Lõppvoor 2017

Võistluskomplekti koostamisse panustasid:

Elts Abel
Maksim Ivanov
Urve Kangro
Oleg Košik
Härmel Nestra
Erik Paemurru
Ahti Peder
Ago-Erik Riet
Kati Smotrova
Janno Veeorg

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

8. aprill 2017 Lõppvoor **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Kas leiduvad erinevad positiivsed täisarvud x ja y, mille korral arv $x + y$ jagub arvuga 2016, arv $x - y$ jagub arvuga 2017 ja arv xy jagub arvuga 2018?

2. Leia võrrandi
$$a + b + c = 61$$
kõik naturaalarvulised lahendid, mis rahuldavad tingimusi $\text{SÜT}(a, b) = 2$, $\text{SÜT}(b, c) = 3$ ja $\text{SÜT}(c, a) = 5$.

3. Kumera nelinurga $ABCD$ külgede AB ja CD keskpunktid on vastavalt M ja N. Punktid K ja L valitakse vastavalt külgedel BC ja AD nii, et $|CK| = 2|KB|$ ja $|AL| = 2|LD|$. Kui suure osa moodustab nelinurga $KMLN$ pindala nelinurga $ABCD$ pindalast?

Märkus. Nelinurka nimetatakse *kumeraks*, kui tema kõigi sisenurkade suurused on alla $180°$.

4. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral on võimalik ruut jaotada n ruudukujuliseks tükiks.

5. Kolmnurgas ABC on $|AC| = |BC|$. Nurga CAB poolitaja lõikab külge BC punktis D. Kolmnurga ABD mingi kahe sisenurga suuruste vahe on $40°$. Leia kõik võimalused, milline saab olla nurga ACB suurus.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

8. aprill 2017 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Juku püstitas matemaatikaringis hüpoteesi, mille kohaselt on iga täisarvu $n > 4$ korral vähemalt üks kahest suurimast täisarvust, mis on väiksemad kui $\frac{n}{2}$, arvuga n ühistegurita. Kas Juku hüpotees peab paika?

Märkus. Täisarv a on täisarvuga b *ühistegurita*, kui SÜT$(a, b) = 1$.

2. Leia kõik positiivsete reaalarvude paarid (a, b), mille korral summa $a + b$, korrutis ab ja ruutude vahe $a^2 - b^2$ on võrdsed.

3. Tasandil on korrapärane kuusnurk küljepikkusega $\sqrt{3}$. Selle kuusnurga iga tipu ümber joonistatakse ring raadiusega 1 keskpunktiga selles tipus ning värvitakse ringi sisse jääv ala siniseks. Leia siniseks värvitava tasandi osa täpne pindala.

4. Leia võrrandi $|a - b| = |b - c|$ lahendite arv, kui a, b, c on täisarvud 0-st 36-ni.

5. a) Tahvlile on kirjutatud kolmekohalise arvu üldkuju $\overline{ABC}$. Ann ja Enn asendavad kordamööda igal käigul täpselt ühe tähe numbriga, alustab Ann. Kas Ann saab numbreid kirjutada nii, et sõltumata Ennu käigust jaguks tulemuseks saadud kolmekohaline arv 11-ga? (Erinevaid tähti tohib asendada sama numbriga, kuid tähte A ei tohi asendada nulliga.)

b) Ann ja Enn tüdinesid iga mängu alguses arvu üldkuju kirjutamisest ja otsustasid reegleid muuta järgmiselt: kõigepealt kirjutab Ann tahvlile ühe numbri, seejärel Enn sellest vasakule või paremale teise ning lõpuks lisab Ann tahvlil olevast kahest numbrist vasakule või paremale kolmanda (numbrite vahele kirjutada ei tohi). Kas Ann saab numbreid kirjutada nii, et sõltumata Ennu käigust oleks tulemuseks kolmekohaline (st 0-ga mitte algav) 11-ga jaguv arv?

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

8. aprill 2017 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Leia vähim positiivne täisarv n, mille korral leidub selline positiivne täisarv a, et arvudel a ja $a+735$ on mõlemal täpselt n positiivset tegurit.

Märkus. Arvu teguriteks loetakse ka 1 ja arv ise.

2. Leia võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \\ 3a + b + c + d = 1 \end{cases}$$

kõik täisarvulised lahendid.

3. Olgu AM eriküljse kolmnurga ABC mediaan. Olgu K kolmnurga ABC siseringjoone puutepunkt küljega BC. Tõesta, et kui külje BC pikkus on külgede AB ja AC pikkuste aritmeetiline keskmine, siis nurga BAC poolitaja läbib lõigu KM keskpunkti.

4. Nimetame reaalarvude järjendit $(a_1, \ldots, a_n)$ *püsivaks*, kui võttes tema algusest järjest suvalisel arvul liikmeid, on nende liikmete summa alati negatiivne või alati mittenegatiivne, ja samuti võttes järjendi lõpust järjest suvalisel arvul liikmeid, on ka nende liikmete summa alati negatiivne või alati mittenegatiivne.

Näiteks järjend $(3, -1, 2)$ on püsiv, sest:

$$\begin{aligned} 3 &\geqslant 0, & 2 &\geqslant 0, \\ 3 + (-1) &\geqslant 0, & (-1) + 2 &\geqslant 0, \\ 3 + (-1) + 2 &\geqslant 0; & 3 + (-1) + 2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Tõesta, et mistahes püsivas vähemalt 3 liikmega järjendis, mille liikmed on vaheldumisi negatiivsed ja mittenegatiivsed (ei ole teada, kas esimene liige on negatiivne või mittenegatiivne), leidub 3 järjestikust liiget, mis omaette võetuna (omavahelist järjestust muutmata) moodustavad püsiva järjendi.

5. On antud positiivsed täisarvud a, b, c ja d. Olgu

$$(a+b)\cdot(a+c)\cdot(a+d)\cdot(b+c)\cdot(b+d)\cdot(c+d) = u,$$
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = v.$$

Tõesta, et korrutis uv jagub 3-ga.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

8. aprill 2017 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormista erinevate ülesannete lahendused eraldi lehtedele!

1. Positiivne täisarv b on saadud positiivse täisarvu a numbrite ümberjärjestamisel. Millised järgmistest väidetest on tingimata tõesed?

a) Arvude $2a$ ja $2b$ numbrite summad on võrdsed.

b) Arvude $3a$ ja $3b$ numbrite summad on võrdsed.

c) Arvude $5a$ ja $5b$ numbrite summad on võrdsed.

2. Reaalarvud x, y ja z rahuldavad tingimusi $x + y + z = 4$ ja $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$. Leia avaldise $x^3 + y^3 + z^3 + xyz$ suurim ja vähim võimalik väärtus.

3. Tõesta, et igas kolmnurgas leidub mediaan, mille pikkuse ruut on vähemalt $\sqrt{3}$ korda suurem selle kolmnurga pindalast.

4. Ringis raadiusega 1 märgitakse n punkti nii, et kahe teineteisele lähima märgitud punkti vaheline kaugus on võimalikult suur (punkte võib märkida ka ringjoonel). Olgu d_n nende kahe lähima märgitud punkti vaheline kaugus. Kas vastab tõele, et iga naturaalarvu $n \geqslant 2$ korral $d_{n+1} < d_n$?

5. Leia kõik positiivsed täisarvud k, mille korral on täisarvud $1, 2, \ldots, 2017$ võimalik jaotada k rühma nii, et rühmadesse kuuluvate arvude summad mingis järjestuses võetuna on mingi aritmeetilise jada k järjestikust liiget.

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

8 апреля 2017 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Найдутся ли различные положительные целые числа x и y, при которых число $x + y$ делится на 2016, число $x - y$ делится на 2017, а число xy делится на 2018?

2. Найти в натуральных числах все решения уравнения

$$a + b + c = 61,$$

удовлетворяющие условиям $\text{НОД}(a, b) = 2$, $\text{НОД}(b, c) = 3$ и $\text{НОД}(c, a) = 5$.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точки M и N являются соответственно серединами сторон AB и CD. На сторонах BC и AD выбирают соответственно точки K и L так, что $|CK| = 2|KB|$ и $|AL| = 2|LD|$. Какую часть составляет площадь четырёхугольника $KMLN$ от площади четырёхугольника $ABCD$?

Примечание. Четырёхугольник называют *выпуклым*, если все его углы меньше 180°.

4. Найти все положительные целые числа n, при которых квадрат можно разделить на n частей квадратной формы.

5. В треугольнике ABC выполняется $|AC| = |BC|$. Биссектриса угла CAB пересекает сторону BC в точке D. Разность величин каких-то двух углов треугольника ABD равна 40°. Найти все возможные значения величины угла ACB.

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

8 апреля 2017 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Петя выдвинул математическую гипотезу, согласно которой для каждого целого числа $n > 4$ по крайней мере одно из двух наибольших целых чисел, меньших чем $\frac{n}{2}$, взаимно просто с числом n. Верна ли гипотеза Пети?

Примечание. Целое число a *взаимно просто* с целым числом b, если НОД$(a, b) = 1$.

2. Найти все пары действительных положительных чисел (a, b), при которых сумма $a + b$, произведение ab и разность квадратов $a^2 - b^2$ равны.

3. На плоскости задан правильный шестиугольник с длиной стороны $\sqrt{3}$. Вокруг каждой вершины этого шестиугольника рисуется круг радиусом 1 с центром в этой вершине, а область, попадающая в этот круг, закрашивается синим. Найти точную площадь части плоскости, закрашенной синим.

4. Найти количество решений уравнения $|a - b| = |b - c|$, если a, b, c – целые числа от 0 до 36.

5. а) На доске записан общий вид трёхзначного числа $\overline{ABC}$. Аня и Женя по очереди заменяют каждым ходом одну букву цифрой, начинает Аня. Сможет ли Аня так записывать цифры, что независимо от хода Жени полученное в итоге трёхзначное число делилось бы на 11? (Разные буквы можно заменять одной и той же цифрой, но букву A нельзя заменять на 0.)

б) Аня и Женя утомились в начале каждой игры записывать общий вид числа и решили изменить правила: сперва Аня записывает одну цифру, затем Женя справа или слева от неё вторую, а в конце Аня записывает вправо или влево от записанных на доске двух цифр третью (между цифрами записывать не разрешается). Сможет ли Аня так записывать цифры, что независимо от хода Жени в итоге получится трёхзначное число (т.е. первая цифра не 0), делящееся на 11?

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

8 апреля 2017 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Найти наименьшее целое положительное число n, при котором существует такое целое положительное число a, что у каждого из чисел a и $a+735$ ровно n положительных делителей.

Примечание. Делителями числа считаются также 1 и само число.

2. Найти все целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \\ 3a + b + c + d = 1. \end{cases}$$

3. Отрезок AM является медианой разностороннего треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке K. Доказать, что если длина стороны BC является средним арифметическим длин сторон AB и AC, то биссектриса угла BAC проходит через середину отрезка KM.

4. Назовём цепочку действительных чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ *устойчивой*, если складывая от её начала по порядку любое число членов, будем получать либо всегда отрицательную, либо всегда неотрицательную сумму, и точно также складывая от её конца по порядку любое число членов, будем получать либо всегда отрицательную, либо всегда неотрицательную сумму.

Например, цепочка $(3, -1, 2)$ устойчива, так как:

$$\begin{aligned} &3 \geqslant 0, && 2 \geqslant 0, \\ &3 + (-1) \geqslant 0, && (-1) + 2 \geqslant 0, \\ &3 + (-1) + 2 \geqslant 0; && 3 + (-1) + 2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Доказать, что в любой устойчивой цепочке, которая содержит по крайней мере 3 члена и члены которой попеременно отрицательные и неотрицательные (неизвестно, отрицателен или неотрицателен первый член), существуют 3 последовательных члена, которые сами (без изменения их порядка) образуют устойчивую цепочку.

5. Даны целые положительные числа a, b, c и d, причём

$$\begin{aligned} &(a+b)\cdot(a+c)\cdot(a+d)\cdot(b+c)\cdot(b+d)\cdot(c+d) = u, \\ &ab + ac + ad + bc + bd + cd = v. \end{aligned}$$

Доказать, что произведение uv делится на 3.

LXIV Олимпиада Эстонии по математике

8 апреля 2017 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте решения разных заданий на отдельных листках!

1. Целое положительное число b получено перестановкой цифр целого положительного числа a. Какие из следующих утверждений безусловно верны?

а) Суммы цифр чисел $2a$ и $2b$ равны.

б) Суммы цифр чисел $3a$ и $3b$ равны.

в) Суммы цифр чисел $5a$ и $5b$ равны.

2. Действительные числа x, y и z удовлетворяют условиям $x + y + z = 4$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$. Найти наибольшее и наименьшее возможные значения выражения $x^3 + y^3 + z^3 + xyz$.

3. Доказать, что в каждом треугольнике существует медиана, квадрат длины которой по крайней мере в $\sqrt{3}$ раза больше площади этого треугольника.

4. В круге радиусом 1 отмечаются n точек таким образом, что расстояние между двумя самыми близкими друг к другу точками как можно больше (точки можно отмечать и на окружности). Пусть d_n обозначает это расстояние между двумя самыми близкими точками. Верно ли, что при каждом натуральном числе $n \geqslant 2$ имеет место $d_{n+1} < d_n$?

5. Найти все целые положительные числа k, при которых возможно разбить целые числа $1, 2, \ldots, 2017$ на k групп так, что суммы чисел этих групп, взятые в определённом порядке, являются k последовательными членами некоторой арифметической прогрессии.

LXIV Estonian Mathematical Olympiad

April 8, 2017 Final round **Grade 9**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.
Please write the solution of only one problem on each sheet of paper!

1. Do there exist distinct positive integers x and y such that the number $x+y$ is divisible by 2016, the number $x-y$ is divisible by 2017 and the number xy is divisible by 2018?

2. Find all solutions of the equation
$$a+b+c=61$$
in natural numbers that satisfy conditions $\gcd(a,b)=2$, $\gcd(b,c)=3$ and $\gcd(c,a)=5$.

3. The midpoints of sides AB and CD of a convex quadrilateral $ABCD$ are M and N, respectively. Points K and L are chosen on sides BC and AD, respectively, in such a way that $CK=2KB$ and $AL=2LD$. Find the ratio of the area of quadrilateral $KMLN$ and the area of quadrilateral $ABCD$.

   Remark. A quadrilateral is called *convex* if the sizes of all its internal angles are less than 180°.

4. Find all positive integers n such that a square can be cut into n square pieces.

5. Triangle ABC has $AC=BC$. The bisector of angle CAB meets side BC at point D. The difference of the sizes of some two internal angles of triangle ABD is 40°. Find all possibilites of what the size of angle ACB can be.

Lahendused

1. *Vastus:* jah.

Sobivad näiteks $x = 2016 \cdot 2015 - 2018$ ja $y = 2018$. Need arvud on erinevad, sest $2016 \cdot 2015 > 4 \cdot 1009 = 2 \cdot 2018$, mistõttu $x > y$. Nende arvude summa $2016 \cdot 2015$ jagub 2016-ga ja korrutis jagub ilmselt 2018-ga. Lisaks

$$\begin{aligned} x - y &= 2016 \cdot 2015 - 2 \cdot 2018 \\ &= (2017 - 1)(2017 - 2) - 2 \cdot (2017 + 1) \\ &= 2017^2 - 3 \cdot 2017 + 2 - 2 \cdot 2017 - 2 \\ &= 2017 \cdot 2012, \end{aligned}$$

mistõttu valitud arvude vahe jagub 2017-ga.

Märkus. Lahenduses esitatud arvud pole ainsad võimalikud. Saab tõestada, et kõik võimalikud vastuseks sobivad arvud on kujul $x = 2016k - 2018m$ ja $y = 2018m$, kus k ja m on sellised täisarvud, mille puhul $k + 2m$ jagub 2017-ga. Tõepoolest, et $2018 = 2 \cdot 1009$ ja 1009 on algarv, siis üks arvudest x ja y peab jaguma 1009-ga. Samuti peab üks arvudest x ja y olema paaris; et aga $x + y$ jagub paarisarvuga 2016, peavad mõlemad olema paaris. Kokkuvõttes peab üks arvudest jaguma 2018-ga; olgu üldisust kitsendamata $y = 2018m$. Et $x + y = 2016k$, siis $x = 2016k - 2018m$. Siis $x - y = 2016k - 2 \cdot 2018m = 2017(k - 2m) - (k + 2m)$; järelikult $x - y$ jagub 2017-ga parajasti siis, kui $k + 2m$ jagub 2017-ga. Lahenduses esitatud näite saame, võttes $k = 2015$ ja $m = 1$.

2. *Vastus:* $a = 10, b = 6, c = 45$;
$a = 10, b = 36, c = 15$;
$a = 40, b = 6, c = 15$.

Et $\text{SÜT}(a, b) = 2$, $\text{SÜT}(b, c) = 3$ ja $\text{SÜT}(c, a) = 5$, siis a jagub 2-ga ja 5-ga, b jagub 2-ga ja 3-ga ning c jagub 3-ga ja 5-ga. Järelikult a jagub 10-ga, b jagub 6-ga ja c jagub 15-ga. Et 61 annab arvudega 2, 3 ja 5 jagamisel jäägiks 1, peab a andma jäägi 1 jagamisel 3-ga, b andma jäägi 1 jagamisel 5-ga ja c andma jäägi 1 jagamisel 2-ga. Kuna $a, b, c \leqslant 61$, siis ainsate võimalustena $a = 10$ või $a = 40$, $b = 6$ või $b = 36$ ning $c = 15$ või $c = 45$. Summa 61 tekib kolmel juhul: $a = 10, b = 6, c = 45$; $a = 10, b = 36, c = 15$; $a = 40, b = 6, c = 15$. Kontroll näitab, et kõigil juhtudel on täidetud ka tingimused $\text{SÜT}(a, b) = 2$, $\text{SÜT}(b, c) = 3$ ja $\text{SÜT}(c, a) = 5$.

3. *Vastus:* $\frac{1}{2}$ ehk 50%.

Tähistame kujundi $\mathcal{K}$ pindala kirjutisega $S_{\mathcal{K}}$. Kuna $|AL| = \frac{2}{3}|AD|$ ja $|AM| = \frac{1}{2}|AB|$ (joonis 1), siis

$$S_{ALM} = \frac{1}{2}S_{ALB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{ADB} = \frac{1}{3}S_{ADB}.$$

Sarnaselt saame

$$S_{CKN} = \frac{1}{2}S_{CKD} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}S_{CBD} = \frac{1}{3}S_{CBD},$$

$$S_{BMK} = \frac{1}{2}S_{BAK} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{BAC} = \frac{1}{6}S_{BAC},$$

$$S_{DNL} = \frac{1}{2}S_{DCL} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{DCA}.$$

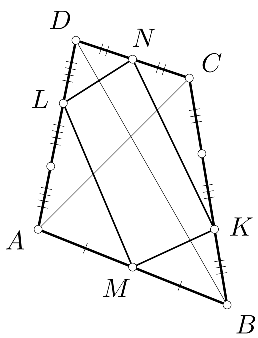
Liites kõik neli võrdust, saame

$$\begin{aligned} S_{ALM} + S_{CKN} + S_{BMK} + S_{DNL} &= \frac{1}{3}(S_{ADB} + S_{CBD}) + \frac{1}{6}(S_{BAC} + S_{DCA}) \\ &= \frac{1}{3}S_{ABCD} + \frac{1}{6}S_{ABCD} \\ &= \frac{1}{2}S_{ABCD}. \end{aligned}$$

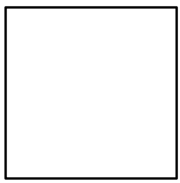
Nelinurk $KMLN$ jääb üle, kui nelinurgast $ABCD$ eraldada kolmnurgad ALM, CKN, BMK ja DNL. Seega moodustab nelinurga $KMLN$ pindala nelinurga $ABCD$ pindalast $\frac{1}{2}$ ehk 50%.

4. *Vastus:* 1, 4 ja kõik naturaalarvud alates 6-st.

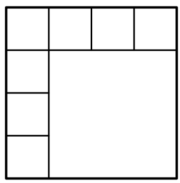
Ruudu tükeldus 1 ruuduks on triviaalne (joonis 2). Kui $n \geqslant 2$, siis tükelduse $2n$ ruuduks saame, kui ruudu ühest küljest lõikame ära n ruutu, mille küljepikkus on $\frac{1}{n}$ suure ruudu küljepikkusest, ning naaberküljest veel $n-1$ sama küljepikkusega ruutu. Järele jääb ruut küljepikkusega $\frac{n-1}{n}$ suure ruudu küljepikkusest (joonis 3 kujutab olukorda $n = 4$, mis annab ruudu tükelduse 8 ruuduks). Iga $n \geqslant 2$ korral saame tükelduse $2n+3$ ruuduks, kui tükelduses $2n$ ruuduks tükeldame ühe ruudu veel neljaks (joonis 4 kujutab jällegi olukorda $n = 4$, mis annab ruudu tükelduse 11 ruuduks). Seega on olemas tükeldused 1-ks, 4-ks ja igaks naturaalarvuks alates 6-st.



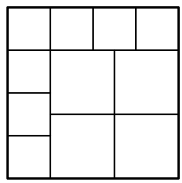
Joonis 1



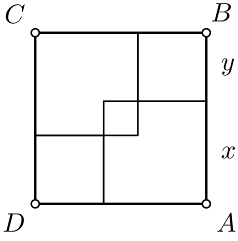
Joonis 2



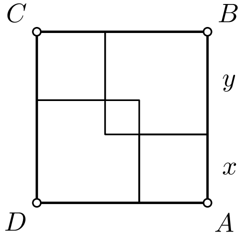
Joonis 3



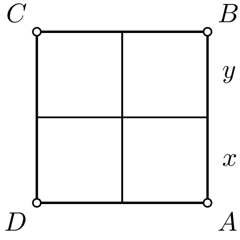
Joonis 4



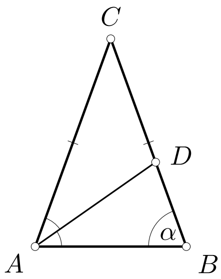
Joonis 5



Joonis 6



Joonis 7



Joonis 8

Jääb näidata, et ruudu tükeldusi 2-ks, 3-ks ja 5-ks ruuduks ei leidu. Ruudul on 4 tippu ja iga tipp kuulub ainult ühele ruudule tükelduses. Kui kaks tippu kuuluksid samale ruudule tükelduses, peaks see tükk olema algse ruuduga ühesuurune. See on võimalik ainult tükeldusel 1-ks. Järelikult peab tükelduses suuremaks arvuks ruutudeks olema ruutude arv vähemalt 4. Kui leiduks tükeldus 5 ruuduks, peaks algse ruudu vähemalt kolme küljega piirnema täpselt 2 ruutu tükelduses. Olgu algne ruut $ABCD$ ja piirnegu külgedega DA, AB ja BC täpselt 2 ruutu tükelduses. Olgu küljega AB piirnevad ruudud küljepikkustega x ja y järjekorras tipu A poolt tipu B poole. Ruut küljepikkusega x piirneb ühtlasi küljega AD ja ruut küljepikkusega y piirneb ühtlasi küljega BC, mistõttu teised külgedega AD ja BC piirnevad ruudud on küljepikkustega vastavalt y ja x. Kui $x > y$, siis kattuksid tippudes A ja C paiknevad ruudud küljepikkusega x (joonis 5). Kui $x < y$, siis kattuksid tippudes B ja D paiknevad ruudud küljepikkusega y (joonis 6). Kui $x = y$, katavad neli ruutu tükelduses kogu algse ruudu ja viiendat ruutu ei saa olla (joonis 7).

5. *Vastus:* $68°$, $40°$, $20°$ ja $4°$.

Tähistame $\angle BAC = \angle ABC = \alpha$, siis $\angle ACB = 180° - 2\alpha$ (joonis 8). Kolmnurga ABD sisenurkade suurused on $\angle BAD = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle DBA = \alpha$ ja $\angle ADB = 180° - \dfrac{3}{2}\alpha$. Vaatame läbi kõik juhud vastavalt sellele, milliste nurkade suuruste vahe on $40°$.

- Kui $\alpha - \dfrac{\alpha}{2} = 40°$, siis $\alpha = 80°$, kust $\angle ACB = 20°$.
- Juht $\dfrac{\alpha}{2} - \alpha = 40°$ pole võimalik, sest siis $\alpha < 0°$.
- Kui $\left(180° - \dfrac{3}{2}\alpha\right) - \dfrac{\alpha}{2} = 40°$, siis $\alpha = 70°$, kust $\angle ACB = 40°$.
- Kui $\dfrac{\alpha}{2} - \left(180° - \dfrac{3}{2}\alpha\right) = 40°$, siis $\alpha = 110°$. Kuid võrdhaarse kolmnurga alusnurk ei saa olla nürinurk.

- Kui $\left(180^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right) - \alpha = 40^\circ$, siis $\alpha = 56^\circ$, kust $\angle ACB = 68^\circ$.
- Kui $\alpha - \left(180^\circ - \frac{3}{2}\alpha\right) = 40^\circ$, siis $\alpha = 88^\circ$, kust $\angle ACB = 4^\circ$.

Lahendused

1. *Vastus:* jah.

Kui n on paaritu, siis suurim täisarv, mis on väiksem kui $\frac{n}{2}$, on $\frac{n-1}{2}$. Olgu d arvude $\frac{n-1}{2}$ ja n ühine positiivne tegur. Siis d on ka arvude $n-1$ ja n ühine tegur, millest järeldub, et $d = 1$. Seega $\frac{n-1}{2}$ ja n on ühistegurita, mis tähendab, et paaritutel arvudel Juku hüpotees kehtib.

Kui n on paaris, siis kaks suurimat täisarvu, mis on väiksemad kui $\frac{n}{2}$, on $\frac{n}{2}-1$ ja $\frac{n}{2}-2$. Olgu d_1 arvude $\frac{n}{2}-1$ ja n ühine positiivne tegur ja d_2 arvude $\frac{n}{2}-2$ ja n ühine positiivne tegur. Siis d_1 on ka arvude $n-2$ ja n ühine tegur, d_2 aga arvude $n-4$ ja n ühine tegur. Järelikult d_1 on arvu 2 tegur ehk kas 1 või 2 ning d_2 on arvu 4 tegur ehk 1, 2 või 4. Kui d_1 ja d_2 oleksid 1-st suuremad, peaksid mõlemad olema paarisarvud, mistõttu nendega jaguvad arvud $\frac{n}{2}-1$ ja $\frac{n}{2}-2$ peaksid samuti olema paaris. See aga pole võimalik, sest $\frac{n}{2}-1$ ja $\frac{n}{2}-2$ on järjestikused täisarvud. Vastuolu näitab, et vähemalt üks teguritest d_1 ja d_2 võrdub 1-ga. Seega üks arvudest $\frac{n}{2}-1$ ja $\frac{n}{2}-2$ on arvuga n ühistegurita, mis tähendab, et Juku hüpotees kehtib ka paarisarvudel.

Märkus. Lahendus ei kasuta eeldust $n > 4$. See eeldus aga välistab juhud, kus tuleks tegelda küsimusega nulli või negatiivse arvu suurimast ühistegurist arvuga n.

2. *Vastus:* $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lahendus 1. Tingimusest $a+b=ab$ saame $b = \frac{a}{a-1}$ ($a-1 \neq 0$, sest vastasel korral peaks nii $a-1$ kui ka a olema null). Asendades siit seosesse $a^2-b^2=ab$, saame

$$a^2 - \frac{a^2}{(a-1)^2} = \frac{a^2}{a-1}$$

ehk $a^2(a-1)^2 - a^2 = a^2(a-1)$. See seos on samaväärne võrdusega $(a-1)^2 - 1 = a-1$, kust omakorda $a^2 - 3a + 1 = 0$. Siit $a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Kuna $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, siis juhul $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ oleks $b = \frac{a}{a-1} < 0$, mis ei vasta ülesande tingimustele. Järelikult $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ning

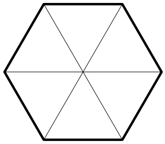
$$b = \frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Lahendus 2. Et $a+b = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ehk $(a+b)(a-b-1) = 0$, siis a ja b positiivsuse tõttu $a-b-1 = 0$ ehk $a = b+1$. Asendades siit seosesse $a+b = ab$, saame $2b+1 = (b+1)b$ ehk $b^2 - b - 1 = 0$, kust $b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Negatiivne lahend $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ei sobi ülesande tingimustega. Seega $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $a = b+1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

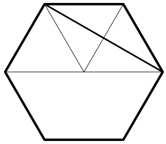
Lahendus 3. Olgu $a+b$, ab ja a^2-b^2 võrdsed reaalarvuga c. Viète'i valemite põhjal on a ja b ruutvõrrandi $x^2 - cx + c = 0$ lahendid. Et $a^2 - b^2 = a+b$ ja $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, siis $a-b = 1$ ehk $2\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - c} = 1$. Viimane seos on samaväärne tingimusega $c^2 - 4c - 1 = 0$, kust $c = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$. Negatiivne lahend $2-\sqrt{5}$ ei sobi. Seega $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{c}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ja $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{c}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. *Vastus:* $4\pi + 3\sqrt{3}$.

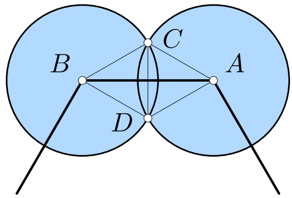
Kuusnurga kahe naabertipu ümber joonestatud ringjooned lõikuvad, sest $2 \cdot 1 > \sqrt{3}$. Seega on igal kahel naaberringil läätsekujuline ühisosa. Et korrapärase kuusnurga saab kokku panna kuuest võrdkülgsest kolmnurgast (joonis 9), siis kuusnurga ümberringjoone raadius võrdub küljepikkusega $\sqrt{3}$. Ühe võrdkülgse kolmnurga kõrgus on $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ ehk $\frac{3}{2}$. Kuusnurga ülenaabertippude vahemaa on kahekordne võrdkülgse kolmnurga kõrgus ehk 3 (joonis 10). Kuna $2 \cdot 1 < 3$, siis sinised ringid keskpunktidega kuusnurga ülenaabertippudes omavahel ei lõiku. Ringid keskpunktidega kuusnurga vastastippudes ei lõiku ammugi.



Joonis 9



Joonis 10



Joonis 11

Ühe sinise ringi pindala on $\pi \cdot 1^2$ ehk π. Seega kuue ringi pindalade summa on 6π. Sellest tuleb maha lahutada kuue naaberringide paari läätsekujuliste ühisosade pindala. Olgu kahe naaberringi keskpunktid A ja B ning lõikepunktid C ja D (joonis 11). Lahutades sektori ACD pindalast kolmnurga ACD pindala, saame parajasti pool kahe ringi ühisosa pindala. Et $\left(\frac{|CD|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 = |AC|^2$ ehk $\left(\frac{|CD|}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1^2$, siis $|CD| = 1$ ehk kolmnurk ACD on võrdkülgne. Järelikult on sektori ACD pindala $\frac{1}{6}\pi$, kolmnurga ACD pindala aga $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Kokkuvõttes on siniseks värvitud ala kogupindala $6\pi - 12\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ehk $4\pi + 3\sqrt{3}$.

4. *Vastus:* 2017.

Võrrand $|a - b| = |b - c|$ on rahuldatud parajasti siis, kui $a - b = b - c$ või $a - b = c - b$. Esimene võrdus on samaväärne tingimusega $a + c = 2b$, teine aga tingimusega $a = c$.

Tingimuse $a + c = 2b$ täitmiseks peavad a ja c olema ühe ja sama paarsusega arvud. Sel juhul on nende summa paarisarv ja b on suuruselt a ja c vahel, mistõttu ka nõutud piirides. Nii a kui ka c valikuks paarisarvulisena on 19 võimalust (sobivad $0, 2, \ldots, 36$), kokku 19^2 ehk 361 võimalust. Paarituarvulisena on nii a kui ka c valikuks 18 võimalust (sobivad $1, 3, \ldots, 35$), kokku 18^2 ehk 324 võimalust. Tingimust $a + c = 2b$ rahuldavaid lahendikolmikuid on seega $361 + 324$ ehk 685.

Tingimust $a = c$ rahuldavaid lahendikolmikuid on 37^2 ehk 1369, sest a ja b võivad olla suvalised.

Lahendeid, mille puhul kehtivad nii $a + c = 2b$ kui ka $a = c$ ehk mida on loetud kaks korda, on 37, sest tingimused $a + c = 2b$ ja $a = c$ on koos samaväärsed tingimusega $a = b = c$. Kokkuvõttes on otsitavaid lahendeid $685 + 1369 - 37$ ehk 2017.

5. *Vastus:* a) ei; b) jah.

Lahendus 1.

a) Asendagu Ann oma esimesel käigul ühe tähtedest B või C numbriga k. Kui nüüd Enn asendab tähtedest B ja C allesjäänu samuti numbriga k, siis on tulemuseks arv $\overline{Akk}$, mis jagub 11-ga parajasti siis, kui sellega jagub arv $\overline{A00}$, mis omakorda jagub 11-ga parajasti siis, kui 11-ga jagub A. Ainus selline number oleks 0, millega A võrduda ei tohi.

Kui aga Ann asendab oma esimesel käigul tähe A nullist erineva numbriga k, siis Enn saab oma käigul asendada tähe B numbriga $k-1$. Pärast Anne teist käiku saadud arv erineb 11-ga jaguvast arvust $\overline{kk0}$ vähem kui 11 võrra, mistõttu ei saa 11-ga jaguda.

b) Kirjutagu Ann esimesel käigul tahvlile numbri 9. Kui nüüd Enn kirjutab selle numbri ette või järele numbri k ning Ann vastavalt järele või ette numbri $9-k$, siis tulemuseks saadud arv jagub 11-ga jaguvustunnuse põhjal. Ann aga ei saa oma viimast käiku selliselt teha, kui Enn on oma käigul kirjutanud arvu lõppu numbri 9 või algusse numbri 0, sest Ann ei tohi lubada lõpptulemuseks nulliga algavat arvu. Kui aga Enn on kirjutanud arvu lõppu numbri 9, on tahvlil numbrid 99 ja Ann saab tekitada 11-ga jaguva arvu, kirjutades kõige lõppu numbri 0. Kui Enn on kirjutanud arvu algusse numbri 0, saab Ann kirjutada omakorda selle ette numbri 2, saades tulemuseks arvu 209, mis samuti jagub 11-ga.

Lahendus 2.

a) Arutleme nagu eelmises lahenduses.

b) Veendume esmalt, et kui Ennu käigu järel on tahvlil mistahes kahekohaline arv $\overline{km}$, kus $k \neq 0$, saab Ann täiendada selle 11-ga jaguvaks kolmekohaliseks arvuks. Tõepoolest, kui $k > m$, siis kirjutab Ann arvu ette numbri $k-m$, mispeale tekib arv $110 \cdot (k-m) + 11m$; kui aga $k \leqslant m$, siis kirjutab Ann arvu järele numbri $m-k$, mispeale tekib arv $110k + 11 \cdot (m-k)$. Mõlemal juhul jagub saadav arv 11-ga.

Näitame nüüd, et Ann võib esimesel käigul kirjutada tahvlile mistahes numbri $n \geqslant 2$. Kui Enn kirjutab seepeale 0-st erineva numbri Anne numbri ette või mistahes numbri Anne numbri järele, on meil eelmises lõigus kirjeldatud olukord ja Ann saab lisada kolmanda numbri nii, et tekib 11-ga jaguv kolmekohaline arv. Kui aga Enn kirjutab numbri 0 Anne numbri ette, siis saab Ann omakorda selle ette kirjutada numbri $11-n$, mispeale tekkiv arv $100(11-n)+n$ ehk $1100-99n$ jagub 11-ga.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

8. aprill 2017 Lõppvoor **11. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* 4.

Kui arvudel a ja $a+735$ oleks täpselt 2 tegurit, peaksid a ja $a+735$ olema algarvud. Need arvud on erineva paarsusega, mistõttu üks neist on paarisarv. Ainus paaris algarv on 2, mistõttu peaks olema $a = 2$. Kuid $2+735 = 737 = 11 \cdot 67$, vastuolu.

Kui arvudel a ja $a+735$ oleks täpselt 3 tegurit, peaks nii a kui ka $a+735$ olema algarvu ruut. Et need arvud on erineva paarsusega, peaks väiksem neist olema 2^2 ehk $a = 4$. Kuid $4+735$ ehk 739 pole ühegi täisarvu ruut, sest $27^2 = 729 < 739 < 784 = 28^2$.

Näitame, et tegurite arv 4 on võimalik. Arvu 10 positiivsed tegurid on 1, 2, 5 ja 10. Arvu 745 ehk $5 \cdot 149$ positiivsed tegurid on 1, 5, 149 ja 745 (149 on algarv). Seega arvudel 10 ja $10+735$ on mõlemal täpselt 4 positiivset tegurit.

Märkus. Juhtu 3 teguriga saab käsitleda ka järgnevalt. Kui arvudel a ja $a+735$ oleks täpselt 3 tegurit, peaksid nad olema algarvude ruudud, st $735 = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$ mingite algarvude p ja q korral. Et 735 annab 4-ga jagades jäägi 3, peab üks teguritest $p-q$ ja $p+q$ andma 4-ga jagades jäägi 3 ja teine jäägi 1. Siis aga nende summa $2p$ jagub 4-ga, mistõttu p on paaris ega saa olla kahest algarvust suurem.

2. *Vastus:* $a = 0, b = 1, c = 0, d = 0$;
$a = 0, b = 0, c = 1, d = 0$;
$a = 0, b = 0, c = 0, d = 1$;
$a = 1, b = 0, c = -1, d = -1$;
$a = 1, b = -1, c = 0, d = -1$;
$a = 1, b = -1, c = -1, d = 0$.

Lahendus 1. Märkame, et

$$-a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = -2a(2a+b+c+d) + (a+b)^2 + (a+c)^2 + (a+d)^2.$$

Teise võrrandi põhjal $2a+b+c+d = 1-a$, mistõttu esimene võrrand teisendub kujule

$$2a(a-1) + (a+b)^2 + (a+c)^2 + (a+d)^2 = 1.$$

Kui $a > 1$ või $a < 0$, siis $2a(a-1)$ on positiivne paarisarv, mistõttu viimase võrduse vasak pool on suurem kui 1. Kui $a = 0$, siis esimese võrrandi järgi on täpselt üks arvudest b^2, c^2 ja d^2 võrdne 1-ga, ülejäänud kaks on nullid. Väärtus -1 koos nullidega ei rahuldaks aga teist võrrandit, järelikult peab üks arvudest b, c ja d olema 1 ja ülejäänud kaks nullid. Kui aga $a = 1$, siis on vastavalt esimesele võrrandile täpselt kaks arvudest b^2, c^2 ja d^2 võrdsed 1-ga ja kolmas on null. Teist võrrandit rahuldab ainult variant, kus mõlemad nullist erinevad muutujad võrduvad arvuga -1.

Lahendus 2. Antud võrrandisüsteem on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} a^2 &= b^2 + c^2 + d^2 - 1, \\ 3a &= 1 - b - c - d. \end{cases} \tag{1}$$

Tõstes süsteemi (1) teise võrrandi pooled ruutu ja lahutades saadud seose 9-ga korrutatud esimesest võrrandist, saame

$$8b^2 + 8c^2 + 8d^2 - 10 + 2b + 2c + 2d - 2bc - 2bd - 2cd = 0,$$

mis on samaväärne võrdusega

$$5b^2+5c^2+5d^2+(b+1)^2+(c+1)^2+(d+1)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 = 13. \tag{2}$$

Võrduse (2) vasakus pooles on kõik liidetavad mittenegatiivsed täisarvud. Seega peab arvudest b, c, d vähemalt üks olema null, muidu oleks juba kolm esimest liidetavat kokku paremast poolest suuremad. Üldisust kitsendamata $b = 0$; võrdusest (2) saame

$$6c^2 + 6d^2 + (c+1)^2 + (d+1)^2 + (c-d)^2 = 12. \tag{3}$$

Ilmselt $|c| \leqslant 1$, $|d| \leqslant 1$, muidu oleks emb-kumb esimesesest kahest liidetavast üksi paremast poolest suurem. Juhul $|c| = |d| = 1$ saab võrdus (3) kehtida ainult tingimusel $c + 1 = d + 1 = c - d = 0$, kust $c = d = -1$. Asendades $b = 0$ ja $c = d = -1$ algse süsteemi teise võrrandisse, saame $a = 1$. Kui aga näiteks $c = 0$, jääb seosest (3) järele $7d^2 + (d+1)^2 = 11$, kust ainsa võimalusena $d = 1$. Asendades $b = c = 0$ ja $d = 1$ algse süsteemi teise võrrandisse, saame $a = 0$.

Komplektid $a = 1, b = 0, c = d = -1$ ja $a = 0, b = c = 0, d = 1$ ning neist b, c, d väärtuste ümberjärjestamisel saadavad komplektid rahuldavad ka algse süsteemi esimest võrrandit.

Lahendus 3. Kui $a = 0$, siis süsteemi esimesest võrrandist $b^2 + c^2 + d^2 = 1$, mis saab täisarvudel kehtida ainult juhul, kui arvude b, c, d seas on kaks nulli. Kui üldisust kitsendamata $b = c = 0$, siis süsteemi teisest võrrandist saame $d = 1$.

Eeldame järgnevas, et $a \neq 0$. Süsteemi esimene võrrand on samaväärne võrdusega $b^2 + c^2 + d^2 = 1 + a^2$, millest järeldub $b^2 \leqslant 1 + a^2 < (1 + |a|)^2$. Siit $|b| < 1 + |a|$ ehk $|b| \leqslant |a|$. Analoogselt ka $|c| \leqslant |a|$ ja $|d| \leqslant |a|$. Seega $|3a| = 3|a| \geqslant |b| + |c| + |d|$. Samas annab süsteemi teine võrrand $1 = 3a + b + c + d = |3a + b + c + d| \geqslant |3a| - (|b| + |c| + |d|)$. Kokkuvõttes $|3a| - (|b| + |c| + |d|) = 0$ või $|3a| - (|b| + |c| + |d|) = 1$. Esimesel juhul peaks olema $|a| = |b| = |c| = |d|$, mis ei rahulda algseid võrrandeid. Teisel juhul üldisust kitsendamata $|a| = |b| = |c|$ ja $|d| = |a| - 1$. Asendades algse süsteemi esimesse võrdusse $|a| = |b| = |c|$, saame $a^2 + d^2 = 1$, millest ainsa võimalusena $|a| = 1$ ja $d = 0$. Kui $a = 1$, saame teisest võrrandist $b = c = -1$, juht $a = -1$ lahendeid ei anna.

Märkus. Pärast võrratuste $|b| \leqslant |a|$, $|c| \leqslant |a|$, $|d| \leqslant |a|$ saab edasi arutleda ka teisiti, selgitades kõigepealt välja a märgi. Kui oletada, et $a < 0$, siis $3a + b + c + d = -3|a| + b + c + d \leqslant -3|a| + |b| + |c| + |d| \leqslant 0$, mis on vastuolus teise võrrandiga. Järelikult $a > 0$. Seega $a + b = |a| + b \geqslant |a| - |b| \geqslant 0$, analoogselt $a + c \geqslant 0$ ja $a + d \geqslant 0$. Et antud süsteemi teine võrrand on samaväärne võrdusega $(a + b) + (a + c) + (a + d) = 1$, peab üks arvudest $a + b$, $a + c$, $a + d$ olema 1 ja ülejäänud kaks nullid. Kui $a + b = 1$, $c = d = -a$, siis esimene võrrand taandub kujule $a^2 + b^2 = 1$, kust saame lahendi $a = 1, b = 0, c = d = -1$. Analoogselt saame teised kaks lahendit.

Lahendus 4. Kasutades aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelist võrratust arvude $|b|$, $|c|$ ja $|d|$ jaoks ning absoluutväärtuse omadust, saame

$$\sqrt{\frac{1 + a^2}{3}} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + d^2}{3}} \geqslant \frac{|b| + |c| + |d|}{3} \geqslant \frac{|b + c + d|}{3} = \frac{|1 - 3a|}{3}.$$

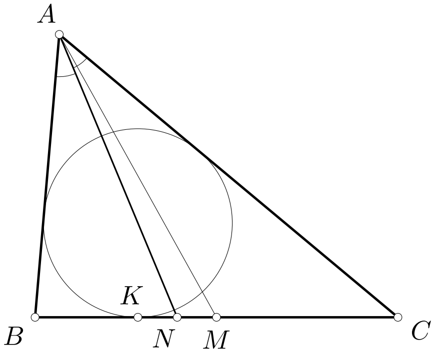
Seega $\dfrac{1 + a^2}{3} \geqslant \dfrac{(1 - 3a)^2}{9}$, kust $3 + 3a^2 \geqslant 1 - 6a + 9a^2$ ehk $6a^2 - 6a - 2 \leqslant 0$. Lahendades saame $\dfrac{3 - \sqrt{21}}{6} \leqslant a \leqslant \dfrac{3 + \sqrt{21}}{6}$, kust täisarvulisuse tõttu $a = 0$ või $a = 1$. Edasi jätkame nagu lahenduses 1.

3. Olgu N nurga BAC poolitaja lõikepunkt küljega BC; ülesande lahendamiseks piisab tõestada, et $|KN| = |MN|$ (joonis 12). Nurgapoolitaja omadus annab $\dfrac{|NC|}{|NB|} = \dfrac{|AC|}{|AB|}$. Kirjutades $|NC| = |BC| - |NB|$, saame siit

$$|NB| = \frac{|BC|}{1 + \frac{|AC|}{|AB|}} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{|AB| + |AC|}.$$

Et ülesande tingimuse kohaselt $|AB| + |AC| = 2|BC|$, siis $|NB| = \dfrac{|AB|}{2}$.

Teisalt olgu X ja Y kolmnurga ABC siseringjoone puutepunktid vastavalt külgedega AB ja AC (joonis 13). Puutujalõikude võrdsusest $|AX| = |AY|$,



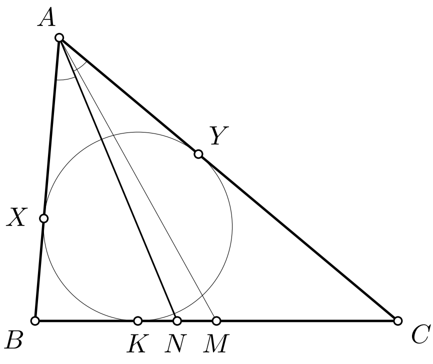
Joonis 12

$|BX| = |BK|$ ja $|CK| = |CY|$, kust

$$\begin{aligned}
|BC| &= |BK| + |CK| \\
&= |BX| + |CY| \\
&= |AB| - |AX| + |AC| - |AY| \\
&= |AB| + |AC| - 2|AX| \\
&= 2|BC| - 2|AX|.
\end{aligned}$$

Seega $|BC| = 2|AX|$, millest järeldub $|AX| = |BM|$.
Kokkuvõttes

$$\begin{aligned}
|KN| &= |BN| - |BK| = |BN| - |BX| \\
&= \frac{|AB|}{2} - (|AB| - |AX|) = |AX| - \frac{|AB|}{2} \\
&= |BM| - \frac{|AB|}{2} = |BM| - |BN| = |MN|.
\end{aligned}$$



Joonis 13

4. *Lahendus 1.* Olgu $(a_1, \ldots, a_n)$ püsiv järjend, mille liikmed on vaheldumisi negatiivsed ja mittenegatiivsed. Oletame, et mingi minimaalse absoluutväärtusega liige järjendis on negatiivne, olgu see liige a_i. Siis tema summa ükskõik kumma mittenegatiivse naaberliikmega on mittenegatiivne. Seega a_i ei ole järjendis esimene ega viimane, muidu tekiks vastuolu järjendi püsivusega. Aga siis $a_{i-1} + a_i$ ja $a_i + a_{i+1}$ on mittenegatiivsed, samuti $a_{i-1} + a_i + a_{i+1}$, mistõttu a_{i-1}, a_i, a_{i+1} moodustavad püsiva kolmiku.

Kui kõik minimaalse absoluutväärtusega liikmed on mittenegatiivsed, siis olgu a_i üks sellistest. Siis tema summa ükskõik kumma negatiivse naaberliikmega on negatiivne, mistõttu jällegi ei saa a_i olla järjendis esimene ega viimane. Järelikult $a_{i-1} + a_i$ ja $a_i + a_{i+1}$ on negatiivsed, samuti $a_{i-1} + a_i + a_{i+1}$, mistõttu a_{i-1}, a_i, a_{i+1} moodustavad püsiva kolmiku.

Lahendus 2. Oletame väitevastaselt, et mingi püsiva järjendi $(a_1, \ldots, a_n)$ liikmed on vaheldumisi negatiivsed ja mittenegatiivsed, kuid ükski kolmest järjestikusest liikmest koosnev alamjärjend pole püsiv. Oletame, et a_1 on negatiivne (tõestus vastupidisel juhul on analoogne). Siis kõik summad $a_1 + \ldots + a_i$, kus $1 \leqslant i \leqslant n$, on negatiivsed. Samuti on püsivuse tõttu negatiivsed kõik summad $a_i + \ldots + a_n$, sest nad on samamärgilised summaga $a_1 + \ldots + a_n$, mis on eelneva põhjal negatiivne. Muuhulgas näeme, et n peab olema paaritu.

Olgu mingi paaritu $i \leqslant n - 2$ korral $a_i + a_{i+1}$ negatiivne. Et ka a_i ja a_{i+2} on negatiivsed, on ühtlasi negatiivne $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$. Seega $a_{i+1} + a_{i+2}$ on mittenegatiivne, muidu moodustuks arvudest a_i, a_{i+1}, a_{i+2} püsiv kolmik.

Olgu nüüd mingi paaris $i \leqslant n - 2$ korral $a_i + a_{i+1}$ mittenegatiivne. Et ka a_i ja a_{i+2} on mittenegatiivsed, on ühtlasi mittenegatiivne $a_i + a_{i+1} + a_{i+2}$. Seega $a_{i+1} + a_{i+2}$ on negatiivne, muidu moodustuks arvudest a_i, a_{i+1}, a_{i+2} püsiv kolmik.

Et $a_1 + a_2$ on lahenduse algul öeldu põhjal negatiivne, saame matemaatilise induktsiooniga, et järjendi $(a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n)$ liikmed on vaheldumisi negatiivsed ja mittenegatiivsed. Kuna n peab olema paaritu, on selles järjendis aga paarisarv liikmeid. See tähendab, et $a_{n-1} + a_n$ on mittenegatiivne, mis lahenduse esimese lõigu põhjal pole võimalik.

5. Kui arvude a, b, c, d seas leidub kaks sellist, mis annavad 3-ga jagades vastavalt jäägid 0 ja 0 või 1 ja 2, jagub nende kahe arvu summa 3-ga. Sellest tulenevalt jagub arv u ja ühtlasi korrutis uv samuti 3-ga.

Üle jääb juht, kus arvude a, b, c, d seas jagub ülimalt üks arv 3-ga ja kõik 3-ga mitte jaguvad arvud annavad 3-ga jagades ühe ja sama jäägi. Kui täpselt üks arvudest a, b, c, d jagub 3-ga, siis selle arvu korrutised kõigi teiste arvudega jaguvad 3-ga. Ülejäänud arvudest moodustub 3 paari, mille komponentide korrutised annavad 3-ga jagades ühe ja sama jäägi (täpsemalt, jäägi 1). Seega kõigi kuue paarikaupa korrutise summa v jagub 3-ga.

Kui ükski arvudest a, b, c, d ei jagu 3-ga, siis kõigi 6 paari komponentide korrutised annavad 3-ga jagades ühe ja sama jäägi (1). Et paaride arv jagub 3-ga, on paarikaupa korrutiste summa v jällegi 3 kordne. Kokkuvõttes ka sel juhul korrutis uv jagub 3-ga.

Lahendused

1. *Vastus:* a) ja c).

Nimetame numbreid $0, 1, 2, 3, 4$ *väikesteks* ja numbreid $5, 6, 7, 8, 9$ *suurteks*. Tähistame k-kohalise arvu n numbreid paremalt vasakule sümbolitega $(n)_0, (n)_1, \ldots, (n)_{k-1}$. Tähistagu veel $\Sigma(n)$ arvu n numbrite summat ja $s(n)$ arvu n suurte numbrite arvu.

a) Kui $(a)_i$ on väike, siis $(2a)_i = 2(a)_i$ või $(2a)_i = 2(a)_i + 1$ vastavalt sellele, kas $(a)_{i-1}$ on väike või suur. Samuti kui $(a)_i$ on suur, siis $(2a)_i = 2(a)_i - 10$ või $(2a)_i = 2(a)_i - 9$ vastavalt sellele, kas $(a)_{i-1}$ on väike või suur. Teisiti öeldes iga suur number toob kahega korrutamisel kaasa oma numbrikoha vähendamise 10 võrra ja ühe võrra kõrgemat järku numbrikoha suurendamise 1 võrra võrreldes väikse numbriga. Seega iga naturaalarvu n korral

$$\Sigma(2n) = 2\Sigma(n) - 9s(n). \tag{4}$$

Et $\Sigma(a) = \Sigma(b)$ ja $s(a) = s(b)$, siis $\Sigma(2a) = \Sigma(2b)$.

b) Kui $a = 34$ ja $b = 43$, siis $\Sigma(3a) = 1+0+2 = 3$, aga $\Sigma(3b) = 1+2+9 = 12$.

c) Ilmselt $\Sigma(10a) = \Sigma(10b)$. Teisalt, kasutades a-osas saadud valemit (4), saame

$$\Sigma(10n) = \Sigma(2 \cdot 5n) = 2\Sigma(5n) - 9s(5n),$$

mis kehtib iga naturaalarvu n korral. Seega

$$2\Sigma(5a) - 9s(5a) = 2\Sigma(5b) - 9s(5b). \tag{5}$$

Kuid number $(5n)_i$ on suur parajasti siis, kui $(n)_i$ on paaritu, sest ülekanne 5-ga korrutamisel saab olla ülimalt 4. Seega $s(5n)$ on arvu n paaritute numbrite arv, mistõttu ilmselt $s(5a) = s(5b)$. Järelikult peab (5) põhjal kehtima ka võrdus $\Sigma(5a) = \Sigma(5b)$.

2. *Vastus:* 64 on nii suurim kui ka vähim.

Märkame, et

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + xy^2 + x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2) + 6xyz,$$

samas kui

$$
\begin{aligned}
&3(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)xyz \\
&\qquad = 3(x+y+z)(xy+xz+yz) \\
&\qquad = 3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)+9xyz.
\end{aligned}
$$

Seega

$$(x+y+z)^3-3(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)xyz = x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Et ülesande tingimuste kohaselt $x+y+z=4$ ja $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$, saame siit $64-4xyz=x^3+y^3+z^3-3xyz$, kust $x^3+y^3+z^3+xyz=64$. Seega avaldisel $x^3+y^3+z^3+xyz$ saab olla ainult üks väärtus 64.

Märkus. Sellised arvud on näiteks $x=1$, $y=\frac{3-3\sqrt{3}}{2}$ ja $z=\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ (siis $\frac{1}{x}=1$, $\frac{1}{y}=\frac{-1-\sqrt{3}}{3}$ ja $\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{3}}{3}$).

3. *Lahendus 1.* Eeldame üldisust kitsendamata, et BC on kolmnurga lühim külg. Lühema külje vastas on väiksem nurk, mistõttu on siis tipu A juures kolmnurga ABC vähim nurk. Tähistame $a=|BC|$, $b=|CA|$, $c=|AB|$ ja $\alpha=\angle BAC$ ning olgu m tipust A tõmmatud mediaani pikkus. Lahenduse algul tehtud eeldusest tulenevalt $\alpha \leqslant 60^\circ$.

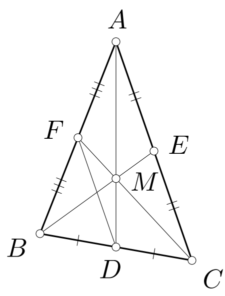
Olgu külgede BC, CA, AB keskpunktid vastavalt D, E, F (joonis 14). Arvestades, et $DF \parallel CA$ tõttu $\angle AFD = 180^\circ - \alpha$, saame koosinusteoreemist kolmnurgas AFD

$$
\begin{aligned}
m^2 &= \left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-2\frac{b}{2}\frac{c}{2}\cos\angle AFD \\
&= \frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{bc}{2}\cos\alpha \\
&\geqslant \frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{bc}{2}\cos 60^\circ \\
&= \frac{b^2+c^2+bc}{4}.
\end{aligned}
$$

Et $b^2+c^2 \geqslant 2bc$, saame siit võrratuse $m^2 \geqslant \frac{3bc}{4}$.

Teisalt, olgu S kolmnurga ABC pindala. Siis

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}bc\sin 60^\circ \leqslant \frac{\sqrt{3}bc}{4}.$$

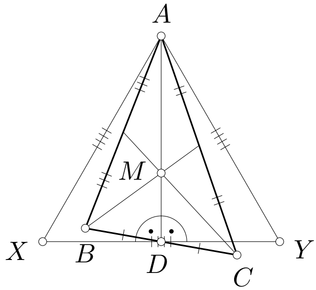


Joonis 14

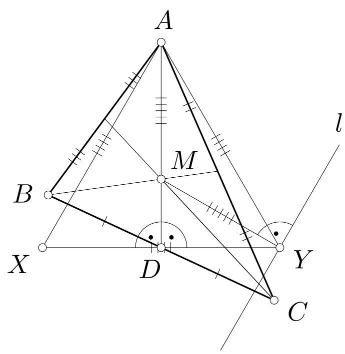
Ülal saime võrratuse $m^2 \geqslant \dfrac{3bc}{4} = \sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}bc}{4}$. Kokkuvõttes $m^2 \geqslant \sqrt{3}S$.

Lahendus 2. Olgu kolmnurga ABC tipust A tõmmatud mediaan AD ja mediaanide lõikepunkt M. Üldisust kitsendamata olgu AD kolmnurga ABC pikim mediaan; tähistame $|AD| = m$.

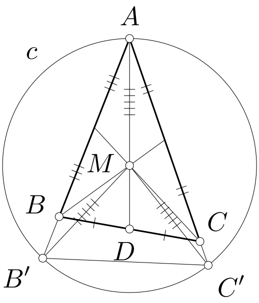
Ehitame mediaanile AD kummalegi poole täisnurksed kolmnurgad ADX ja ADY, mille täisnurk asub tipu D juures ning tipu A juures on nurk suurusega 30°; siis AXY on võrdkülgne kolmnurk, millel on kolmnurgaga ABC ühine mediaan AD ja ühine mediaanide lõikepunkt M (joonis 15). Näitame, et kolmnurga AXY pindala on vähemalt niisama suur kui kolmnurga ABC pindala. Et mediaan jaotab kolmnurga kaheks võrdpindseks osaks, piisab näidata, et kolmnurga ADX pindala on vähemalt niisama suur kui kolmnurga ADB pindala. Kui punkt B asub kolmnurga ADX sees või küljel, siis see väide ilmselt kehtib. Kui punkt C asub kolmnurga ADY sees või küljel, siis kehtib see väide sümmeetria põhjal samuti. Jääb üle juht, kus B ja C on mõlemad väljaspool kolmnurka AXY (joonis 16). Ole-



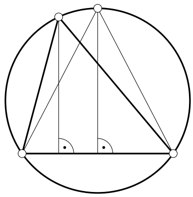
Joonis 15



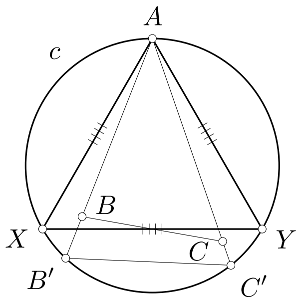
Joonis 16



Joonis 17



Joonis 18



Joonis 19

tame üldisust kitsendamata, et lõigud DB ja AX lõikuvad (teine võimalus, kus DC ja AY lõikuvad, on sümmeetriline). Et küljega AX paralleelne punkti Y läbiv sirge l on sirgega AX sümmeetriline punkti D suhtes ning $|DC| = |DB|$, siis lõik DC lõikab sirget l. Seetõttu $|MC| > |MY| = |MA|$, mis on vastuolus eeldusega, et AD on kolmnurga ABC pikim mediaan. Seega seda juhtu ei saa olla.

Et $|XD| = |YD| = \dfrac{m}{\sqrt{3}}$, on kolmnurga AXY pindala $m \cdot \dfrac{m}{\sqrt{3}}$ ehk $\dfrac{m^2}{\sqrt{3}}$. Eelneva põhjal on ka kolmnurga ABC pindala ülimalt $\dfrac{m^2}{\sqrt{3}}$.

Lahendus 3. Olgu kolmnurga ABC tipust A tõmmatud mediaan AD ja mediaanide lõikepunkt M. Üldisust kitsendamata olgu AD kolmnurga ABC pikim mediaan; tähistame $|AD| = m$.

Et AD on pikim mediaan ja A seega mediaanide lõikepunktist M kaugeim kolmnurga tipp, asuvad tipud B ja C ringjoones c keskpunktiga M raadiusega MA. Olgu B' ja C' vastavalt kiire AB ja kiire AC teine lõikepunkt ringjoonega c (joonis 17); siis kolmnurga $AB'C'$ pindala on vähemalt niisama suur kui kolmnurga ABC pindala. Sama ümberringjoonega kolmnurkadest on aga suurima pindalaga võrdkülgne kolmnurk, sest nihutades kahe eri pikkusega külje ühise tipu ülejäänud kahe tipu vahelise kaare keskpunkti, paigale jäänud tippude vahelisele küljele ehitatud kõrgus ja ühtlasi kolmnurga pindala kasvab (joonis 18). Olgu X ja Y ringjoone c punktid, mille korral kolmnurk AXY on võrdkülgne (joonis 19); siis eelneva põhjal on kolmnurga AXY pindala vähemalt niisama suur kui kolmnurga $AB'C'$ pindala ja ühtlasi vähemalt niisama suur kui kolmnurga ABC pindala.

Kolmnurk AXY jaguneb kolmeks võrdseks kolmnurgaks MAX, MXY ja MYA, mille kogupindala on $\dfrac{3}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}m\right)^2 \sin 120^\circ$ ehk $\dfrac{m^2}{\sqrt{3}}$. Seega on ka kolmnurga ABC pindala ülimalt $\dfrac{m^2}{\sqrt{3}}$.

Lahendus 4. Olgu kolmnurga ABC mediaanide lõikepunkt M ja pikima mediaani pikkus m. Kolmnurga ABC pindala avaldub kolmnurkade MBC, MCA ja MAB pindalade summana kujul

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(|MB| \cdot |MC| \cdot \sin\alpha + |MC| \cdot |MA| \cdot \sin\beta + |MA| \cdot |MB| \cdot \sin\gamma\right),$$

kus $\alpha = \angle BMC$, $\beta = \angle CMA$ ja $\gamma = \angle AMB$. Et $|MA| \leqslant \dfrac{2}{3}m$, $|MB| \leqslant \dfrac{2}{3}m$ ja $|MC| \leqslant \dfrac{2}{3}m$, siis

$$S \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}m\right)^2 \cdot \left(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma\right).$$

Kuna α, β ja γ on väiksemad kui 180°, saab siinustele rakendada Jenseni võrratust, mille kohaselt

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leqslant \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin\frac{360^\circ}{3} = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Järelikult

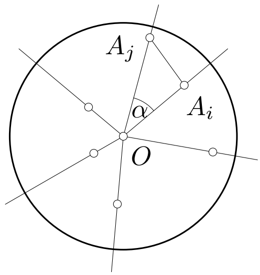
$$S \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}m^2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m^2}{\sqrt{3}},$$

millest tulenebki ülesande väide.

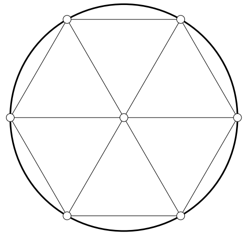
4. *Vastus:* ei.

Näitame, et $d_6 \leqslant 1 \leqslant d_7$. Esimese võrratuse näitamiseks olgu ringis märgitud suvalised kuus punkti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Tähistame ringjoone keskpunkti O. Kui mingi i korral $A_i = O$, on iga ülejäänud märgitud punkti kaugus punktist A_i ülimalt 1. Eeldame järgnevas, et iga i korral $A_i \neq O$. Olgu α vähim nurk, mis moodustub mingi kahe kiire OA_i ja OA_j vahel, kus $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (joonis 20). Ilmselt $\alpha \leqslant 60^\circ$, sest järjestikuste kiirte vaheliste nurkade summa on 360°. Kui $|A_iA_j| > 1$, siis A_iA_j on kolmnurga OA_iA_j pikim külg, kuna OA_i ja OA_j pikkused ei ületa ringjoone raadiust 1. Kolmnurga pikima külje vastas on aga suurim nurk, mistõttu α peaks olema suurem kui 60°, vastuolu. Seega igal juhul leidub kaks märgitud punkti, mille vaheline kaugus ei ületa 1. Et punktide valik oli suvaline, järeldub sellest $d_6 \leqslant 1$.

Teisalt, märkides ringjoonel raadiusega 1 kuus punkti korrapärase kuusnurga tippudes ja ühe keskel, on kahe järjestikuse ringjoonel paikneva märgitud punkti vaheline kaugus 1 ja keskmise punkti kaugus ülejäänud märgitud punktidest samuti 1 (joonis 21). Sellest tulenevalt $d_7 \geqslant 1$.



Joonis 20



Joonis 21

Märkus. Mitterange võrratus $d_{n+1} \leqslant d_n$ kehtib iga n korral, sest kui suvalise n märgitud punkti puhul on neist mingi kahe vaheline kaugus ülimalt a, siis ka $n+1$ märgitud punkti puhul (võime suvaliselt ühe punkti vaatluse alt välja jätta).

5. *Vastus:* 1, 2, 1009, 2017.

Olgu selle aritmeetilise jada esimene liige a ja vahe d. Selle jada liikmete summa võrdub arvude $1, 2, \ldots, 2017$ summaga ehk

$$\frac{2a + (k-1)d}{2} \cdot k = \frac{2017 \cdot 2018}{2},$$

kust $(2a+(k-1)d)\cdot k = 2017\cdot 2018 = 2\cdot 1009\cdot 2017$. Seega korrutis $2\cdot 1009\cdot 2017$ jagub arvuga k. Kuna tegurid 2, 1009 ja 2017 on algarvud ning ülesande tingimuste kohaselt $k \leqslant 2017$, siis ainsad võimalused on $k = 1$, $k = 2$, $k = 1009$ ja $k = 2017$.

Kõik need variandid saab ka realiseerida. Jaotus 1 rühmaks rahuldab triviaalselt ülesande tingimusi ja ka suvaline jaotus 2 rühmaks annab mingi aritmeetilise jada kaks järjestikust liiget. Võttes iga paarisarvu ühte rühma koos suuruselt järgmise paaritu arvuga, saame 1008 kaheelemendilist rühma, mille summad on järjestikused liikmed aritmeetilises jadas $5, 9, 13, \ldots$. Lisades omaette rühmas arvu 1, saame ülesande tingimustele vastava jaotuse. Lõpuks rahuldab ülesande tingimusi ka jaotus, kus igaüks arvudest $1, 2, \ldots, 2017$ on omaette rühmas.

Hindamisskeemid

1. *(Svenno Saan)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täielik lahendus: 7 p
- Näidatud, et üks arvudest peab jaguma 2018-ga: 2 p
- Näidatud, et mõlemad arvud on paarisarvud: 1 p

2. *(Hannes Jukk)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud, et a jagub arvuga 10, b jagub arvuga 6 ning c jagub arvuga 15: 2 p
- Leitud võimalikud väärtused muutujatele a, b ja c, arvestades antud piiranguid: 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud ühe muutuja kõik võimalikud väärtused, nt c jaoks väärtused 15, 30, 45 ja 60: *1 p*
  - Uuritud läbi kõik võimalused, milline saab olla ülejäänud kahe muutuja summa (nt $a + b$): *2 p*
- Leitud kolm õiget arvukolmikut: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud kaks õiget arvukolmikut: *1 p*

Kõik lahendajad said alguse õigesti kätte (jaguvus arvudega 10, 6 ja 15).

3. *(Elts Abel)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tehtud joonis ja leitud mõned vajalikud seosed: 1 p
- Avaldatud kolmnurkade AML, MBK, KCN ja NDL õiged pindalad: 4 p
- Leitud, kui suure osa moodustab kolmnurkade AML, MBK, KCN ja NDL pindalade summa nelinurga $ABCD$ pindalast: 1 p
- Tehtud õige järeldus nelinurga $MKNL$ pindala kohta: 1 p

Ainult vastuse eest anti 1 punkt. Tõestuse eest erijuhul (ruut, ristkülik) anti 2 punkti.

Sellest, et mingi omadus kehtib kas ruudu või ristküliku korral, ei tähenda, et see kehtib mistahes kumera nelinurga korral.

4. *(Reimo Palm)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et iga täisruudu n puhul saab ruudu jaotada n ruudukujuliseks tükiks: 1 p
- Tõestatud, et iga $n \geqslant 6$ puhul saab ruudu jaotada n ruudukujuliseks tükiks: 3 p
- Tõestatud, et ruutu ei saa jaotada 2 ega 3 ruudukujuliseks tükiks: 1 p
- Tõestatud, et ruutu ei saa jaotada 5 ruudukujuliseks tükiks: 2 p

Palju oli lahendusi, kus näidati, et ruudu saab jaotada täisruuduks tükkideks, ja lisaks saadi mõned üldised tingimused või valemid tükkide arvu kohta, ilma sobivate väärtuste hulka kindlaks tegemata. Sellised lahendused said 2 punkti.

5. *(Maksim Ivanov)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Avaldatud kolmnurga ABD kõik sisenurgad ja ka otsitav nurk ACB ühe muutuja kaudu: 1 p
- Vaadeldud kõik juhud, milliste nurkade suuruste vahe võib olla 40°: 1 p
- Põhjendatud, et $\angle BAD - \angle ADB \neq 40^\circ$: 1 p
- Leitud nurga ACB neli võimalikku väärtust: 4 p

Skeemi neljanda rea järgi anti iga võimaliku väärtuse korrektse väljaselgitamise eest 1 punkt.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

8. aprill 2017 | Lõppvoor | **10. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Aleksandr Šved)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kui n on paaritu, siis hüpotees kehtib: 3 p
- Tõestatud, et kui n on paaris, siis hüpotees kehtib: 4 p

Paaris n korral jagunes tõestus tihtipeale kaheks osaks, kus kummagi osa eest anti 2 punkti.

Teised alternatiivsed täislahendused andsid 7 punkti, kus iga suurema vea eest võeti maha 1 punkt.

2. *(Mart Abel)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Žürii lahendusega 2 sarnane täislahendus: 7 p
- Põhjendamata, miks kas seosest $a+b=(a+b)(a-b)$, seosest $(a+b)(a-b-1)=0$ või nendega analoogilisest seosest saadakse $a-b-1=0$ ehk $a=b-1$: 6 p
- Vastuseks saadud lisaks õigele lahendile ka võõrlahend, kus kas $a<b$, $a \leqslant 0$ või $b \leqslant 0$: 6 p
- Põhjendamata, miks kas seosest $a+b=(a+b)(a-b)$, seosest $(a+b)(a-b-1)=0$ või nendega analoogilisest seosest saadakse et $a-b-1=0$ ehk $a=b-1$, seejärel vastuseks saadud lisaks õigele lahendile ka võõrlahend, kus kas $a<b$, $a \leqslant 0$ või $b \leqslant 0$: 5 p
- Põhjendamata, miks kas seosest $a+b=(a+b)(a-b)$, seosest $(a+b)(a-b-1)=0$ või nendega analoogilisest seosest saadakse et $a-b-1=0$ ehk $a=b-1$, seejärel jõutud a või b õige kujuni ning väidetud, et „lahendid puuduvad, sest $\sqrt{5}$ ei ole reaalarv“: 4 p

Enamus lahendajaid kaotas punkti seetõttu, et ei põhjendanud (või põhjendas valesti), miks peaks näiteks seosest $a+b=(a+b)(a-b)$ järelduma, et $a-b-1=0$ või $a-b=1$. Üldjuhul on ju võrrandil $x=xy$ lahenditeks nii $x=0$ kui ka $y=1$. Seega tuleb põhjendada, millistel kaalutlustel üks nendest variantidest välistati.

3. *(Markus Rene Pae)*

- Põhjendatud, et kattuvad vaid naabertippude ümber tõmmatud ringid: 2 p

- Leitud kahe ringi ühise osa pindala: 3 p

  Sealhulgas:

  - Põhjendatud, et poole läätse pindalast moodustab ringjoone 60-kraadine sektor, millest on maha lahutatud võrdkülgse kolmnurga pindala: *2 p*
- On väidetud, et kujundi pindala leidmiseks on tarvis kuuekordsest ringi pindalast maha lahutada kuuekordne läätse pindala: 1 p
- Leitud siniseks värvitud tasandi osa täpne pindala: 1 p

Ülesanne osutus oodatult lihtsaks. Täislahenduse esitas ainult üks õpilane, kes oli vaadelnud seda, kas kattuda saavad ka mittejärjestikustel tippudel asuvad ringid. Silma torkas tõik, et üsna palju õpilasi oli ülesande tekstist valesti aru saanud ja leidnud tekkinud kujundi selle osa pindala, mis jääb kuusnurga sisse.

4. *(Ahti Peder)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti:

- Osatud vaadelda eraldi juhte $a-b=b-c$ ja $a-b=-(b-c)$: 1 p
- Leitud juhu $a-b=b-c$ ehk $a+c=2b$ lahendite arv: 2 p
- Leitud juhu $a-b=-(b-c)$ ehk $a=c$ lahendite arv: 2 p
- Leitud mõlema juhu ühiste lahendite arv ja see tulemusest maha lahutatud: 2 p

Mitmes töös oli vaadeldud erinevaid situatsioone, kuid sealjuures polnud aru saada, kas vaadeldud võimalused katavad kõik juhud. Samuti ei olnud mitmes töös analüüsitud võimalikke lahendite mitmekordset loendamist.

5. *(Uve Nummert)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a) osa täislahendus: 3 p
- b) osa täislahendus: 4 p

Kummaski osas anti 1 punkt vähem, kui mõni väiksem alajuht oli läbi vaatamata või põhjendustes väike puudujääk; suuremate lünkade korral anti 2–3 punkti vähem.

Punkte ei saanud lahendused, kus eeldati, et ainus võimalus 11-ga jaguvuseks on võrduse $A+C=B$ kehtimine, ning põhjendused tuginesid täielikult sellele vääreeldusele.

Eesti LXIV matemaatikaolümpiaad

8. aprill 2017 Lõppvoor **11. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Oleg Košik)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $n = 2$ pole võimalik: 2 p
- Näidatud, et $n = 3$ pole võimalik: 3 p

  Sealhulgas:
  - Väide, et kui $n = 3$, siis nii a kui $a+735$ on algarvu ruudud: *1 p*
- Korrektne näide $n = 4$ jaoks: 2 p

2. *(Märt Põldvere)*

Anname eraldi skeemid erinevate lähenemiste jaoks.

Skeem žürii lahendusele 1.

- Tuletatud võrdus $2a(a-1) + (a+b)^2 + (a+c)^2 + (a+d)^2 = 1$: 3 p
- Tähele pandud, et $a = 0$ või $a = 1$: 2 p
- Leitud lahendid, kus $a = 0$: 1 p
- Leitud lahendid, kus $a = 1$: 1 p

Skeem žürii lahendusele 2.

- Tuletatud võrdus (2): 3 p

  Sealhulgas:
  - Süsteem (1) välja kirjutatud: *1 p*
  - Süsteemist (1) muutuja a elimineeritud: *1 p*
- Tähele pandud, et üks arvudest b, c, d peab olema 0: 1 p
- Tähele pandud, et (vaadeldaval konkreetsel juhul) $|c| \leqslant 1$ ja $|d| \leqslant 1$: 1 p
- Lahend leitud juhul, kui $|c| = |b| = 1$ (ja sellega sümmeetrilistel juhtudel): 1 p
- Lahend leitud juhul, kus $c = 0$ (ja sellega sümmeetrilistel juhtudel): 1 p

Skeem žürii lahendusele 3.

- Leitud lahendid, kus $a = 0$: 1 p
- Tähele pandud, et $|a| \geqslant |b|$, $|a| \geqslant |c|$, $|a| \geqslant |d|$: 2 p
- Tähele pandud, et peab kehtima võrdus $|3a| - (|b| + |c| + |d|) = 0$ või võrdus $|3a| - (|b| + |c| + |d|) = 1$: 2 p

- Tähele pandud, et eelmise rea esimest tingimust rahuldavaid lahendeid pole: 1 p
- Leitud teist tingimust rahuldavad lahendid: 1 p

Skeem žürii lahendusele 3, mille teine pool vastab lahenduse järgsele märkusele.

- Leitud lahendid, kus $a = 0$: 1 p
- Tähele pandud, et $|a| \geqslant |b|$, $|a| \geqslant |c|$, $|a| \geqslant |d|$: 2 p
- Tähele pandud, et $a \geqslant 0$: 2 p
- Tähele pandud, et $a + b \geqslant 0$, $a + c \geqslant 0$ ja $a + d \geqslant 0$, kusjuures $(a + b) + (a + c) + (a + d) = 1$: 1 p
- Eelneva tähelepaneku abil leitud ülejäänud lahendid: 1 p

Skeem žürii lahendusele 4.

- Tuletatud võrratus $6a^2 - 6a - 2 \leqslant 0$: 3 p

  Sealhulgas:
  - Kasutatud aritmeetilise ja ruutkeskmise vahelist võrratust: *1 p*
  - Saadud võrratus $\dfrac{1 + a^2}{3} \geqslant \dfrac{(1 - 3a)^2}{9}$: *1 p*
- Võrratus $6a^2 - 6a - 2 \leqslant 0$ lahendatud: 1 p
- Järeldatud, et $a = 0$ või $a = 1$: 1 p
- Leitud lahendid, kus $a = 0$: 1 p
- Leitud lahendid, kus $a = 1$: 1 p

3. *(Janno Veeorg)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Korrektselt põhjendatud $|NB| = \dfrac{|AB|}{2}$ või mõni samaväärne tulemus: 3 p
- *Sealhulgas:*
  - Pandud kirja nurgapoolitaja omadus AN kohta: *1 p*
  - Kirjutatud, et $|NB| = \dfrac{|AB|}{2}$ ilma korrektse põhjenduseta: *1 p*
- Näidatud $|BC| = 2|AX|$ või mõni samaväärne tulemus: 3 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

4. *(Indrek Zolk)*

Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise jaoks.

Skeem lahendusele pika võrratusahela konstrueerimisega.

- Tõestatud tähelepanek, et juhul $a_1 \geqslant 0$ kehtivad võrratused $|a_1| \geqslant |a_2|$ ja $|a_{n-1}| \leqslant |a_n|$ ning juhul $a_1 < 0$ samad võrratused rangetena: 2 p

- Tõestatud tähelepanek, et kolmik (a, b, c) on püsiv parajasti siis, kui $|a| \geqslant |b|$ ja $|c| \geqslant |b|$ (juhul $a \geqslant 0$) või $|a| > |b|$ ja $|c| > |b|$ (juhul $a < 0$): 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Lahenduse lõpuleviimine tähendab, et juhul $a_1 \geqslant 0$ on eeldatud, et püsiv kolmik puudub, ja saadud $|a_1| \geqslant |a_2| > |a_3| > \ldots > |a_{n-1}| > |a_n|$, mis on vastuolus tingimusega $|a_{n-1}| \leqslant |a_n|$, ning juhul $a_1 < 0$ analoogselt $|a_1| > |a_2| \geqslant |a_3| \geqslant \ldots \geqslant |a_{n-1}| \geqslant |a_n|$, vastuolu nõudega $|a_{n-1}| < |a_n|$.

Skeem lahendusele, mis vaatleb kahekaupa summasid.

- Tõestatud tähelepanek, et n on paaritu arv: 1 p
- Tõestatud tähelepanek, et juhul $a_1 \geqslant 0$ on (a_1, a_2, a_3) mittepüsivus samaväärne tingimusega $a_2 + a_3 < 0$, juhul $a_1 < 0$ aga tingimusega $a_2 + a_3 \geqslant 0$: 2 p
- Tõestatud tähelepanek, et juhul $a_1 \geqslant 0$ eelnevate kolmikute mittepüsivuse korral kehtib $a_{2k} + a_{2k+1} < 0$ ja $a_{2k+1} + a_{2k+2} \geqslant 0$, juhul $a_1 < 0$ vastupidi: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Lahenduse lõpuleviimine tähendab, et juhul $a_1 \geqslant 0$ on eeldatud, et püsiv kolmik puudub, ja saadud, et korraga peaks kehtima $a_{n-1} + a_n \geqslant 0$ ja $a_{n-1} + a_n < 0$, juhul $a_1 < 0$ aga vastupidi.

Juhul, kui argumentatsioon põhimõtteliselt töötas, aga võrratusmärkide rangus polnud selgelt määratud (nt siin-seal piirduti väljenditega „on kasvav“, “ei tohi olla kasvav“ jms), võeti 1–2 punkti maha.

Ainult võrratuse $|a_1| \geqslant |a_2|$ (ilma võrratuseta $|a_{n-1}| \leqslant |a_n|$) eest punkte ei antud.

5. *(Toomas Krips)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähele pandud, et on tarvis vaadata a, b, c, d jääke 3-ga jagamisel: 1 p
- Vaadeldud kõik juhud, millest tuleneb, et u jagub 3-ga: 3 p
- Vaadeldud kõik juhud, millest tuleneb, et v jagub 3-ga: 3 p

  Sealhulgas:
  - Vaadeldud ainult juht, kus $a = b = c = d$: *1 p*

Hindamisskeemid

1. *(Kairi Hennoch)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud korrektselt väide a) või c): 4 p
- Põhjendatud korrektselt ka teine neist: 2 p
- Toodud väitele b) vastunäide: 1 p

Punkte võeti maha põhjenduste puudulikkuse või ebaselguse eest.

2. *(Raul Kangro)*

Anname eraldi skeemid kahe erineva lähenemise jaoks. Kummagi skeemi puhul skeemi ridade eest antavad punktid summeeriti.

Skeem lahendusele, kus esitatakse uuritav avaldis tingimuste kaudu.

- Avatud korrektselt sulud avaldises $(x+y+z)^3$: 2 p
- Avaldatud $3(x^2y+x^2z+xy^2+zy^2+xz^2+yz^2)$ tingimustele vastavate avaldiste kaudu: 3 p
- Lõpptulemuseni jõudmine (uuritav avaldis lihtsustatud): 2 p

Skeem lahendusele, kus esitatakse uuritav avaldis ühe muutuja kaudu.

- Esitatud $(x+y)^3$ muutuja z kaudu: 1 p
- Avaldatud xy muutuja z kaudu: 2 p
- Esitatud uuritav avaldis muutuja z kaudu: 2 p
- Jõutud lõpptulemuseni (uuritav avaldis lihtsustatud): 2 p

Ülesanne osutus lihtsaks. Üllatav oli ehk see, et kuigi üldkujul teati hästi, et $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, tehti päris mitmes töös vigu $(4-z)^3$ lahti kirjutamises (kolmega korrutamine unustati ära keskmistes liikmetes).

3. *(Andres Põldaru)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Idee vaadata lühimale küljele tõmmatud mediaani: 1 p
- Lühima külje vastas olev nurk on alla 60 kraadi: 1 p
- Kolmnurga pindala avaldatud külgede kaudu: 1 p
- Koosinusteoreemi abil avaldatud mediaani pikkus: 1 p
- Koosinusteoreemi kaudu võrratus tõestatud: 3 p

Kui koosinusteoreemi kasutamise asemel näidati, et teravnurkse kolmnurga korral $h^2 > \sqrt{3}S$, kus h on kolmnurga kõrgus, ja nürinurkse kolmnurga juht lahendati eraldi, siis punktid anti analoogselt eelneva hindamisskeemiga.

Kui on näidatud, et kolmnurga ühte tippu on võimalik nihutada ja seejärel on eeldatud, et igast kolmnurgast saab nihutamise teel võrdkülgse kolmnurga, mille korral võrratus kehtib, siis anti 3 punkti.

4. *(Aleksei Lissitsin)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $d_7 \geqslant 1$, ja väidetud, et piisab, kui $d_6 \leqslant 1$: 2 p
- Tõestatud, et $d_6 \leqslant 1$: 5 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et piisab vaadelda juhtumit, kus 6 punkti asuvad ringjoonel: *4 p*
  - Näidatud, et kui 6 punkti asuvad ringjoonel, siis vastav lühim kaugus on $d \leqslant 1$: *1 p*

Kõige lakoonilisem lahendus tundub olevat see, mis märkab, et ringjoon jaguneb 6 võrdseks sektoriks, kusjuures igaüks neist on diameetriga 1 (st sektori suvalise kahe punkti vaheline kaugus ei ole suurem kui 1).

5. *(Urve Kangro)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kirjutatud välja seos, et jada liikmete summa võrdub kõigi arvude summaga: 3 p
- Märgitud, et 2017 ja 1009 on algarvud, seega $k = 1, 2, 1009$ või 2017: 2 p
- Näidatud, et kõigi nende väärtuste korral saab arve sobivalt rühmadesse jagada: 2 p

Kui puudus juht $k = 1$ või $k = 2$ siis kaotati kummagi juhu eest 1 punkt.

Ainult näidete $k = 1$, $k = 2$ ja $k = 2017$ eest sai ühe punkti; kui lisaks oli olemas ka näide arvude jaotamisest rühmadesse $k = 1009$ korral, siis 2 punkti.

Mõnes töös oli väidetud, et juhul $k = 1009$ pole võimalik arve rühmadesse jaotada, need tööd said reeglina 6 punkti. Mitmetes töödes oli juhul $k = 1009$ küll leitud võimalikke aritmeetilise jada vahesid ja esimesi liikmeid, aga polnud näidatud, et sellistesse rühmadesse on võimalik arve jagada. Ka need tööd said reeglina 6 punkti.

Mõnes töös lubati ka tühja rühma, siis tekkis lisaks vastus $k = 2018$. Kuna see on tõlgenduse küsimus, kas tühja rühma lubada või mitte, siis selle eest punkte maha ei võetud.