Lõppvoor 2018

Võistluskomplekti valmimisse panustasid:

Kaarel Hänni
Raul Kangro
Joonas Jürgen Kisel
Oleg Košik
Aleksei Lissitsin
Härmel Nestra
Uve Nummert
Erik Paemurru
Ago-Erik Riet
Kati Smotrova
Laur Tooming
Janno Veeorg
Triinu Veeorg
Indrek Zolk

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. aprill 2018 Lõppvoor **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Kui palju leidub täisarvude 1 kuni 100 seas selliseid, mis võrduvad mingi kahe täisarvu ruutude vahega?

2. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral arv $n!$ ei jagu arvuga n^2.

Märkus. Naturaalarvu x *faktoriaaliks* $x!$ nimetatakse kõigi täisarvude 1 kuni x korrutist.

3. Kolmnurga ABC küljel BC valitakse punktid P ja Q nii, et P asub B ja Q vahel ning kiired AP ja AQ jaotavad nurga BAC kolmeks võrdseks osaks. Sirgega AQ paralleelne punkti P läbiv sirge lõikab kolmnurga külge AB punktis D, sirgega AP paralleelne punkti Q läbiv sirge lõikab kolmnurga külge AC punktis E. Kas võib juhtuda, et DE on kolmnurga ABC kesklõik?

4. Olgu n ja m positiivsed täisarvud, $n \geqslant m$. On antud n ühikruudust koosnev mängulaud mõõtmetega $1 \times n$ ning piiramatus koguses kleepribasid mõõtmetega $1 \times m$. Ühel käigul katab mängija kleepribaga mängulaua m kõrvutiasuvat ruutu, millest vähemalt üht veel ükski kleepriba ei kata. Kaks mängijat teevad käike kordamööda ja see, kes ei saa enam käiku teha, on kaotanud.

a) Tõesta, et kui n ja m on ühe ja sama paarsusega, siis alustaja saab võita vastase mistahes vastumängu korral.

b) Kas vastab tõele, et alati, kui n ja m on erineva paarsusega, saab alustaja vastane võita alustaja mistahes vastumängu korral?

Märkus. Arvu *paarsus* märgib jääki 2-ga jagamisel. Niisiis arvud n ja m on ühe ja sama paarsusega, kui nad on kas mõlemad paaris või mõlemad paaritud.

5. Olgu $ABCDE$ korrapärane viisnurk ning c ringjoon diameetriga AB. Diagonaalid AC ja AD lõikavad ringjoont c vastavalt punktides F ja G. Sirge FG lõikab külge AE punktis H. Olgu K külje DE keskpunkt. Tõesta, et punktid F, H, E ja K asuvad ühel ringjoonel.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. aprill 2018 — Lõppvoor — **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Leia kõik täisarvude paarid (a, b), mille korral
$$(2a^2 + b)^3 = b^3 a.$$

2. Tõesta, et kõigi reaalarvude x, y, z korral
$$5(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 4(xy + yz + zx).$$

3. Ringjoon diameetriga AB lõikab rombi $ABCD$ külge BC punktis K. Ringjoon diameetriga AD lõikab rombi $ABCD$ külge CD punktis L. Leia rombi $ABCD$ nurkade suurused, kui $\angle AKL = \angle ABC$.

4. Kungu-mungu keele iga häälikut saab hääldada nii pikalt kui ka lühidalt. Iga sõna koosneb kahest erinevast häälikust (ilma kordusteta), kumbki kas pikk või lühike, ja rahuldab järgmisi tingimusi.

1) Sõnas leidub lühike häälik.
2) Sõnas, mis algab täishäälikuga, leidub pikk häälik.
3) Sõnas, mis algab kaashäälikuga või lõpeb täishäälikuga, on sõna lõpus olev häälik lühike.

Kõik kahe ükskõik kumma pikkusega teineteisest erineva hääliku järgnevused, mis neile tingimustele vastavad, on sõnad. Kirjakeele väljatöötamise komisjon on otsustanud märkida iga häälikut erineva tähega, pikkuste märkimise osas kaalutakse aga kaht varianti. Esimese järgi tuleks täishäälikuid märkida ühe tähega ja kaashäälikuid ühe- või kahekordse tähega vastavalt pikkusele. Teise järgi tuleks just kaashäälikuid märkida ühe tähega ja täishäälikuid vastavalt pikkusele ühe- või kahekordse tähega.

a) Kas esimese variandi puhul on iga sõna hääldus kirjapildi järgi üheselt tuvastatav?
b) Kas teise variandi puhul on iga sõna hääldus kirjapildi järgi üheselt tuvastatav?

5. Laual on n kommi. Ühel käigul sööb mängija laualt ära sellise 1-st suurema arvu komme, mis on vahetult enne käiku laual olnud kommide arvu tegur, kuid alati peab vähemalt 1 komm lauale jääma. Kaks mängijat teevad käike kordamööda ja see, kes ei saa enam käiku teha, on kaotanud. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral saab alustaja võita vastase mistahes vastumängu korral.

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. aprill 2018 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Leia kõik algarvud p, mille korral on arv $2p^3+4p^2-3p+12$ mingi täisarvu viies aste.

2. Olgu p kolmnurga ABC poolümbermõõt. Tõesta, et suvalise punkti Q korral kehtib võrratus

$$|AQ|+|BQ|+|CQ|>p.$$

3. Tasandil on antud teravnurk suurusega α tipuga punktis A. Ühel haaral võetakse punkt B_0 ja teisel punkt B_1 nii, et $\angle AB_0B_1=\beta$. Alati, kui on määratud punktid $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$, siis tohib defineerida järgmise punkti B_n haaral AB_{n-2} selliselt, et $B_n \neq B_{n-2}$ ja $|B_{n-1}B_n|=|B_{n-2}B_{n-1}|$. Tõesta, et see protsess ei saa kesta lõputult, ning määra suurim indeks n (sõltuvalt nurkadest α ja β), mille korral on B_n võimalik defineerida.

4. Ruudustikust, mille mõlema külje pikkus on 1-st suurem täisarv, hakatakse välja lõikama väiksemaid ristkülikuid, millest igaühe mõlema külje pikkus on 1-st suurem täisarv ja millest igaühes on paaritu arv ühikruute. Lõpuks jääb algsest ruudustikust alles üksainus ühikruut. Leia vähim võimalik ühikruutude arv algses ruudustikus enne lõikamisi.

5. Põrnikas roomab koordinaattasandil, alustades punktist $(0;-1)$, sirgjooneliselt kuni abstsissteljeni punktis $(-x;0)$, kus x on mingi positiivne reaalarv. Seejärel pöörab ta 90° paremale ja roomab jällegi sirgjooneliselt kuni ordinaatteljeni. Seejärel pöörab ta uuesti 90° paremale ja roomab sirgjooneliselt kuni abstsissteljeni, misjärel pöörab veelkord 90° paremale ja roomab sirgjooneliselt kuni ordinaatteljeni.

a) Kas võib juhtuda, et põrnika teekonna pikkus ning alg- ja lõpppunkti vaheline kaugus on mõlemad ratsionaalarvud?

b) Kas võib juhtuda, et põrnika teekonna pikkus ning alg- ja lõpppunkti vaheline kaugus on mõlemad täisarvud?

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad

7. aprill 2018 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Leia kõik algarvude kolmikud (p, q, r), mille korral

$$2018(p^2 + q^2) = r^2 + 1.$$

2. Tõesta, et mistahes positiivse reaalarvu x korral

$$(x + 1)(x + 2)(x + 5) \geqslant 36x.$$

3. Olgu BE teravnurkse kolmnurga ABC kõrgus ja P selline punkt küljel AB, et $|AP| = |AE|$. Olgu N selline punkt, et $BCEN$ on rööpkülik. Kolmnurkade AEP ja BNP pindalad on võrdsed. Sirged NE ja AB lõikuvad punktis Q.

a) Tõesta, et kolmnurga ABC tipust C tõmmatud mediaan poolitab lõigu PQ.

b) Tõesta, et kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja, tipust B tõmmatud kõrgus ja tipust C tõmmatud mediaan lõikuvad ühes punktis.

4. Kas leidub positiivne täisarv n, mille korral saab $n \times n$ ruudustiku igasse ruutu kirjutada ühe arvudest -1, 0 ja 1 nii, et summade seas, mis saadakse ühe rea, ühe veeru või ühe pika diagonaali kõigi arvude kokkuliitmisel, esinevad kõik täisarvud $-n$ kuni n? Kui jah, siis leia vähim selline n.

5. Tahvlil on ruutvõrrand $x^2 + px + q = 0$, kus p ja q on sellised reaalarvud, et tahvlil oleval võrrandil leiduvad reaalarvulised lahendid, mis kõik on positiivsed. Kaks mängijat muudavad kordamööda võrrandis kordajaid järgmiste reeglite järgi. Esimene mängija vähendab vabaliiget ruutvõrrandi emma-kumma lahendi võrra ja (samal käigul) suurendab lineaarliikme kordajat 1 võrra. Teine mängija võib asendada vabaliikme meelevaldselt valitud reaalarvuga. Alternatiivselt võib teine mängija suurendada vabaliiget ruutvõrrandi suurema lahendi võrra ja (samal käigul) vähendada lineaarliikme kordajat 1 võrra, kuid selline käik on lubatud vaid juhul, kui enne käiku tahvlil oleva ruutvõrrandi lahendid erinevad teineteisest rohkem kui 1 võrra. Kui emma-kumma mängija käigu tulemusel tekib tahvlile ruutvõrrand, millel reaalarvulisi lahendeid pole või millel leidub mittepositiivne lahend, siis mäng lõpeb esimese mängija võiduga. Kas esimesel mängijal on sõltumata vastase tegevusest võimalik mäng võita?

LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 апреля 2018 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Сколько среди целых чисел от 1 до 100 таких, которые равны разности квадратов каких-либо двух целых чисел?

2. Найти все целые положительные числа n, при которых $n!$ не делится на n^2.

Примечание. Факториалом $x!$ натурального числа x называется произведение всех целых чисел от 1 до x.

3. На стороне BC треугольника ABC выбираются точки P и Q так, что P лежит между B и Q, а лучи AP и AQ делят угол BAC на три равные части. Прямая, параллельная прямой AQ и проходящая через точку P, пересекает сторону AB в точке D. Прямая, параллельная прямой AP и проходящая через точку Q, пересекает сторону AC в точке E. Может ли оказаться, что DE является средней линией треугольника ABC?

4. Пусть n и m целые положительные числа, $n \geqslant m$. Даны игровое поле размером $1 \times n$, состоящее из n клеток, и в неограниченном количестве клейкие полоски размером $1 \times m$. На одном ходу игрок заклеивает клейкой полоской m соседних клеток, из которых по крайней мере одна ещё не закрыта ни одной клейкой полоской. Два игрока ходят по очереди (начинает игру первый игрок), и проигрывает тот, кто больше не может сделать хода.

а) Доказать, что если n и m одинаковой чётности, то первый игрок сможет выиграть при любой игре противника.

б) Верно ли, что всегда, когда n и m разной чётности, второй игрок может выиграть при любой игре первого игрока?

Примечание. Чётность числа определяет его остаток при делении на 2. То есть числа n и m одинаковой чётности, если они либо оба чётные, либо оба нечётные.

5. Даны правильный пятиугольник $ABCDE$ и окружность c с диаметром AB. Диагонали AC и AD пересекают окружность c соответственно в точках F и G. Прямая FG пересекает сторону AE в точке H. Пусть K – середина стороны DE. Доказать, что точки F, H, E и K лежат на одной окружности.

LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 апреля 2018 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Найти все пары целых чисел (a, b), при которых

$$(2a^2 + b)^3 = b^3 a.$$

2. Доказать, что для всех действительных чисел x, y, z выполняется

$$5(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 4(xy + yz + zx).$$

3. Окружность с диаметром AB пересекает сторону BC ромба $ABCD$ в точке K. Окружность с диаметром AD пересекает сторону CD ромба $ABCD$ в точке L. Найти величины углов ромба $ABCD$, если $\angle AKL = \angle ABC$.

4. Каждый звук языка кунгу-мунгу может быть произнесён как длинно, так и коротко. Каждое слово состоит из двух различных звуков (без повторений), каждый либо длинный, либо короткий, и соответствует следующим условиям.

1) В слове есть короткий звук.
2) В слове, начинающемся на гласный звук, найдётся длинный звук.
3) В слове, начинающемся на согласный звук или кончающемся на гласный звук, в конце слова звук короткий.

Всякие два произнесённых подряд различных звука любой длительности, отвечающие этим условиям, являются словом. Комиссия по разработке письменного языка решила обозначить каждый звук различной буквой, в отношении же обозначения длительности звуков рассматриваются два варианта. Первый вариант предполагает обозначать все гласные одиночной буквой, а согласные одиночной или двойной в зависимости от длительности. Второй вариант наоборот, согласные одиночной буквой, а гласные в зависимости от длительности одиночной или двойной. Можно ли будет однозначно определить произношение слова по его записи, если

а) будет принят первый вариант,
б) будет принят второй вариант?

5. На столе лежит n конфет. На каждом ходу игрок съедает со стола такое большее единицы число конфет, которое является делителем числа конфет на столе до хода, но так, чтобы на столе осталась по крайней мере 1 конфета. Два игрока ходят по очереди и тот, кто больше не может сделать хода, проигрывает. Найти все такие целые положительные числа n, что начинающий игру игрок может выиграть при любой игре противника.

LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 апреля 2018 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Найти все простые числа p, при которых число $2p^3 + 4p^2 - 3p + 12$ является пятой степенью некоторого целого числа.

2. Пусть p – полупериметр треугольника ABC. Доказать, что для любой точки Q выполняется неравенство

$$|AQ| + |BQ| + |CQ| > p.$$

3. На плоскости дан острый угол величиной α с вершиной в точке A. На одной стороне угла отмечают точку B_0, а на другой – точку B_1 так, что $\angle AB_0B_1 = \beta$. Всегда, когда отмечены точки $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$, разрешено отметить следующую точку B_n на стороне AB_{n-2} так, что $B_n \neq B_{n-2}$ и $|B_{n-1}B_n| = |B_{n-2}B_{n-1}|$. Доказать, что этот процесс не может продолжаться бесконечно, и найти наибольший индекс n (в зависимости от углов α и β), для которого возможно отметить точку B_n.

4. Из клетчатого поля, длины сторон которого – целые числа больше 1, начинают вырезать маленькие прямоугольники, в которых нечётное число клеток, а длины их сторон – целые числа больше 1. В конечном итоге от изначального клетчатого поля остаётся всего лишь одна клетка. Найти наименьшее возможное число клеток в изначальном клетчатом поле.

5. Жук ползёт прямолинейно по координатной плоскости, начиная от точки $(0;-1)$ до оси абсцисс в точке $(-x;0)$, где x – некоторое положительное действительное число. После этого он поворачивает на 90° направо и ползёт снова прямолинейно до оси ординат. После этого он опять поворачивает на 90° направо и ползёт прямолинейно до оси абсцисс, после чего ещё раз поворачивает на 90° направо и ползёт прямолинейно до оси ординат.

а) Может ли случиться, что как длина пути жука, так и расстояние между начальной и конечной точкой будут рациональными числами?

б) Может ли случиться, что как длина пути жука, так и расстояние между начальной и конечной точкой будут целыми числами?

LXV Олимпиада Эстонии по математике

7 апреля 2018 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Найти все тройки простых чисел (p, q, r), при которых

$$2018(p^2 + q^2) = r^2 + 1.$$

2. Доказать, что при любом положительном действительном числе x

$$(x+1)(x+2)(x+5) \geqslant 36x.$$

3. Пусть BE – высота остроугольного треугольника ABC, а P – такая точка на стороне AB, что $|AP| = |AE|$. Пусть N – такая точка, что $BCEN$ – параллелограмм. Площади треугольников AEP и BNP равны. Прямые NE и AB пересекаются в точке Q.

а) Доказать, что медиана, проведённая из вершины C треуголника ABC, делит отрезок PQ пополам.

б) Доказать, что в треугольнике ABC биссектриса угла A, высота, опущенная из вершины B, и медиана, проведённая из вершины C, пересекаются в одной точке.

4. Найдётся ли положительное целое число n, при котором в каждую клетку клетчатого поля $n \times n$ можно записать по одному из чисел -1, 0 и 1 так, чтобы среди сумм, которые можно получить при сложении всех чисел одной строки, одного столбца или одной длинной диагонали, присутствовали все целые числа от $-n$ до n? Если да, то найти наименьшее такое n.

5. На доске записано квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, где p и q – такие действительные числа, что у уравнения на доске имеются действительные корни, которые все положительные. Двое игроков по очереди меняют коэффициенты уравнения согласно следующим правилам. Первый игрок уменьшает свободный член на любой из корней, при этом (тем же ходом) увеличивая коэффициент при линейном члене на 1. Второй игрок может заменить свободный член произвольно выбранным действительным числом. Альтернативно может второй игрок увеличить свободный член на больший из корней квадратного уравнения, при этом (тем же ходом) уменьшая коэффициент при линейном члене на 1, но такой ход разрешён только в ситуации, когда корни уравнения различаются больше, чем на 1. Если после хода какого-то игрока на доске возникает квадратное уравнение, не имеющее действительных корней, или у которого имеется неположительный корень, то игра заканчивается победой первого игрока. Может ли первый игрок победить независимо от игры соперника?

LXV Estonian Mathematical Olympiad

April 7, 2018 Final round **Grade 9**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.
Please write the solution of only one problem on each sheet of paper!

1. How many integers among 1 through 100 are equal to the difference of the squares of some two integers?

2. Find all positive integers n such that $n!$ is not divisible by n^2.

Remark. The *factorial* $x!$ of a natural number x is the product of all integers 1 through x.

3. Points P and Q are chosen on the side BC of triangle ABC in such a way that P lies between B and Q, and rays AP and AQ trisect the angle BAC. The line parallel to AQ and passing through P meets the side AB of the triangle at point D, and the line parallel to AP and passing through Q meets the side AC of the triangle at point E. Can it happen that DE is a midsegment of the triangle ABC?

4. Let n and m be positive integers, $n \geqslant m$. There is a game board of size $1 \times n$ divided into n unit squares and an unlimited supply of sticky tapes of size $1 \times m$. On each move, any player adds a tape covering m consecutive unit squares on the board precisely, at least one of which is not yet covered by any tape. Two players move alternately and the one who can make no move loses.

a) Prove that if n and m are of equal parity then the first player can win regardless of how the opponent plays.

b) Is it true that, whenever n and m are of different parity, the second player can win regardless of how the first player plays?

Remark. The *parity* of a number denotes its remainder upon division by 2. Hence numbers n and m are of equal parity if and only if they are either both even or both odd.

5. Let $ABCDE$ be a regular pentagon and let c be the circle with diameter AB. Diagonals AC and AD intersect the circle c at points F and G, respectively. Line FG intersects the side AE at point H. Let K be the midpoint of the side DE. Prove that points F, H, E and K are concyclic.

Lahendused

1. *Vastus:* 75.

Kõik paaritud arvud esituvad kujul $2a+1$ mingi täisarvu a jaoks. Arv $2a+1$ aga võrdub arvude $a+1$ ja a ruutude vahega. Täisarvude 1 kuni 100 seas on 50 paaritut arvu.

Kõik 4-ga jaguvad arvud esituvad kujul $4b$ mingi täisarvu b jaoks. Arv $4b$ aga võrdub arvude $b+1$ ja $b-1$ ruutude vahega. Täisarvude 1 kuni 100 seas on 25 arvu, mis jaguvad 4-ga.

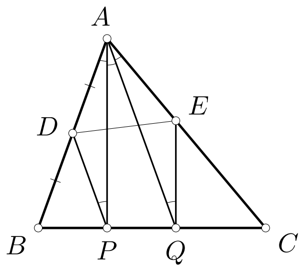
Kokku oleme leidnud 75 nõutud omadusega arvu. Näitame, et rohkem selliseid arve ei ole. Selleks märkame, et kui $n = x^2 - y^2$ mingite täisarvude x ja y korral, siis $n = (x-y)(x+y)$. Et arvude $x-y$ ja $x+y$ summa on paaris, siis on $x-y$ ja $x+y$ kas mõlemad paaris või mõlemad paaritud. Esimesel juhul jagub nende korrutis 4-ga, teisel juhul on paaritu. Järelikult on kõik nõutud omadusega arvud eelnevas vaadeldud.

2. *Vastus:* kõik algarvud ja 4.

Lahendus 1. Ühegi algarvu p faktoriaal ei jagu arvuga p^2, sest arvus $p!$ esineb algarv p tegurina ainult ühe korra. Samuti ei jagu $4!$ ehk 24 arvuga 4^2 ehk 16. Näitame nüüd, et kõigi ülejäänud positiivsete täisarvude n korral jagub arv $n!$ arvuga n^2.

Olgu p arvu n mingi algtegur ja olgu k algarvu p astendaja arvu n algteguriteks lahutuses. Kui arvul n leidub veel mõni algtegur q, siis esinevad täisarvude 1 kuni n seas nii arv p^k kui ka arv $q \cdot p^k$, mistõttu faktoriaal $n!$ jagub arvuga p^{2k}. Sama arutelu saab läbi viia arvu n iga algteguri p kohta, järelikult faktoriaali $n!$ algteguriteks lahutuses esinevad kõik n algtegurid vähemalt 2 korda suuremas astmes kui arvus n. Seega kui arvul n on mitu algtegurit, siis jagub arv $n!$ arvuga n^2.

Jääb üle vaadata juhtu, kus p on arvu n ainuke algtegur, st $n = p^k$. Kui $k \geqslant 3$, siis esinevad täisarvude 1 kuni n seas nii p, p^{k-1} kui ka p^k ning need arvud on erinevad. Järelikult jagub faktoriaal $n!$ astmega p^{2k} ehk n^2. Kui $k = 2$ ja $p > 2$, siis esinevad täisarvude 1 kuni n seas p, $2p$ ja p^2 ning need arvud on erinevad, mistõttu jagub faktoriaal $n!$ astmega p^4 ehk n^2. Sellega on kõik kordarvud peale arvu 4 läbi vaadatud.



Joonis 1

Lahendus 2. Arv $n!$ jagub arvuga n^2 parajasti siis, kui arv $(n-1)!$ jagub arvuga n. Leiame järgnevas viimast tingimust rahuldavad positiivsed täisarvud n.

Kui n on algarv, siis arv $(n-1)!$ arvuga n ei jagu, sest ühelgi n-st väiksemal täisarvul ei ole algtegurit n. Kui $n = 4 = 2^2$, siis samuti ei jagu arv $(n-1)!$ ehk 6 arvuga n ehk 4. Teisalt, kui $n = p^2$, kus p on 2-st suurem algarv, siis sisalduvad täisarvude 1 kuni $n-1$ seas arvud p ja $2p$, mistõttu faktoriaal $(n-1)!$ jagub arvuga p^2 ehk n. Kui n on algarvu kuup või kõrgem aste või omab mitut erinevat algtegurit, siis ilmselt leidub tal jagaja d, mille korral $1 < d < n$ ja $d^2 \neq n$ (sobib nt arvu n vähim algtegur). Siis d ja $\frac{n}{d}$ on erinevad n-st väiksemad positiivsed täisarvud, mistõttu arv $(n-1)!$ jagub nende korrutisega n.

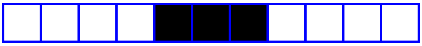
3. *Vastus:* ei.

Kui DE oleks kolmnurga ABC kesklõik, oleks D külje AB keskpunkt (joonis 1). Et $DP \parallel AQ$, oleks DP siis kolmnurga ABQ kesklõik. See aga tähendaks, et P oleks lõigu BQ keskpunkt ehk AP oleks kolmnurga ABQ mediaan. Et kiired AP ja AQ jaotavad nurga BAC kolmeks võrdseks osaks, on AP samas kolmnurga ABQ nurgapoolitaja. Seega kolmnurk ABQ on võrdhaarne ja AP on ühtlasi tema kõrgus. Sellest tulenevalt on sirge AP risti sirgega BC.

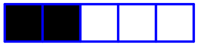
Vahetades omavahel P ja Q ning B ja C rollid, saame sarnase mõttekäiguga, et ka sirge AQ on risti sirgega BC. See aga pole võimalik, sest AP ja AQ ei saa kokku langeda. Järelikult ei ole võimalik, et DE oleks kolmnurga ABC kesklõik.

4. *Vastus:* b) ei.

a) Kui n ja m on sama paarsusega, siis saab alustaja oma esimesel käigul katta kleepribaga mängulaua keskmised ruudud, nii et kummalegi poole jääb ühepalju vabu ruute (joonis 2 kujutab olukorda juhul $n = 11$



Joonis 2

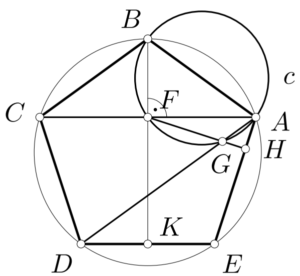


Joonis 3

ja $m = 3$). Edasi saab ta igale teise mängija käigule vastata sümmeetrilise käiguga mängulaua keskpunkti suhtes, nii et vabad ruudud paiknevad pärast tema käiku jällegi laua keskpunkti suhtes sümmeetriliselt. Tõepoolest, pärast alustaja avakäiku saavad mängijad ühe käiguga katta vabu ruute vaid laua keskpunktist ühel pool, sest kleepriba, mis katab mingi vaba ruudu, ei ulatu üle laua juba kaetud keskosa teisele poole. Seetõttu on alustaja vastase käigul kaetud vabade ruutudega sümmeetrilised ruudud pärast seda käiku jätkuvalt vabad ja alustajal on võimalik oma strateegiat rakendada. Kuna katmata ruutude arv igal käigul väheneb ja alustaja käigupuudusse ei jää, peab käigupuudusse jääma alustaja vastane.

b) Kui $n = 5$ ja $m = 2$, siis alustaja saab võita, kattes esimesel käigul kaks ruutu mängulaua otsast (joonis 3). Vastase mistahes vastukäik jätab kas 1 või 2 kõrvutiasuvat ruutu katmata, mille alustaja saab järgmisel käigul katta.

Märkus. Ülesande b-osa eitav vastus näitab, et sümmeetriliselt vastamise strateegia siin ei tööta. See strateegia viib võidule ainult eeldusel, et teine mängija ei saa sümmeetriliselt paiknevaid vabu ruute korraga ära katta. Õigupoolest saab alustaja, kui teab, et vastane kasutab sümmeetriliselt vastamise strateegiat, võita suvaliste eri paarsusega n ja m korral, mis rahuldavad tingimust $m < \dfrac{n}{2}$: ta peab vältima keskmiste ruutude katmist, kuni tekib võimalus need ühe käiguga ära katta, nii et vastasel pole võimalik enam sümmeetriliselt vastata. (Kui $m \geqslant \dfrac{n}{2}$, siis pole alustajal võimalik keskmisi ruute vältida.) Seetõttu on ka a-osas võtmeküsimus veendumine, et alustaja vastane ei saa sümmeetrilisi ruute ühe käiguga katta.



Joonis 4

5. Et AB on ringjoone c diameeter, siis $\angle AFB = 90^\circ$ (joonis 4) ehk BF on kolmnurga ABC kõrgus. Kuna $|AB| = |BC|$, siis BF on ühtlasi mediaan ehk F on lõigu AC keskpunkt. Sümmeetria tõttu läbib sirge BF punkti K ning $\angle FKE = 90^\circ$.

Märkame, et $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$, sest nurgad BAC, CAD ja CAE toetuvad korrapärase viisnurga $ABCDE$ ümberringjoone ühe ja sama pikkusega kaartele. Et punktid A, B, F ja G paiknevad ühel ringjoonel c selles järjestuses, siis $\angle ABF = 180^\circ - \angle AGF = \angle AGH$. Seega on kolmnurgad ABF ja AGH tunnuse NN järgi sarnased. Järelikult $\angle AHG = \angle AFB = 90^\circ$.

Kokkuvõttes on nelinurga $FHEK$ vastastippude K ja H juures täisnurgad, mistõttu on tema tipud ühel ringjoonel.

Lahendused

1. *Vastus:* $(27,729)$, $(8,128)$, $(0,0)$, $(-1,-1)$.

Kui $b=0$, siis võrrandi järgi ka $2a^2+b=0$, kust $a=0$.

Eeldame nüüd, et $b \neq 0$. Et b^3 ja $(2a^2+b)^3$ on täisarvude kuubid, on nende suhe a ratsionaalarvu kuup; kuna a on täisarv, siis on ta täisarvu kuup. Olgu $a=c^3$, kus c on täisarv. Kuupjuure võtmisel võrrandi mõlemast poolest saame samaväärse seose $2c^6+b=bc$ ja sellest omakorda

$$2c^6 = b(c-1). \tag{1}$$

Et c ja $c-1$ on ühistegurita, siis on ka c^6 ja $c-1$ ühistegurita. Seega $c-1$ peab olema arvu 2 tegur, mistõttu c on üks arvudest 3, 2, 0 ja -1.

- Kui $c=3$, siis $a=27$ ja võrrandist (1) saame $2b=2\cdot 729$, kust $b=729$.
- Kui $c=2$, siis $a=8$ ja võrrandist (1) saame $b=128$.
- Kui $c=0$, siis võrrandist (1) saame $-b=0$, kust $b=0$. See juht on juba vaadeldud.
- Kui $c=-1$, siis $a=-1$ ja võrrandist (1) saame $-2b=2$, kust $b=-1$.

2. *Lahendus 1.* Et $(x-y)^2 \geqslant 0$, siis $x^2+y^2-2xy \geqslant 0$ ehk $x^2+y^2 \geqslant 2xy$. Samamoodi saame $y^2+z^2 \geqslant 2yz$ ja $z^2+x^2 \geqslant 2zx$. Liites kõik need kolm võrratust kokku, saame

$$2(x^2+y^2+z^2) \geqslant 2(xy+yz+zx).$$

Korrutades võrratuse pooled 2-ga, saame

$$4(x^2+y^2+z^2) \geqslant 4(xy+yz+zx).$$

Liites sellele võrratusele tõesed võrratused $x^2 \geqslant 0$, $y^2 \geqslant 0$ ja $z^2 \geqslant 0$, saame

$$5(x^2+y^2+z^2) \geqslant 4(xy+yz+zx).$$

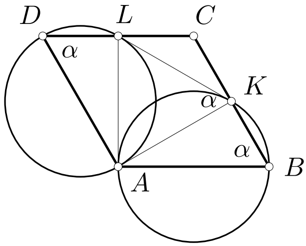
Lahendus 2. Tõestatav väide on samaväärne võrratusega

$$5x^2+5y^2+5z^2-4xy-4yz-4zx \geqslant 0. \tag{2}$$

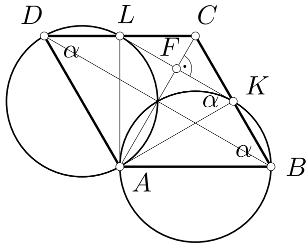
Märkame, et

$$5x^2+5y^2+5z^2-4xy-4yz-4zx = (2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2.$$

Seega tuleneb võrratus (2) sellest, et reaalarvude ruudud on mittenegatiivsed ja mittenegatiivsete arvude summa on mittenegatiivne.



Joonis 5



Joonis 6

3. *Vastus:* 60° ja 120°.

Lahendus 1. Tähistame $\angle ABC = \angle ADC = \alpha$; vastavalt ülesande tingimustele siis ka $\angle AKL = \alpha$ (joonis 5). Thalese teoreemi põhjal on diameetrile toetuv piirdenurk täisnurk, seega AK ja BC on risti ning AL ja CD on risti. Et samas $\angle ABK = \alpha = \angle ADL$ ja $|AB| = |AD|$, on täisnurksed kolmnurgad ABK ja ADL võrdsed. Järelikult $|AK| = |AL|$, millest tulenevalt $\angle ALK = \alpha$. Teisalt, kuna nelinurga sisenurkade summa on 360°, siis

$$\angle KAL = 360^\circ - \angle KCL - \angle AKC - \angle ALC = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - 2 \cdot 90^\circ = \alpha.$$

Seega on kolmnurk AKL võrdkülgne, sest kõik nurgad on suurusega α. Siit $\alpha = 60^\circ$ ja rombi nurkade suurused 60° ja 120°.

Lahendus 2. Nagu lahenduses 1 tähistame $\alpha = \angle ABC = \angle ADC = \angle AKL$ ja näitame, et kolmnurgad ABK ja ADL on võrdsed. Seega $|BK| = |DL|$, millest ühtlasi $|CK| = |CL|$. Et $\angle KCL = 180^\circ - \alpha$, siis $\angle CKL = \angle CLK = \frac{\alpha}{2}$. Järelikult $90^\circ = \angle AKC = \angle AKL + \angle LKC = \frac{3}{2}\alpha$, kust $\alpha = 60^\circ$. Rombi nurkade suurused on 60° ja 120°.

Lahendus 3. Nagu lahenduses 1 tähistame $\alpha = \angle ABC = \angle ADC = \angle AKL$ ja näitame, et kolmnurgad ABK ja ADL on võrdsed. Seega $|BK| = |DL|$, millest ühtlasi $\frac{|BK|}{|BC|} = \frac{|DL|}{|CD|}$. Kiirteteoreemi põhjal $KL \parallel BD$. Et rombi diagonaalid on risti, on diagonaal AC risti ka lõiguga KL; tähistame nende lõikude lõikepunkti F (joonis 6). Kolmnurga CKA täisnurga tipust tõmmatud kõrgus KF jaotab kolmnurga kaheks temaga sarnaseks täisnurkseks kolmnurgaks CFK ja KFA. Sellest tulenevalt $\angle ACK = \angle AKF = \alpha$. Rombi diagonaal aga poolitab nurga, mistõttu $\angle BCD = 2\alpha$. Võrrandist $180^\circ - \alpha = 2\alpha$ leiame $\alpha = 60^\circ$, rombi nurkade suurused on 60° ja 120°.

4. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Kui sõna koosneb kahest täishäälikust, siis vastavalt reeglile 3 on teine neist lühike ja esimene reegli 2 põhjal järelikult pikk. Kui sõna algab täishäälikuga ja lõpeb kaashäälikuga, siis teise hääliku pikkuse määrab ühe- või kahekordne täht ja esimene peab reeglite 1 ja 2 põhjal olema vastupidise pikkusega. Kui sõna algab kaashäälikuga, siis tema pikkus on tuvastatav ühe- või kahekordse kirjutamise järgi ja teine häälik on reegli 3 põhjal lühike. Seega kõikidel juhtudel on sõna tuvastatav.

b) Reeglitega on lubatud nii kahest lühikesest kaashäälikust koosnev sõna kui ka sõna, mis algab pika ja lõpeb lühikese kaashäälikuga. Kui kirjakeeles ei eristata kaashääliku pikkust ühe- või kahekordse tähega, ei ole võimalik kaashäälikutest koosneva sõna algushääliku pikkust kirjapildi järgi tuvastada.

5. *Vastus:* kõik paarisarvud, välja arvatud 2 paarituarvulised astmed.

Nimetame *headeks* kõiki paarisarve, mis ei ole 2 paarituarvulised astmed, ja *halbadeks* kõiki ülejäänud positiivseid täisarve. Näitame, et mängija, kelle käigu eel on laual olevate kommide arv hea, saab käia nii, et vastase käigu eel on kommide arv halb, ning mängija, kelle käigu eel on kommide arv halb, on kas kaotanud või sunnitud oma käiguga jätma lauale hea kommide arvu. Et kommide arv igal käigul väheneb, siis järeldub sellest, et alustaja võidab parajasti siis, kui algselt on laual olevate kommide arv hea.

Mängija, kelle käigu eel on laual olevate kommide arv paarisarv, mis pole 2 aste, saab ära süüa selle arvu paaritu 1-st suurema teguri jagu komme. Järele jääv kommide arv on paaritu, st halb. Kui aga käigu eel on laual olevate kommide arv 2 paarisaste, saab mängija ära süüa täpselt pooled kommid, misjärel on laual olevate kommide arv 2 paarituarvuline aste e jälle halb.

Seevastu kui kommide arv enne käiku on paaritu, saab mängija valida ainult paarituid tegureid. Pärast paaritu arvu kommide eemaldamist jääb alles paarisarv komme. Seejuures jagub järelejäänud kommide arv eemaldatud kommide arvuga, sest sellega jaguvad nii algne kui ka eemaldatud kommide arv. Et see tegur on paaritu ja 1-st suurem, ei ole allesjäävate kommide arv 2 aste. Seega on allesjäävate kommide arv hea. Kui aga kommide arv enne käiku on 2 paaritu aste, siis saab mängija valida ainult paarisarvulisi tegureid, mistõttu on allesjäävate kommide arv ka sel puhul paaris. Et eemaldada saab ülimalt pooled kommid, siis saab allesjäänud kommide arv olla 2 aste vaid siis, kui astendaja on 1 võrra väiksem kui kommide arvus enne käiku. See aga oleks 2 paarisaste. Järelikult on allesjäävate kommide arv ka sel juhul hea.

Lahendused

1. *Vastus:* 11.

Tähistame $f(n) = 2n^3 + 4n^2 - 3n + 12$. Järgnevas tabelis leiame arvude n^2, n^3, n^5 ja $f(n)$ jäägid 11-ga jagamisel sõltuvalt arvu n jäägist.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
n^3	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10
n^5	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10
$f(n)$	1	4	5	5	5	6	9	4	3	7	6

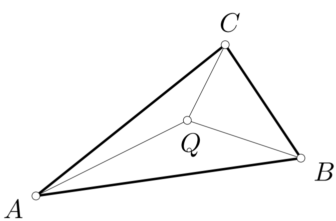
Näeme, et suvalise täisarvu n viies aste saab 11-ga jagades anda jäägiks vaid 0, 1 või 10. Arvud kujul $f(n)$ aga annavad 11-ga jagades jääke 1, 3, 4, 5, 6, 7 ja 9, kusjuures 1 on jääk vaid juhul, kui n jagub 11-ga. Järelikult selleks, et $f(p)$ saaks olla täisarvu viies aste, peab p jaguma 11-ga. Et p peab olema algarv, siis ainus võimalus on $p = 11$. Ja tõepoolest,

$$f(11) = 2 \cdot 11^3 + 4 \cdot 11^2 - 3 \cdot 11 + 12 = 3125 = 5^5.$$

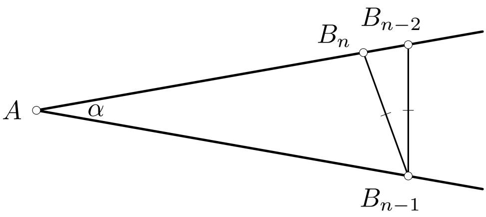
Märkus. Lahenduseni võib jõuda, proovides järjest läbi algarvud 2, 3, 5, 7 ja 11 ja kui on selgunud, et $p = 11$ puhul on vaadeldav arv $f(p)$ täisarvu viies aste, siis järeldada, et tasub uurida jääke just 11-ga jagamisel.

2. Kolmnurgavõrratusest saame

$$\begin{aligned} |AQ| + |QB| &\geqslant |AB|, \\ |BQ| + |QC| &\geqslant |BC|, \\ |CQ| + |QA| &\geqslant |CA| \end{aligned}$$



Joonis 7



Joonis 8

(joonis 7). Võrdus kehtib esimeses võrratuses parajasti siis, kui punkt Q asub küljel AB, teises võrratuses parajasti siis, kui Q asub küljel BC, ja kolmandas parajasti siis, kui Q asub küljel CA. Et sama punkt ei saa asuda korraga kolmnurga kolmel küljel, saame nende võrratuste liitmisel range võrratuse

$$2 \cdot (|AQ| + |BQ| + |CQ|) > 2p.$$

Jagades võrratuse pooled 2-ga, saame ülesandes nõutud võrratuse.

3. *Vastus:* $\dfrac{\beta - 90^\circ}{\alpha} + 1$, kui $\dfrac{\beta - 90^\circ}{\alpha}$ on naturaalarv, ja $\left\lfloor \dfrac{\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1$ vastasel korral.

Olgu B_n mingi $n > 1$ korral defineeritav (joonis 8). Konstruktsiooni järgi asuvad punktid A, B_{n-2} ja B_n ühel sirgel, kusjuures A ei saa olla B_{n-2} ja B_n vahel. Et $|B_{n-1}B_{n-2}| = |B_{n-1}B_n|$ ja $B_{n-2} \neq B_n$, on $B_{n-2}B_{n-1}B_n$ võrdhaarne kolmnurk, mistõttu $\angle AB_{n-2}B_{n-1} + \angle AB_nB_{n-1} = 180^\circ$, kusjuures $\angle AB_{n-2}B_{n-1} \neq 90^\circ$. Järelikult

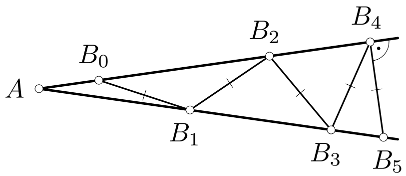
$$\begin{aligned}
\angle AB_{n-1}B_n &= 180^\circ - \alpha - \angle AB_nB_{n-1} \\
&= 180^\circ - \alpha - \left(180^\circ - \angle AB_{n-2}B_{n-1}\right) \\
&= \angle AB_{n-2}B_{n-1} - \alpha.
\end{aligned}$$

Et $\angle AB_0B_1 = \beta$, siis induktsiooniga saame $\angle AB_{n-1}B_n = \beta - (n-1)\alpha$.

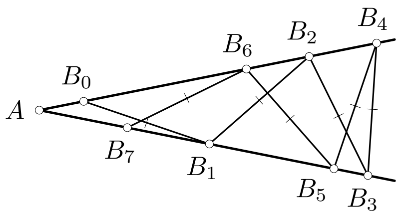
Seega on B_n defineerimiseks vajalik, et $\beta - (n-2)\alpha \neq 90^\circ$ ja $\beta - (n-1)\alpha \geqslant 0^\circ$. Need tingimused on ka piisavad, sest kui kehtib $\beta - (n-2)\alpha \neq 90^\circ$ ehk $\angle AB_{n-2}B_{n-1} \neq 90^\circ$, siis on punkt B_n valitav erinevana punktist B_{n-2} sirgel AB_{n-2}, ning kui kehtib $\beta - (n-1)\alpha \geqslant 0^\circ$ ehk $\angle AB_{n-2}B_{n-1} \geqslant \alpha$, siis asub see punkt haaral AB_{n-2}.

Kokkuvõttes on suurim n, mille korral B_n on defineeritav, võrdne arvuga $\dfrac{\beta - 90^\circ}{\alpha} + 1$, kui mingi $n > 1$ korral $\beta - (n-2)\alpha = 90^\circ$ ehk $\dfrac{\beta - 90^\circ}{\alpha}$ on mittenegatiivne täisarv, ja arvuga $\left\lfloor \dfrac{\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1$ muul juhul. Joonis 9 kujutab olukorda esimesel juhul ja joonis 10 teisel juhul.

Märkus. Kirjutis $\lfloor x \rfloor$ tähistab reaalarvu x *täisosa*, st suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu x.



Joonis 9



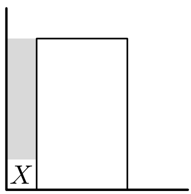
Joonis 10

4. *Vastus:* 121.

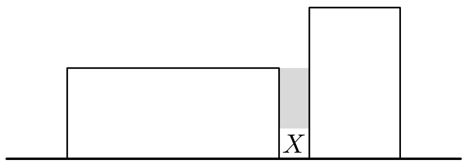
Tähistame viimasena alles jäävat ruutu tähega X. Ruut X ei saa asuda algse ruudustiku nurgas, sest tema kõrvalt väljalõigatava ristküliku ja ruudustiku serva vahele jääks riba laiusega 1, mille ruute poleks võimalik välja lõigata (joonisel 11 halliks värvitud). Samuti ei saa ruut X asuda algse ruudustiku serval, sest kummaltki poolt väljalõigatavate ristkülikute vahele jääks riba laiusega 1 (joonis 12).

Uurime, kuidas saavad ruudu X ümber paiknevad ruudud väljalõigatavatesse ristkülikutesse jaotuda; lihtsuse mõttes identifitseerime naaberruute ilmakaarte järgi. Kuulugu ruudu X idapoolne naaber ristkülikusse A. Ruudu X kirde- või kagupoolne naaber kuulub siis samuti ristkülikusse A; üldisust kitsendamata kuulugu ruudu X kirdepoolne naaber ristkülikusse A (joonis 13). Ruudu X põhjapoolne naaber ei saa kuuluda ristkülikusse A, vaid peab kuuluma sellest erinevasse ristkülikusse B. Siis peab ka ruudu X loodepoolne naaber kuuluma ristkülikusse B. Sarnaselt jätkates näeme, et ruudu X lääne- ja edelapoolne naaber peavad kuuluma kolmandasse ristkülikusse C ning lõuna- ja kagupoolne naaber neljandasse ristkülikusse D (joonis 14).

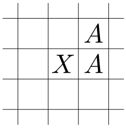
Ruudu X idapoolsest naabrist algava idasuunalise riba ruudud kuni ristküliku idaservani jaotuvad väljalõigatavatesse ristkülikutesse, samuti jaotuvad ruudu X lõunapoolsest naaberruudust algava idasuunalise riba ruudud kuni ristküliku idaservani väljalõigatavatesse ristkülikutesse. Et väljalõigatavates ristkülikutes on paaritu arv ühikruute, on nende ristkülikute



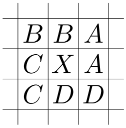
Joonis 11



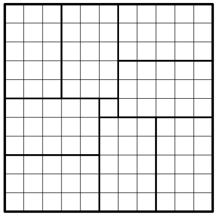
Joonis 12



Joonis 13



Joonis 14

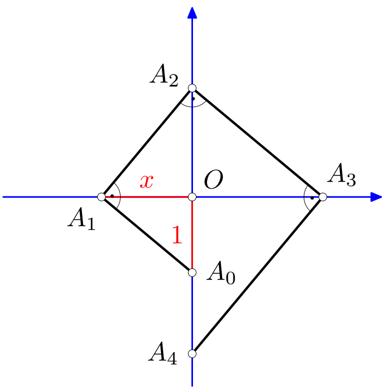


Joonis 15

küljepikkused paaritud. Seega peavad nende kahe riba pikkused avalduma 1 või enama paaritu 1-st suurema täisarvu summana. Need pikkused ise on kaks järjestikust positiivset täisarvu. Vähimad kaks järjestikust positiivset täisarvu, mis esituvad paaritute 1-st suuremate täisarvude summana, on 5 (mis on ise paaritu) ja 6 (mis on 3 + 3). Seega peab ruudust X ida suunas jääma vähemalt 5 ruutu. Sarnane arutelu näitab, et ruudust X igas suunas peab jääma vähemalt 5 ruutu. Seega on algse ruudustiku kumbki küljepikkus vähemalt $5+1+5$ ehk 11 ning ühikruutude arv 121. See on ka võimalik, nagu näitab joonis 15.

5. *Vastus:* a) jah; b) ei.

Olgu koordinaatide alguspunkt O ning teekonna alguspunkt A_0, esimene pöördepunkt A_1, teine pöördepunkt A_2, kolmas pöördepunkt A_3 ja lõpppunkt A_4 (joonis 16). Täisnurksed kolmnurgad OA_0A_1 ja OA_1A_2 on sarnased teguriga x, sest $\angle OA_1A_2 = 90^\circ - \angle OA_1A_0 = \angle OA_0A_1$ ja $\dfrac{|OA_1|}{|OA_0|} = \dfrac{x}{1} = x$. Samuti on sarnased kolmnurgad OA_1A_2 ja OA_2A_3, kusjuures tegur on jäl-



Joonis 16

legi x, sest kolmnurkade OA_0A_1 ja OA_1A_2 sarnasusest $\frac{|OA_2|}{|OA_1|} = x$. Analoogselt on ka kolmnurgad OA_2A_3 ja OA_3A_4 sarnased teguriga x. Kokkuvõttes $|OA_2| = x^2$, $|OA_3| = x^3$ ja $|OA_4| = x^4$. Pythagorase teoreemi põhjal on teekonna pikkus $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{x^2+x^4} + \sqrt{x^4+x^6} + \sqrt{x^6+x^8}$ ehk $(1+x+x^2+x^3)\sqrt{1+x^2}$ ehk $(x^4-1)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ (kui $x \neq 1$). Põrnika teekonna alg- ja lõpppunkti vaheline kaugus on aga $|x^4-1|$, sest ilmselt asuvad punktid A_0 ja A_4 samal pool koordinaatide alguspunkti.

a) Võttes $x = \frac{4}{3}$, on $x^4 - 1$ ratsionaalarv, sest x on ratsionaalarv. Et samas $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$, on ratsionaalarv ka $(x^4-1)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

b) Eeldame, et teekonna alg- ja lõpppunkti vaheline kaugus on täisarv; siis x^4 on täisarv. Oletame, et ka teekonna pikkus $(x^4-1)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ on täisarv (võime eeldada, et $x \neq 1$, sest juhul $x = 1$ on teekonna pikkus $4\sqrt{2}$, mis pole täisarv). Kuna $x^4 - 1$ on täisarv, peab $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ olema ratsionaalarv. Vaatame kolme juhtu.

   - Kui x on täisarv, siis $x - 1$ täisarv, mistõttu peab $\sqrt{x^2+1}$ olema ratsionaalarv ja $x^2 + 1$ seega täisruut. See aga pole võimalik, sest kaks järjestikust positiivset täisarvu ei saa olla täisruudud.
   - Olgu x irratsionaalarv, kuid x^2 täisarv. Et $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$ ehk $\frac{x^2+1}{x^2+1-2x}$ on ratsionaalarvu ruut, siis ka $\frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$ ehk $1 - \frac{2x}{x^2+1}$ on ratsionaalarvu ruut. See näitab, et $\frac{2x}{x^2+1}$ on ratsionaalarv, kuid nii ei saa olla, sest $2x$ on irratsionaalarv ja $x^2 + 1$ täisarv.
   - Olgu x^2 irratsionaalarv. Sarnaselt eelmises punktis tehtule näeme, et $\frac{2x}{x^2+1}$ on ratsionaalarv. Seega $\frac{4x^2}{x^4+1+2x^2}$ on ratsionaalarvu ruut, mistõttu ka $\frac{x^4+1+2x^2}{4x^2}$ ehk $\frac{1}{2} + \frac{x^4+1}{4x^2}$ on ratsionaalarv. Nii aga ei saa olla, sest $x^4 + 1$ on täisarv, kuid $4x^2$ irratsionaalarv.

Lahendused

1. *Vastus:* selliseid kolmikuid pole.

Oletame, et p ja q on paaritud. Siis ka p^2 ja q^2 on paaritud ning $p^2 + q^2$ on paaris, mistõttu võrrandi vasak pool jagub 4-ga. Täisarvude ruudud aga annavad 4-ga jagades jäägi 0 või 1, mistõttu r^2+1 annab 4-ga jagades jäägi 1 või 2 ega jagu 4-ga. Vastuolu näitab, et üks arvudest p ja q on paaris; olgu üldisust kitsendamata p paaris. Et tegemist on algarvudega, siis $p = 2$.

Täisarvude ruudud annavad 3-ga jagades jäägi 0 või 1. Ilmselt aga $r > 3$, sest võrrandi vasak pool on suurem kui 10. Algarvulisuse tõttu niisiis r ei jagu 3-ga. Seega $r^2 \equiv 1 \pmod 3$, kust $r^2 + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Et ka $2018 \equiv 2 \pmod 3$, siis $p^2 + q^2 \equiv 1 \pmod 3$. Kuna $p^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$, siis $q^2 \equiv 0 \pmod 3$. Seega q jagub 3-ga ehk algarvulisuse tõttu $q = 3$.

Võrrandi vasak pool on niisiis $2018 \cdot 13$. Et $2018 \cdot 13 \equiv 3 \cdot 3 = 9 \equiv 4 \pmod 5$, siis $r^2 \equiv 3 \pmod 5$. Kuid täisarvude ruudud annavad 5-ga jagades vaid jääke 0, 1 ja 4.

Märkus. Lahenduses kasutatud tähistus $x \equiv y \pmod m$ tähendab, et x ja y annavad m-ga jagades ühe ja sama jäägi.

2. *Lahendus 1.* Avades sulud ja viies liikmed ühele poole, saame samaväärse võrratuse

$$x^3 + 8x^2 - 19x + 10 \geqslant 0. \tag{3}$$

Märkame, et

$$x^3 + 8x^2 - 19x + 10 = (x-1)^2(x+10).$$

Et $(x-1)^2 \geqslant 0$ ja positiivse x korral $x + 10 > 0$, siis võrratus 3 tõesti kehtib.

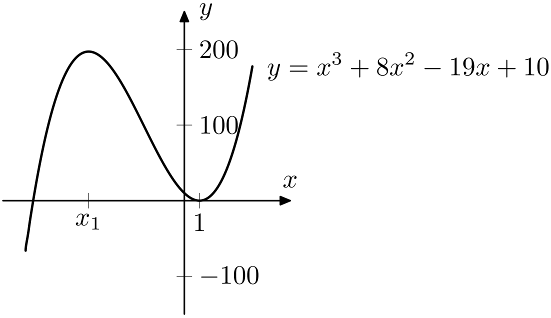
Lahendus 2. Tähistades

$$f(x) = x^3 + 8x^2 - 19x + 10,$$

on ülesande võrratus samaväärne võrratusega $f(x) \geqslant 0$. Leiame

$$f'(x) = 3x^2 + 16x - 19.$$

Kuna $D = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-19) > 0$, siis funktsioonil f' on kaks reaalarvulist nullkohta. Olgu väiksem ja suurem nullkoht vastavalt x_1 ja x_2, siis lahendivalemist saame $x_1 < 0$ ja $x_2 = 1$. Et $f'(x)$ ruutliikme kordaja on positiivne,



Joonis 17

on funktsioon f' suuremal nullkohal 1 kasvav, mis tähendab, et f' väärtused on vahemikus $(x_1; 1)$ negatiivsed ja vahemikus $(1; \infty)$ positiivsed. Vastavalt on funktsioon f vahemikus $(x_1; 1)$ kahanev ja vahemikus $(1; \infty)$ kasvav (joonis 17). Seega iga x korral vahemikust $(x_1; \infty)$, mh iga positiivse x korral, kehtib $f(x) \geqslant f(1) = 0$.

Lahendus 3. Iga positiivse täisarvu k korral saame aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelisest võrratusest

$$\frac{x + 1 \cdot k}{k+1} \geqslant \sqrt[k+1]{x \cdot 1^k}.$$

Kasutades seda võrratust $k = 1$, $k = 2$ ja $k = 5$ jaoks, saame võrratused

$$\begin{aligned} x + 1 &\geqslant 2 \cdot \sqrt{x}, \\ x + 2 &\geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{x}, \\ x + 5 &\geqslant 6 \cdot \sqrt[6]{x}. \end{aligned}$$

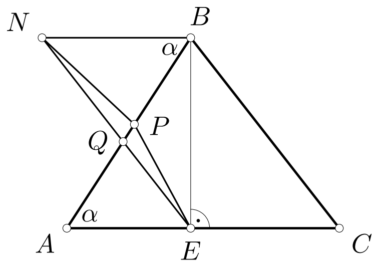
Korrutades nende võrratuste vastavad pooled, saame ülesandes antud võrratuse.

3. Tähistame $|AC| = b$, $|AB| = c$, $\angle BAC = \alpha$ ning $|AE| = |AP| = u$.

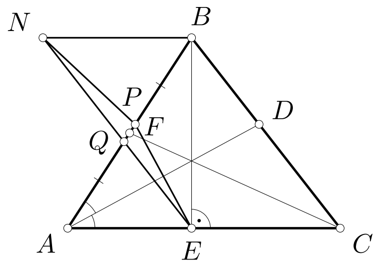
Et $BCEN$ on rööpkülik, siis $|BN| = |CE| = b - u$ ja $BN \parallel CE$. Viimasest järeldub $\angle NBP = \alpha$ (joonis 18). Kuna $\angle QAE = \angle QBN$ ja $\angle AQE = \angle BQN$, on kolmnurk AQE sarnane kolmnurgaga BQN tunnuse NN põhjal.

a) Kolmnurga AEP pindala on $\frac{1}{2}u^2 \sin\alpha$, kolmnurga BNP pindala aga $\frac{1}{2}(b-u)(c-u)\sin\alpha$. Seega $u^2 = (b-u)(c-u)$, kust

$$\frac{c-u}{u} = \frac{u}{b-u}. \tag{4}$$



Joonis 18



Joonis 19

Kolmnurkade AQE ja BQN sarnasusest aga saame $\frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{|AE|}{|BN|}$ ehk, tähistades $|BQ| = x$,

$$\frac{c-x}{x} = \frac{u}{b-u}. \tag{5}$$

Seos (5) taandub lineaarvõrrandiks x suhtes, mistõttu tal leidub ainult üks lahend. Võrduse (4) põhjal rahuldab seda võrrandit $x = u$. Järelikult $|BQ| = u = |AP|$, mistõttu külje AB keskpunkt poolitab ka lõigu PQ.

b) Olgu F külje AB keskpunkt ja D kolmnurga ABC tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt küljega BC (joonis 19). Nurgapoolitaja omadusest tulenevalt $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Sirgete NE ja BC paralleelsuse tõttu on kolmnurgad ABC ja AQE sarnased, mistõttu sarnased on ka ABC ja BQN. Selle ja ülesande a-osa põhjal $\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{b-u}{u} = \frac{|BN|}{|BQ|} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Järelikult

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = 1 \cdot \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} = 1.$$

Ceva teoreemi põhjal lõikuvad kiired AD, BE ja CF ühes punktis.

4. *Vastus:* jah, 6.

Oletame, et $n \times n$ tabel on täidetud arvudega -1, 0 ja 1 nii, et rea-, veeru- ja diagonaalisummade seas esinevad kõik täisarvud $-n$ kuni n. Et n ja $-n$ on võimalik saada vastavalt ainult 1-dest ja ainult -1-dest, ei saa nad tekkida erinevat liiki summadena (üks rea- ja teine veerusumma vms), sest igal kahel erinevat liiki summal on ühine liidetav. Kui n ja $-n$ tekiksid diagonaalisummadena, siis peaks n olema paarisarv (muidu oleks keskmine liidetav ühine) ning igas reas ja igas veerus oleks üks 1 ja üks -1. Siis aga poleks võimalik saavutada summasid $n-1$ ja $-(n-1)$. Seega saavad n ja $-n$ olla kas mõlemad reasummad või mõlemad veerusummad. Üldisust kitsendamata eeldame, et nad on reasummad.

1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1
−1	−1	0	−1	−1	−1
−1	−1	−1	1	−1	−1
1	−1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1

Joonis 20

Arv $n-1$ saab tekkida ainult $n-1$ arvu 1 ja arvu 0 summana. Et igas veerus ja kummalgi diagonaalil esineb -1, siis saab ka arv $n-1$ tekkida vaid reasummana. Analoogselt saab ka arv $-(n-1)$ tekkida vaid reasummana.

Arv $n-2$ saab tekkida ainult kas $n-2$ arvu 1 ja kahe arvu 0 summana või $n-1$ arvu 1 ja arvu -1 summana. Et igas veerus ja kummalgi diagonaalil esineb kas kaks arvu -1 või arvud 0 ja -1, siis saab ka arv $n-2$ tekkida vaid reasummana. Analoogselt saab ka arv $-(n-2)$ tekkida vaid reasummana.

Kokkuvõttes peab tabelis olema vähemalt 6 rida. Tingimusi rahuldav näide 6×6 tabelist on joonisel 20: reasummad ülalt alla on $6, 5, -5, -4, 4$ ja -6, veerusummad vasakult paremale $0, -2, 1, 2, -1, 0$ ning diagonaalide arvude summad 3 ja -3.

5. *Vastus:* jah.

Vähendagu esimene mängija võrrandi vabaliiget alati väiksema lahendi võrra. Näitame, et see strateegia on võitev; oletame väitevastaselt, et mäng kestab lõpmata kaua.

Esimene mängija suurendab lineaarliikme kordajat igal oma käigul 1 võrra. Kui teine mängija vastab oma põhikäiguga, siis ta lineaarliiget ei muuda, kui aga alternatiivse käiguvariandiga, siis muudab ta lineaarliikme tagasi selliseks, nagu see oli enne esimese mängija käiku. Seega esimese mängija käigu ja talle vahetult järgneva teise mängija käigu koosmõjus lineaarliikme kordaja kas kasvab 1 võrra või – kui teine mängija kasutab alternatiivset käiguvarianti – jääb samaks.

Kui teine mängija kasutaks lõpmata palju kordi oma põhikäiku, siis muutuks võrrandi lineaarliikme kordaja varem või hiljem positiivseks. Viéte'i teoreemi põhjal järeldub sellest, et lahendite summa on negatiivne. Siis oleks ka vähemalt üks lahendeist negatiivne, mis tähendaks, et esimene mängija on juba võitnud, vastuolu.

Järelikult kasutab teine mängija mingist seisust alates ainult alternatiivset käiguvarianti. Kui enne esimese mängija käiku on tahvlil ruutvõrrand

$x^2 + px + q = 0$ lahenditega x_1, x_2, kus $x_1 \leqslant x_2$, siis Viéte'i teoreemi põhjal $p = -(x_1 + x_2)$ ja $q = x_1 x_2$, mistõttu pärast esimese mängija käiku on ruutvõrrandi lineaarliikme kordaja $-(x_1 + x_2) + 1$ ehk $-(x_1 + (x_2 - 1))$ ja vabaliige $x_1 x_2 - x_1$ ehk $x_1(x_2 - 1)$. Viéte'i teoreemi põhjal on x_1 ja $x_2 - 1$ uue ruutvõrrandi lahendid. Näeme, et kui lahendite vahe on enne käiku suurem kui 1, siis käigu tulemusena lahendite vahe väheneb 1 võrra, kui aga lahendite vahe enne käiku on 0 ja 1 vahel, siis see on ka pärast käiku 0 ja 1 vahel. Analoogselt kehtib sama tulemus ka teise mängija alternatiivkäigu puhul. Seega jõutakse varem või hiljem olukorda, kus teine mängija ei saa alternatiivkäiku teha, vastuolu.

Hindamisskeemid

1. *(Eno Tõnisson)*
   Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Leitud, et paaritud arvud on nõutud omadusega: 2 p
   - Leitud, et 4-ga jaguvad arvud on nõutud omadusega: 2 p
   - Põhjendatud, et rohkem selliseid arve ei ole: 3 p

   Kui arvud 1 ja 4 on välja jäetud, siis võeti 1 punkt maha.
2. *(Oliver Nisumaa)*
   Esitame kaks eraldi skeemi erinevate lähenemiste hindamiseks.

   Skeem 1. Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Kontrollitud, et kui n on algarv, siis $n!$ ei jagu arvuga n^2: 1 p
   - Kirjutatud, et $n!$ jagub arvuga n^2 parajasti siis, kui $(n-1)!$ jagub arvuga n: 1 p
   - Eristatud juht, kus $n = pq$, milles $1 < p, q < n$ ja $p \neq q$ (või mõni muu juht, mille korral saab viia läbi samasuguse tõestuse nagu järgnevas punktis): 1 p
   - Näidatud, et eelmise juhul korral $(n-1)!$ jagub arvuga pq: 1 p
   - Jaotatud järele jääv juht alamjuhtudeks ja vaadeldud need korrektselt läbi: 3 p

   Skeem 2. Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Näidatud, et kui hulgast $\{1, \ldots, n-1\}$ on võimalik valida arvud, mille korrutis on n, siis leiduvad kaks erinevat arvu a, b selliselt, et $1 < a, b < n$ ja $ab = n$: 2 p
   - Näidatud, et kui arvul n leiduvad kaks erinevat jagajat, mis ei ole võrdsed 1-ga ega n-ga, siis leiduvad kaks erinevat arvu a, b selliselt, et $1 < a, b < n$ ja $ab = n$: 2 p
   - Viidud lahendus lõpuni kasutades samu võtteid, mis eelmises lahenduses: 3 p

   Sellest, et kordarvu n korral kõik algtegurid sisalduvad $(n-1)!$ elementide hulgas, ei saa otseselt midagi kasulikku järeldada. Seal hulgas peab sisalduma algtegur sama palju kordi, kui ta sisaldub n-s. Kõige olulisem on, et juhtu, kus n on algarvu aste, tuleks eraldi vaadelda.

   Ainult õige vastuse eest punkte ei antud.

3. *(Kairi Hennoch)*

Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Näidatud, et $\angle DPA = \angle EQA = \angle PAQ$: 1 p
- Näidatud, et $\angle BDP = \angle CEQ = 2\angle PAQ$: 1 p

Üllatavalt palju leidus õpilasi, kes arvasid, et kolmnurga nurga kolmeks võrdseks osaks jagamine jaotab ka selle nurga vastaskülje kolmeks võrdseks osaks. Sellised lahendused tüüpiliselt punkte ei saanud.

4. *(Urve Kangro)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Ülesande a) osa täielik lahendus: 4 p

  Sealhulgas:
  - Toodud näited, kust paistis, et sümmeetria idee on olemas: *1 p*
- Toodud näide, kus juhul b) võib alustaja võita vastase mistahes mängu korral: 3 p

Enamuses töödest oli a) osas olemas alustaja sümmeetrilise käimise idee. Paljudes töödes oli väidetud, et juhul b) saab vastane alati sümmeetriliselt käia, mis pole alati õige. Need tööd said reeglina 4 punkti. Mõnedes töödes aga loeti lihtsalt allesjäänud ruutude arvu ning väideti näiteks, et esimene mängija peab alati vastasele jätma paarisarvu katmata ruute või siis esimene mängija peab katma sama palju ruute, kui teine mängija kattis. See ei pruugi aga alati olla võimalik, kui esimese mängija käigud pole tehtud sümmeetriliselt, ning sellest ei pruugi ka alati kasu olla (näiteks kui teisele mängijale jääb alles 2 kõrvuti ruutu ja $m \geqslant 2$, siis teine võidab).

5. *(Reimo Palm)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et $\angle FKE = 90^\circ$: 3 p
- Tõestatud, et $\angle FHE = 90^\circ$: 4 p

Kui teise võrduse tõestuse käigus tehti oluline lisaeeldus, mida ennast ei tõestatud, siis maksis see 2 punkti.

Muu väiksem puudujääk lahenduses maksis 1 punkti.

Hindamisskeemid

1. *(Jaan Toots)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et a on täisarvu kuup: 1 p
- Leitud lihtsustatud võrrand $2c^6 = b(c-1)$: 2 p
- Kasutades asjaolu, et c ja $c-1$ on ühistegurita, näidatud, et arv $c-1$ on arvu 2 tegur: 2 p
- Leitud kõik täisarvude paarid (a, b) eelnevast seosest: 2 p

Raskusi valmistas korrektselt põhjendamine, miks arv $c-1$ on arvu 2 tegur, mis on vajalik lahendite lõpliku hulga tõestamiseks. Ilma selgituseta, miks rohkem lahendeid ei leidu, ei antud punkte nende loetlemise eest, kuivõrd see oli triviaalne. Mõnes lahenduses jäi põhjendamata, miks a on täiskuup.

2. *(Märt Põldvere)*

Anname kolm eraldi skeemi erinevate lähenemiste hindamiseks.

Žürii lahenduse järgnevate osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud võrratus $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$: 1 p
- Leitud võrratus $y^2 + z^2 \geqslant 2yz$: 1 p
- Leitud võrratus $z^2 + x^2 \geqslant 2zx$: 1 p
- Tuletatud võrratus $2(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 2(xy + yz + zx)$: 2 p
- Tuletatud võrratus $4(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 4(xy + yz + zx)$: 1 p
- Eelneva põhjal tuletatud tõestatav võrratus: 1 p

Täisruutude $(x-y)^2$, $(y-z)^2$ ja $(z-x)^2$ eraldamist kasutava lahenduse järgnevate osade eest antud punktid summeeriti.

- Esialgne võrratuse viidud samaväärsele kujule, kus ühel pool võrratusmärki on 0: 1 p
- Eraldatud täisruut $(x-y)^2$: 1 p
- Eraldatud täisruut $(y-z)^2$: 1 p
- Eraldatud täisruut $(z-x)^2$: 1 p
- Eraldatud liidetav $2(x-y)^2 + 2(y-z)^2 + 2(z-x)^2$: 2 p
- Avaldise lõplik hindamine: 1 p

Täisruutude $(2x-y)^2$, $(2y-z)^2$ ja $(2z-x)^2$ eraldamist kasutava lahenduse järgnevate osade eest antud punktid summeeriti.

- Esialgne võrratuse viidud samaväärsele kujule, kus ühel pool võrratusmärki on 0: 1 p
- Eraldatud täisruut $(2x - y)^2$: 2 p
- Eraldatud täisruut $(2y - z)^2$: 2 p
- Eraldatud täisruut $(2z - x)^2$: 2 p

3. *(Elts Abel)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tehtud tingimustele vastav joonis: 1 p
- Põhjendatud kolmnurga AKL või KCL võrdhaarsus või punktide K ja L sümmeetrilisus: 2 p
- Avaldatud ühe kolmnurga või nelinurga nurgad rombi ühe nurga kaudu: 2 p
- Koostatud võrrand rombi ühe nurga suhtes: 1 p
- Arvutatud rombi nurgad: 1 p

Ülesanne pakkus ohtralt võimalusi selle lahendamiseks. Praktiliselt kahte täpselt sarnast lahenduskäiku ei olnud.

4. *(Raul Kangro)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud reeglitele vastavad sõnakujud: 2 p
- Esitatud selged põhjendused mittesobivate kujude jaoks (milliste reeglite põhjal välistatud): 1 p
- Analüüsitud esimese variandi juhud: 2 p
- Näidatud teise variandi puhul kirjapilt, mis võib tähendada mitut sõna: 2 p

Ülesanne osutus lihtsaks, kõigil õpilastel olid õiged vastused. Lahendused erinesid põhjenduste selguse ja detailsuse poolest, punkte kaotati valdavalt seetõttu, et juhtude analüüsil ei viidatud reeglitele, mille põhjal järeldusi tehti.

5. *(Ago-Erik Riet)*

Poolikute lahenduste järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õige lõppvastus: 1 p
- Üritatud põhjendada, miks arvud $2^l(2k + 1)$, kus $k, l \geqslant 1$, on võitvad, paarsuste kaudu ja mängu edasi mängides, aga põhjendus lõpule viimata: 1 p

Peaaegu täislahenduste eest järgnevalt märgitud vigade eest maha võetud punktid summeeriti.

- Väidetud, et käiguga ei saa jõuda paaritult arvult arvu 2 astmeni, aga polnud tõestatud: -1 p
- Tehtud viga põhjenduses, millised arvu 2 astmed on võitvad: -1 p

Peaaegu täislahendused said 6 punkti, välja arvatud üks töö, kus oli lisaks tehtud viga skeemi 2. rea järgi ning mis sai 5 punkti.

Hindamisskeemid

1. *(Ahti Peder)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud polünoomi väärtused kohal 2, 3, 5 ja 7: 1 p
- Leitud polünoomi väärtus kohal 11 ja leitud, et see on võrdne arvuga 5^5: 2 p
- Näidatud, et lahend $p = 11$ on ainus: 4 p

Ülesanne osutus ootamatult raskeks. Paljud leidsid polünoomi väärtuse kohal 2, 3, 5 ja 7, kuid ei proovitud leida väärtust kohal 11, mis ilmselt oleks andnud ideid edasiseks.

2. *(Taavet Kalda)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kasutatud kolmnurga võrratust: 2 p
- Jõutud mitterange võrratuseni $|AQ| + |BQ| + |CQ| \geqslant p$: 3 p
- Põhjendatud, miks võrratus range on: 2 p

Sagedasim viga oli jätta vaatlemata juht, kus Q asub kolmnurga ABC külje peal või tipus.

Pisivigade eest võeti 1 punkt maha.

3. *(Markus Rene Pae)*

Järgnevate lahendussammude eest antavad punktid summeeriti.

- Täheldatud, et moodustuvad võrdhaarsed kolmnurgad: 1 p
- Märgatud rekursiivse arutelu teel, et $\angle AB_{n-1}B_n = \beta - (n-1)\,\alpha$: 2 p
- Väidetud, et B_n määramiseks peab kehtima $\beta - (n-2)\,\alpha \neq 90^\circ$: 1 p
- Väidetud, et B_n määramiseks peab kehtima $\beta - (n-1)\,\alpha \geqslant 0^\circ$: 1 p
- Jõutud loogilise arutelu läbi lahendini $\dfrac{\beta - 90^\circ}{\alpha} + 1$: 1 p
- Jõutud loogilise arutelu läbi lahendini $\left\lfloor \dfrac{\beta}{\alpha} \right\rfloor + 1$: 1 p

Kui mõni vahepealse samm jäi õpilasel tegemata, siis oli lõppresultaat võrdeline tehtud vajaminevate tööetappide mahuga.

Ülesanne osutus oodatult keeruliseks, kus täislahendust võis kohata vaid kolmel õpilasel. Üsna tüüpiliseks eksimuseks võib pidada seda, et ei olnud püstitatud kahte samaaegselt kehtivat piiravat tingimust (vt hindamisskeemi punkte 3 ja 4). Selle tulemusena ei jõutud mõlema lahendini ning seetõttu langesid kõige sagedasemad punktisummad kolme ja nelja punkti peale.

Rõõmu valmistab seik, et üsna paljud õpilased olid loogilise arutelu teel jõudnud seoseni $\angle AB_{n-1}B_n = \beta - (n-1)\,\alpha$, mis on ülesande eduka lahendamise üks suurimaid alustalasid.

4. *(Kaur Aare Saar)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Konstruktsioon 11×11 ruudustiku jaoks: 2 p
- Näidatud, et see on minimaalse suurusega ruudustik: 5 p

  Sealhulgas:
  - Tõestatud allesjäänud ruutu ümbritsevate ristkülikute ainus võimalik paigutus: *2 p*
  - Põhjendatud, et allesjäänud ruudu ja esialgse ruudustiku serva vahele jääb vähemalt 5 ühikruutu: *3 p*

Kõige keerulisemaks etapiks ülesande lahendamisel osutus ootuspäraselt tõestus, et 11×11 ruudustik on vähim. Samuti esines lahenduste hulgas töid konstruktsioonidega 12×12 ja 13×13 ruudustike jaoks. Nende konstruktsioonide eest anti 1 punkt, kuivõrd konstruktsiooni idee on sarnane.

5. *(Oleg Košik)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õigesti leitud teekonna pikkus ja kaugus alguspunktist lõpppunkti: 1 p
- Osa a) korrektne näide ja selgitus: 2 p
- Osa b) tõestus: 4 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:
  - On õigesti vaadeldud ainult juht, kus x on täisarv: *0 p*
  - Probleem taandatud $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ ratsionaalsuse uurimisele: *1 p*

Hindamisskeemid

1. *(Aleksandr Šved)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Välja selgitatud, et p või q on 2: 3 p
- Välja selgitatud, et p või q on 3: 3 p
- Näidatud, et ei leidu võrrandisse sobivat algarvu r, kui p ja q on 2 ja 3: 1 p

2. *(Mihkel Kree)*

Polünoomi tegurdamist kasutava lahenduse (žürii lahendus 1) järgnevate osade eest antud punktid summeeriti.

- Polünoomiks teisendamine ja viimine kujule $f(x) \geqslant 0$: 2 p
- Polünoomi tegurdamine (või nullkohtade leidmine): 4 p
- Selgitus, miks tegurdatud kuju on mittenegatiivne: 1 p

Kuupfunktsiooni uurimist kasutava lahenduse (žürii lahendus 2) järgnevate osade eest antud punktid summeeriti.

- Polünoomiks teisendamine ja viimine kujule $f(x) \geqslant 0$: 2 p
- Tuletise nullkohtade leidmine võrrandist $f'(x) = 0$: 1 p
- Selgitus, et suuremale nullkohale vastab lokaalne miinimum $f(x_2)$: 2 p
- Selgitus, et positiivses argumendi piirkonnas $f(x) \geqslant f(x_2)$: 2 p

Lahenduse esitas 28 õpilast, kelle seas osutusid lahendusvariandid 1 ja 2 populaarsuselt üsnagi võrdseteks vastavalt 13 ja 14 lahendajaga.

3. *(Janno Veeorg)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a) osa lahendus: 3 p
- *Sealhulgas:*
  - Näidatud võrdus $|AP|^2 = |BP| \cdot |BN|$ või mõni samaväärne tulemus: *1 p*
  - Näidatud, et kolmnurgad BQN ja AQE on sarnased: *1 p*
- b) osa lahendus: 4 p

4. *(Indrek Zolk)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kui $n \times n$ ruudustik vastab ülesande tingimustele, siis $n \geqslant 6$: 4 p

  Sealhulgas:

  - Põhjendatud, et summad n ja $-n$ saavad olla ainult mõlemad reasummad või mõlemad veerusummad: *1 p*
  - Põhjendatud, et kui summad n ja $-n$ on reasummad, siis ka $n-1$ ja $-(n-1)$ on reasummad: *1 p*
  - Põhjendatud, et kui summad $n, -n, n-1, 1-n$ on reasummad, siis ka $n-2$ ja $-(n-2)$ on reasummad: *2 p*
- Toodud näide ülesande tingimustele vastavast 6×6 ruudustikust: 3 p

Väiksemate tähelepanekute, nagu näiteks „n saamiseks ainus võimalus on n liidetavast koosnev summa $1 + 1 + \ldots + 1$“ või „kui n on reasumma, siis $-n$ on ka reasumma“ või „erinevaid summasid on $2n + 1$ ja ridu-veergediagonaale kokku $2n + 2$, seega topelt saab olla ainult üks summa“ eest punkte ei antud.

5. *(Sandra Schumann)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Esitatud õige strateegia, mille korral esimene mängija võidab: 1 p
- Näidatud, et mängu jätkumiseks on tarvilik, et $p < 0$: 1 p
- Märgitud, et kuna esimene mängija suurendab iga käiguga p väärtust, siis peab teine mängija p väärtust vähendama, et see mittenegatiivseks ei muutuks: 1 p
- Järeldatud, et teine mängija saab teha ainult lõpliku arvu vabaliikme asendamise käike: 1 p
- Näidatud, et lahendite vahe väheneb esimese mängija käigu ja teise mängija alternatiivkäigu järel konstandi võrra: 2 p
- Näidatud, et pärast lõplikku arvu käike on lahendite vahe väiksem kui 1, ja järeldatud, et teine mängija ei saa teha vaid alternatiivkäike: 1 p