üks rada. Metsakuninga valimise eel teevad mõned loomad valimiskampaaniat. Iga kampaaniat tegev loom külastab iga teise looma urgu täpselt korra, liigub urust urgu ainult mööda radu, ei pööra urgude vahel kusagil ühelt rajalt teisele ning pöördub lõpuks oma urgu tagasi. Samuti on teada, et iga rada kasutab ülimalt üks kampaaniat tegev loom.
   a) Tõesta, et iga algarvulise n korral on kampaaniat tegevate loomade suurim võimalik arv $\dfrac{n-1}{2}$;
   b) Leia kampaaniat tegevate loomade suurim võimalik arv, kui $n = 9$.

6. *(Balti Tee 1991)* Lossis on hulk saale ja kokku n ust, mis viivad ühest saalist teise või lossist välja, kusjuures igal saalil on vähemalt kaks ust.

Rüütel, kes lossi ei tunne, siseneb välisuksest ühte saali ning võib edaspidi igast saalist väljumiseks valida mistahes ukse peale selle, mille kaudu ta äsja saali sisenes. Leia strateegia, mida kasutades pääseb rüütel lossist välja hiljemalt pärast $2n$ saali läbimist (iga saali loeme niimitu korda, kui rüütel sinna siseneb).

7. *(Balti Tee 1994)* Kuningas otsustas lasta ehitada oma kuningriigi 13 asustamata saarele kokku 25 linna ning panna käima praamiliini iga erinevatel saartel olevate linnade paari vahel. Kuidas peaks kuningas linnad saarte vahel jaotama, et igaühel 13 saarest oleks vähemalt üks linn ja praamiliinide koguarv oleks vähim?