Lõppvoor 2016

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

2. aprill 2016 Lõppvoor **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormistage igale paberile ainult ühe ülesande lahendust!

1. Kas arv

$$999897\ldots\ldots 121110090807060504030201 00$$

jagub arvuga 99? (Arvus esinevad üksteise järele kirjutatult kõik kahekohalised arvud kahanevas järjestuses.)

2. Lift liigub üles ja alla ühe ja sama kiirusega. Sportlase tõusukiirus trepist üles joostes on 20% lifti kiirusest väiksem ja laskumiskiirus trepist alla joostes 25% lifti kiirusest suurem. Kas sportlasel kulub maja esimeselt korruselt viimasele ja tagasi jooksmiseks rohkem või vähem aega kui liftiga sõites ja mitme protsendi võrra?

3. Mittevõrdkülgse kolmnurga ABC tipu A juures oleva nurga suurus on 60°. Olgu D tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt vastasküljega ning Q ja R vastavalt tippudest B ja C tõmmatud kõrguste aluspunktid. Tõesta, et sirged AD, BQ ja CR lõikuvad kolmes erinevas punktis, mis on mingi võrdkülgse kolmnurga tippudeks.

4. Malelaual mõõtmetega 8×8 on ühe serva ruutudel 8 valget etturit ja vastasserva ruutudel 8 musta etturit. Ühel käigul võib mängija nihutada üht oma etturitest ühe või enama ruudu võrra otse edasi (vastase nupu suunas) või tagasi, kuid vastase nupuga samale ruudule ega vastase nupust üle astuda ei tohi. Käiakse kordamööda, alustavad valged. Võidab mängija, kelle vastane ei saa käiku teha. Kas kummalgi mängijaist leidub võitev strateegia ja kui jah, siis kellel?

5. Leida suurim võimalik algarvude arv 100 järjestikuse naturaalarvu seas.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

2. aprill 2016 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormistage igale paberile ainult ühe ülesande lahendust!

1. Leia kõik sellised neljakohalised arvud, mis on esimese numbri viimaseks tõstmisel saadavast neljakohalisest arvust täpselt 2016 võrra suuremad.

2. Leia kõik täisarvupaarid (a, b), mille korral kehtib võrdus

$$3(a^2 + b^2) - 7(a + b) = -4.$$

3. Nimetame kumerat hulknurka tasandil *korralikuks*, kui tema iga külje XY jaoks leidub hulknurga tipp, mis asub sirgest XY kaugemal kui kõik teised hulknurga tipud. Sirgest XY kõige kaugemal olevast tipust sirgele XY tõmmatud ristlõiku nimetame selle korraliku hulknurga *kõrguseks*.

Leia kõik naturaalarvud n, mille jaoks leidub korralik n-nurk, mille kõik n kõrgust lõikuvad ühes punktis.

4. Manni ja Miku mängivad malelaual mõõtmetega 8×8 järgmist vankrimängu. Mängu alguses asetab Miku oma soovi järgi laua ruutudele 8 vankrit. Seejärel tehakse kordamööda käike, alustab Manni. Igal käigul liigutab mängija täpselt üht vankrit mööda rida või liini (veergu) ühe või enama ruudu võrra ühes suunas. Kui vanker liigub ruudule, millel on teine vanker, lüüakse (eemaldatakse) teine vanker laualt; vankriga üle teise vankri liikuda ei tohi. Võidab see, kes esimesena mõne vankri lööb, kuid viimati vastase poolt liigutatud nupuga käia ega seda nuppu lüüa ei tohi. Kas kummalgi mängijaist leidub võitev strateegia ja kui jah, siis kellel?

5. Õpetaja oli tunniks valmistudes teinud tahvlile kolmnurkse tabeli

$$\begin{array}{lllll}
1! & & & & \\
2! & 2! & & & \\
3! & 3! & 3! & & \\
\multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
n! & n! & n! & \dots & n!
\end{array}$$

(st iga arvu $k!$ esineb k korda). Enne tunni algust aga kustutas Juku mänguhoos tabeli mõnede lahtrite sisud. Õpetaja leidis tundi tulles, et tahvlile jäänud faktoriaalide summa on täpselt 2016. Leia kõik võimalused, milline saab olla kustutamata jäänud lahtrite arv igas reas.

Märkus. Naturaalarvu k *faktoriaaliks* $k!$ nimetatakse korrutist $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

2. aprill 2016 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormistage igale paberile ainult ühe ülesande lahendust!

1. Leia suurim naturaalarv n, mille korral arv $3^{2016} - 1$ jagub arvuga 2^n.

2. Kolm töölist peavad mingi töö ära tegema. Kõigepealt töötab üks neist nii kaua, kui palju kuluks ülejäänud kahel, et teha ära pool kogu tööst. Seejärel töötab teine nii kaua, kui palju kuluks ülejäänud kahel, et teha ära pool kogu tööst. Lõpuks töötab kolmas nii kaua, kui palju kuluks ülejäänud kahel, et teha ära pool kogu tööst. Sellega saab kogu töö tehtud. Mitu korda kiiremini saaks kogu töö tehtud, kui töölised töötaksid kõik koos?

3. Punktist O väljuvad ruumi paarikaupa erinevad kiired k, l ja m. Kiirte k ja l vahelise nurga suurus on α, kiirte l ja m vahelise nurga suurus on β ja kiirte m ja k vahelise nurga suurus on γ, kusjuures $\alpha + \beta \leqslant 180^\circ$. Kiirte k ja l vahelise nurga poolitab kiir r ning kiirte l ja m vahelise nurga poolitab kiir s. Kas võib kindlalt väita, et kiirte r ja s vahelise nurga suurus on $\frac{\gamma}{2}$?

4. Iga punkt võrdkülgse kolmnurga külgedel on värvitud kas punaseks või siniseks. Kas võib kindlalt väita, et leidub täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on värvitud sama värvi?

5. Algul on tahvlil kaks positiivset täisarvu. Igal sammul valitakse tahvlil olevate arvude seast kõikvõimalikel viisidel arvud a ja b, nii et $a \leqslant b$ (võrdus tähendab, et võib võtta sama arvu kaks korda), leitakse vastavad summad $a + b + \text{SÜT}(a, b)$ ning asendatakse kõik tahvlil olevad arvud korraga kõigi leitud summadega. Tõesta, et mingil sammul tekib tahvlile komplekt, kus vähemalt üks arv esineb korduvalt.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

2. aprill 2016 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Elektroonilised ega kirjalikud abivahendid ei ole lubatud.
Palun vormistage igale paberile ainult ühe ülesande lahendust!

1. Tähistagu $\delta(n)$ ja $\sigma(n)$ vastavalt positiivse täisarvu n positiivsete tegurite arvu ja positiivsete tegurite summat. Tõesta, et

$$\sigma(n) > \frac{(\delta(n))^2}{2}.$$

2. Kas saab valida reaalarvud a, b, c ja d nii, et $a \neq 0$ ning funktsioonidel $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ja $y = ax^3 + bx^2 + cx + d + 4$ on kummalgi täpselt kaks erinevat nullkohta?

3. Tasandil on ringjooned c_1, c_2, c_3 ja c_4. Ringjooned c_1 ja c_2 lõikuvad omavahel kahes punktis ja ringjoon c_4 läbib samuti neid lõikepunkte. Ringjoon c_3 lõikub ringjoontega c_1 ja c_2 täisnurga all. Tõesta, et ringjoon c_3 lõikub ka ringjoonega c_4 täisnurga all.

Märkus. Ütleme, et kaks ringjoont lõikuvad täisnurga all, kui nende puutujad lõikepunktis on risti.

4. Riigis on mõned linnad ühendatud maanteedega. Ütleme, et linn A *kuulub tsüklisse pikkusega* n, kui linnast A alustades saab sõita läbi täpselt $n - 1$ ülejäänud linna ja jõuda tagasi linna A. On teada, et riigi iga linn kuulub tsüklisse pikkusega 4 ja tsüklisse pikkusega 5. Kas võib kindlalt väita, et

a) vähemalt üks linn kuulub tsüklisse pikkusega 3?

b) iga linn kuulub tsüklisse pikkusega 3?

5. Paberiribale kirjutatakse ühte ritta 125 erinevat positiivset täisarvu nii, et igast kolmest üksteisele vahetult järgnevast arvust teine on suurem kui esimese ja kolmanda aritmeetiline keskmine. Leia suurim ribale kirjutatud arv, kui on teada, et see on antud tingimustel nii väike kui võimalik.

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

2 апреля 2016 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте на каждом листе не более одного задания!

1. Делится ли число

$$999897\ldots\ldots 121110090807060504030201 00$$

на 99? (В числе записаны подряд все двухзначные числа в убывающем порядке.)

2. Лифт движется вверх и вниз с одинаковой скоростью. Спортсмен поднимается вверх по ступенькам со скоростью на 20% меньшей скорости лифта, а спускается со скоростью на 25% большей скорости лифта. Пойдёт ли у спортсмена больше или меньше времени на то, чтобы подняться с первого этажа на последний и спуститься обратно бегом, по сравнению с тем, чтобы сделать это на лифте, и на сколько процентов?

3. Величина угла при вершине A неравностороннего треугольника ABC равна 60°. Пусть D – точка пересечения биссектрисы, проведённой из вершины A, с противоположной стороной, а Q и R – основания высот, проведённых соответственно из вершин B и C. Доказать, что прямые AD, BQ и CR пересекаются в трёх различных точках, являющимися вершинами некоторого равностороннего треугольника.

4. На клетках одного края шахматной доски 8×8 стоят 8 белых пешек, а на клетках противоположного края – 8 чёрных пешек. За один ход игрок может передвинуть одну из своих пешек на одну или более клеток вперёд (в сторону противоположной пешки противника) или назад, причём пойти на клетку с пешкой противника или перепрыгнуть через неё нельзя. Ходят по очереди, начинают белые. Выигрывает игрок, противник которого не имеет возможности сделать ход. Найдётся ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

5. Найти наибольшее возможное количество простых чисел среди 100 идущих подряд натуральных чисел.

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

2 апреля 2016 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте на каждом листе не более одного задания!

1. Найти все такие четырёхзначные числа, которые ровно на 2016 больше числа, полученного путём переставления первой цифры в конец.

2. Найти все пары целых чисел (a, b), для которых выполняется равенство

$$3(a^2 + b^2) - 7(a + b) = -4.$$

3. Назовём выпуклый многоугольник на плоскости *порядочным*, если для каждой его стороны XY найдётся его вершина, находящаяся от прямой XY дальше, чем все остальные вершины этого многоугольника. Перпендикуляр, проведённый от такой самой дальней от прямой XY вершины на эту же прямую назовём *высотой* нашего многоугольника.
Найти все натуральные числа n, при которых существует порядочный n-угольник, все n высот которого пересекаются в одной точке.

4. На шахматной доске 8×8 Манни и Виши играют в следующую игру с ладьями. В начале игры Виши по своему желанию располагает на клетках доски 8 ладей. Затем по очереди делаются ходы, начинает Манни. За каждый ход игрок передвигает ровно одну ладью в одном направлении по горизонтали или по вертикали на одну или более клеток. Если ладья передвигается на клетку, на которой уже находится другая ладья, то эта другая ладья съедается (удаляется с поля); передвигать ладью через клетку с другой ладьёй нельзя. Выигрывает тот, кто первым съест какую-нибудь ладью. При этом передвигать или есть ладью, которой делал предыдущий ход противник, запрещено. Найдётся ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

5. Готовясь к уроку, учитель записал на доске треугольную таблицу

$$\begin{array}{lllll}
1! & & & & \\
2! & 2! & & & \\
3! & 3! & 3! & & \\
\multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
n! & n! & n! & \dots & n!
\end{array}$$

(т. е. число $k!$ встречается k раз). Но перед началом урока Вова случайно стёр содержимое некоторых клеток таблицы. Придя на урок, учитель заметил, что оставшиеся на доске факториалы в сумме дают ровно 2016. Найти все возможные варианты того, какими могут быть количества нестёртых клеток в каждом ряду.
Примечание. Факториалом $k!$ натурального числа k называется произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$.

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

2 апреля 2016 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте на каждом листе не более одного задания!

1. Найти наибольшее натуральное число n, при котором число $3^{2016} - 1$ делится на 2^n.

2. Трое рабочих должны выполнить некоторую работу. Вначале один из них работает столько, сколько ушло бы времени у остальных двух, чтобы выполнить половину всей работы. Затем второй работает столько, сколько ушло бы времени у остальных двух, чтобы выполнить половину всей работы. Наконец работает третий столько, сколько ушло бы времени у остальных двух, чтобы выполнить половину всей работы. В результате вся работа оказывается выполненной. Во сколько раз быстрее была бы выполнена работа, если бы рабочие работали всё время вместе?

3. Из точки O в пространство выходят различные лучи k, l и m. Угол между лучами k и l равен α, между лучами l и m – β, а между лучами m и k – γ, причём $\alpha + \beta \leqslant 180^\circ$. Угол между лучами k и l делит пополам луч r, а угол между лучами l и m делит пополам луч s. Можно ли с уверенностью утверждать, что угол между лучами r и s равен $\dfrac{\gamma}{2}$?

4. Каждая точка на сторонах равностороннего треугольника раскрашена либо в красный, либо в синий цвет. Можно ли с уверенностью утверждать, что найдётся прямоугольный треугольник, все вершины которого раскрашены в одинаковый цвет?

5. Изначально на доске находятся два положительных целых числа. На каждом шагу на доске выбирают всеми возможными способами числа a и b такие, что $a \leqslant b$ (равенство означает, что одно и то же число можно выбрать два раза), находят соответствующие суммы $a + b + \text{НОД}(a, b)$ и заменяют все числа на доске одновременно всеми найденными суммами. Доказать, что после какого-то шага среди чисел на доске найдутся два одинаковых.

LXIII Олимпиада Эстонии по математике

2 апреля 2016 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Вспомогательные письменные материалы или электронные приборы не разрешены.
Пожалуйста, оформляйте на каждом листе не более одного задания!

1. Обозначим через $\delta(n)$ и $\sigma(n)$, соответственно, количество и сумму положительных целых делителей положительного целого числа n. Доказать, что

$$\sigma(n) > \frac{(\delta(n))^2}{2}.$$

2. Можно ли выбрать действительные числа a, b, c и d так, что $a \neq 0$, а у каждого из многочленов $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $y = ax^3 + bx^2 + cx + d + 4$ имеется ровно два различных корня?

3. На плоскости расположены окружности c_1, c_2, c_3 и c_4. Окружности c_1 и c_2 пересекаются между собой в двух точках, а окружность c_4 также проходит через обе эти точки пересечения. Окружность c_3 пересекает окружности c_1 и c_2 под прямым углом. Доказать, что окружность c_3 пересекается и с окружностью c_4 под прямым углом.

Замечание. Скажем, что окружности пересекаются под прямым углом, если касательные к ним в точке пересечения находятся под прямым углом.

4. Некоторые города в стране соединены шоссейными дорогами. Скажем, что город A *входит в цикл длиной* n, если начиная с города A можно проехать ровно $n-1$ других городов и вернуться в город A. Известно, что каждый город в стране входит в цикл длиной 4 и в цикл длиной 5. Можно ли с уверенностью утверждать, что

а) хотя бы один город входит в цикл длиной 3?

б) все города входят в цикл длиной 3?

5. На бумажной ленте в один ряд записываются 125 различных положительных целых чисел так, что из каждых трёх записанных подряд чисел второе больше чем арифметическое среднее первого и третьего. Найти наибольшее из записанных на ленте чисел, если известно, что оно наименьшее из тех, которые удовлетворяют условиям задачи.

LXIII Estonian Mathematical Olympiad

April 2, 2016 Final round **Grade 9**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Written materials or electronic devices are not permitted.
Please write the solution of only one problem on each sheet of paper!

1. Is the number

$$999897\ldots\ldots121110090807060504030201\,00$$

divisible by 99? (In this number, all two-digit numbers are written one after another in decreasing order.)

2. An elevator moves up and down with the same speed. An athlete's vertical speed is by 20% lower than the speed of the elevator when running upstairs and by 25% higher than the speed of the elevator when running downstairs. Does it take more or less time for the athlete to run from ground floor to the last floor and back compared to using the elevator, and by how many percent?

3. Non-equilateral triangle ABC has a 60° angle at vertex A. Let the angle bisector drawn from vertex A intersect the opposite side at point D, and let Q and R be the feet of the altitudes drawn from vertices B and C, respectively. Prove that lines AD, BQ and CR intersect in three distinct points that are vertices of an equilateral triangle.

4. There are 8 white pawns on the squares at one edge of an 8×8 chessboard and 8 black pawns on the squares at the opposite edge. On each move, a player shifts one of his pawns by one or more squares forward (toward the opponent's piece) or backward, but moving a pawn to a square containing the opponent's pawn or over such a square is prohibited. Moves are performed alternately, with the whites starting. The player who cannot make a move loses. Which player has a winning strategy?

5. Determine the largest possible number of primes among 100 consecutive natural numbers.

Lahendused

1. *Vastus:* jah.

Lahendus 1. Et $99 = 9 \cdot 11$ ning 9 ja 11 on ühistegurita, piisab näidata jaguvus 9-ga ja 11-ga. Et antud arvus esineb paaritutel kohtadel igat numbrit 10 korda ja paariskohtadel samuti igat numbrit 10 korda, on arvu numbrite summa kokku $2 \cdot 10 \cdot (9+8+7+6+5+4+3+2+1+0)$ ehk 900, mis jagub 9-ga. Seega jagub ka antud arv 9-ga. Arv jagub 11-ga parajasti siis, kui paaris- ja paaritutel kohtadel olevate numbrite summade vahe jagub 11-ga; kuna need summad on eelneva põhjal võrdsed, on nende summade vahe 0, mistõttu arv tõepoolest jagub ka 11-ga.

Lahendus 2. Antud arv esitub 100 astmete summana kujul

$$99 \cdot 100^{99} + 98 \cdot 100^{98} + 97 \cdot 100^{97} + \ldots + 2 \cdot 100^{2} + 1 \cdot 100^{1}.$$

Et arv 100 annab 99-ga jagades jäägi 1, annavad 99-ga jagades jäägi 1 ka kõik 100 astmed. Seetõttu annab vaadeldav summa 99-ga jagades sama jäägi nagu summa $99 \cdot 1 + 98 \cdot 1 + 97 \cdot 1 + \ldots + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1$. Tegurite 1 ärajätmisel ja nulli juurdevõtmisel saab selle ümber kirjutada kujul

$$(99+0) + (98+1) + (97+2) + \ldots + (45+44).$$

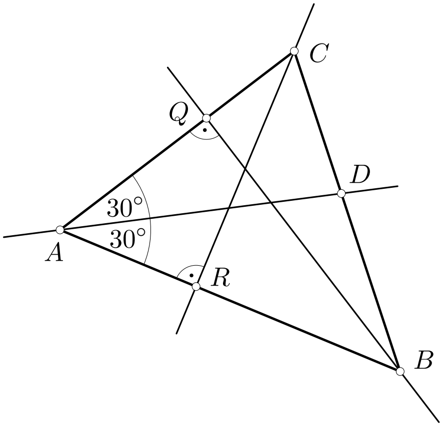
Et igas sulus on summa 99, siis kogusumma jagub 99-ga. Järelikult jagub 99-ga ka antud arv.

Lahendus 3. Sajandsüsteemis on 99-ga jaguvuse tunnus sama mis kümnendsüsteemis 9-ga jaguvuse tunnus. Antud arvu ristsumma sajandsüsteemis on $99 + 98 + 97 + \ldots + 2 + 1 + 0$. Nagu lahenduses 2 saab näidata, et see jagub 99-ga. Järelikult jagub ka algne arv 99-ga.

Märkus. Lahendused 2 ja 3 on sisuliselt üks ja sama. Lahenduses 2 ei toetuta jaguvustunnusele, vaid tõestatakse see antud arvu jaoks.

2. *Vastus*: rohkem, 2,5 protsendi võrra.

Olgu lifti kiirus v ning viimase ja esimese korruse kõrguste vahe h. Siis liftiga üles- ja allasõidu aeg kokku on $2 \cdot \frac{h}{v}$, trepist üles ja alla jooksmise aeg aga $\frac{h}{0{,}8v} + \frac{h}{1{,}25v}$ ehk $2{,}05 \cdot \frac{h}{v}$. Niisiis kulub sportlasel üles ja alla jooksmiseks kokku $\frac{2{,}05 - 2}{2} \cdot 100\%$ ehk 2,5% võrra rohkem aega kui liftiga sõites.



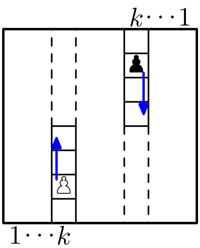
Joonis 1

3. Kui sirge AD läbiks sirgete BQ ja CR lõikepunkti, oleks AD kolmnurga ABC kõrgus. Et AD on ühtlasi nurgapoolitaja, peaks kolmnurk ABC olema võrdhaarne tipunurgaga A juures. Et $\angle BAC = 60^\circ$, oleks kolmnurk ABC võrdkülgne, mis on vastuolus eeldusega. Järelikult ei läbi sirge AD sirgete BQ ja CR lõikepunkti, mistõttu need kolm sirget lõikuvad kolmes erinevas punktis.

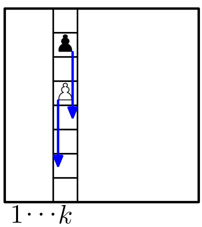
Ülesande tingimuste kohaselt kehtivad võrdused $\angle QAD = \angle RAD = 30^\circ$ ning $\angle AQB = \angle ARC = 90^\circ$ (joonis 1). Seega sirged AD ja BQ lõikuvad 60° nurga all ning sirged AD ja CR lõikuvad samuti 60° nurga all. Vastavalt on sirgete AD, BQ ja CR lõikepunktidest moodustuva kolmnurga kaks nurka suurusega 60°. Sellise kolmnurga kolmanda nurga suurus on samuti 60°, ehk see kolmnurk on võrdkülgne.

4. *Vastus:* jah, mustal.

Must võib kasutada järgmist strateegiat. Kui valge käib malelaua ühest küljest lugedes k-nda etturiga n sammu edasi, käib must malelaua teisest kül-



Joonis 2



Joonis 3

jest lugedes k-nda etturiga n sammu edasi (joonis 2). Kui valge käib malelaua ühest küljest lugedes k-nda etturiga n sammu tagasi, käib must malelaua samast küljest lugedes k-nda etturiga n sammu edasi (joonis 3). Nii on pärast musta iga käiku malelaua igal liinil (igas veerus) valge ja musta etturite vaheline kaugus sama mis keskpunkti suhtes sümmeetrilisel liinil, mistõttu alati, kui mõni valge ettur käib edasi, saab must teha oma strateegiale vastava käigu ega satu esimesena käigupuudusse. Et mustad liiguvad ainult edasi, tekib varem või hiljem käigupuudus valgel.

5. *Vastus*: 26.

Arvude 1 kuni 100 seas on 25 algarvu. Sellest lähtuvalt leiame järgnevate sadakondade algarvude arvu, nagu näidatud tabelis.

Sadakond	Võrreldes eelmisega		Algarve
	välja	sisse	
$1,\dots,100$			25
$2,\dots,101$	1	101	26
$3,\dots,102$	2	102	25
$4,\dots,103$	3	103	25
$5,\dots,104$	4	104	25
$6,\dots,105$	5	105	24
$7,\dots,106$	6	106	24

Suurim leitud algarvude arv on 26. Näitame, et üheski järgnevas sadakonnas ei ole rohkem kui 26 algarvu. Vaatleme suvalist 100 järjestikust naturaalarvu, millest vähim on suurem kui 7. Siis ükski vaadeldavaist arvudest, mis jagub 2-, 3-, 5- või 7-ga, ei ole algarv. Näitame järgnevas, et selliseid arve on kokku vähemalt 74.

- Et iga teine arv jagub 2-ga, on paarisarve kokku 50.
- Et iga kolmas arv jagub 3-ga, on 3-ga jaguvaid arve kokku vähemalt 33. Neist iga teine on paarisarvuna juba loetud, seega uusi 3-ga jaguvaid arve on vähemalt 16.
- Et iga viies arv jagub 5-ga, on 5-ga jaguvaid arve kokku 20. Neist iga teine on paarisarv, seega paarituid 5-ga jaguvaid arve on 10. Neist omakorda iga kolmas jagub 3-ga, mis elimineerib maksimaalselt 4 arvu, seega seni loendamata 5-ga jaguvaid arve on vähemalt 6.
- Et iga seitsmes arv jagub 7-ga, on 7-ga jaguvaid arve kokku vähemalt 14. Neist iga teine on paaris, järelikult paarituid 7-ga jaguvaid arve on vähemalt 7. Neist iga kolmas jagub 3-ga, mis elimineerib maksimaalselt 3 arvu, ja iga viies jagub 5-ga, mis elimineerib maksimaalselt 2 arvu. Seega vähemalt 2 seni loendamata arvu jagub 7-ga.

Kokku saame vähemalt $50 + 16 + 6 + 2$ ehk 74 kordarvu.

Lahendused

1. *Vastus*: 3109, 4220, 5331, 6442, 7553, 8664 ja 9775.

Olgu otsitava arvu tuhandeliste number a ja kolmest ülejäänud numbrist koosnev arv k. Vastavalt ülesande tingimustele

$$1000a + k = 10k + a + 2016,$$

kust $999a - 9k = 2016$ ehk $111a - k = 224$. Seega $a \geqslant 3$ ja saame lahendid

$$\begin{aligned} a &= 3, \quad k = 109; \\ a &= 4, \quad k = 220; \\ a &= 5, \quad k = 331; \\ a &= 6, \quad k = 442; \\ a &= 7, \quad k = 553; \\ a &= 8, \quad k = 664; \\ a &= 9, \quad k = 775. \end{aligned}$$

Vastavad ülesande tingimust rahuldavad neljakohalised arvud on 3109, 4220, 5331, 6442, 7553, 8664 ja 9775.

2. *Vastus*: $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,2)$.

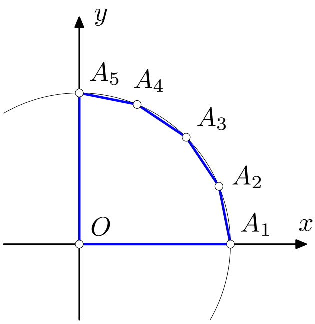
Lahendus 1. Korrutades võrrandi mõlemad pooled 12-ga, liites 98 ja rühmitades vasakul pool liikmed sobivalt, saame samaväärse võrrandi

$$(6a-7)^2 + (6b-7)^2 = 50.$$

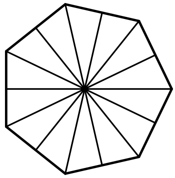
Arv 50 esitub täisarvude ruutude summana kujul $25 + 25$ ja $1 + 49$. Seega kumbki arvudest $6a - 7$ ja $6b - 7$ peab olema 7, 5, 1, -1, -5 või -7. Et a ja b on täisarvud, sobivad vaid 5, -1 ja -7. Saame võimalused

$$\begin{aligned} 6a - 7 &= 5, & 6b - 7 &= 5; \\ 6a - 7 &= -1, & 6b - 7 &= -7; \\ 6a - 7 &= -7, & 6b - 7 &= -1. \end{aligned}$$

Vastavad lahendid on $\{a = 2, b = 2\}$, $\{a = 1, b = 0\}$ ja $\{a = 0, b = 1\}$.



Joonis 4



Joonis 5

Lahendus 2. Vaatleme võrrandit ruutvõrrandina b suhtes. Selleks, et sel võrrandil oleks lahend, peab võrrandi diskriminant olema mittenegatiivne, ehk $49-12(3a^2-7a+4) \geqslant 0$. See tingimus on samaväärne ruutvõrratusega

$$36a^2 - 84a - 1 \leqslant 0,$$

mille lahenditeks saame

$$\frac{7-\sqrt{50}}{6} \leqslant a \leqslant \frac{7+\sqrt{50}}{6}.$$

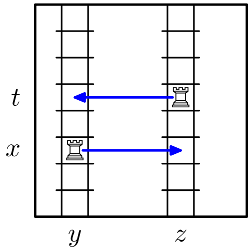
Kuna a on täisarv, siis ainsad võimalikud a väärtused on 0, 1 ja 2, vastavad b väärtused tulevad 1, 0 ja 2.

3. *Vastus*: kõik naturaalarvud $n \geqslant 3$.

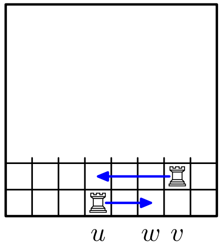
Valime ühe tipuna punkti $O(0;0)$ ning ülejäänud tipud $A_1, \dots, A_{n-1}$ ringjoonel raadiusega 1 keskpunktiga O selliselt, et $A_1(1;0)$, $A_{n-1}(0;1)$ ning $A_2, \dots, A_{n-2}$ paiknevad kõik lühemal kaarel A_1A_{n-1} (joonis 4 kujutab juhtu $n=6$). Kaugeim tipp sirgest OA_1 on A_{n-1}, kaugeim tipp sirgest OA_{n-1} aga A_1. Ülejäänud külgedega määratud sirgetest kaugeim tipp on O, sest sellise küljega paralleelne tippu O läbiv sirge paikneb II ja IV veerandis, vaadeldava hulknurga teised tipud on aga I veerandis ega saa asuda sellest sirgest allpool. Seega on vaadeldav n-nurk korralik. Külgedele OA_1 ja OA_{n-1} tõmmatud kõrgused on vastavalt OA_{n-1} ja OA_1, mis kohtuvad punktis O. Et ülejäänud külgedest kaugeim tipp on O, kohtuvad ka kõik teised kõrgused tipus O.

Märkus. Paaritu n korral on korrapärane n-nurk korralik ning tema kõrgused lõikuvad tema ümberringjoone keskpunktis (joonis 5 kujutab juhtu $n=7$).

4. *Vastus*: kummalgi ei leidu.



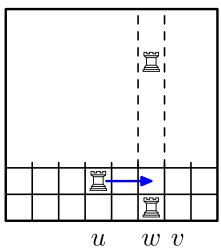
Joonis 6



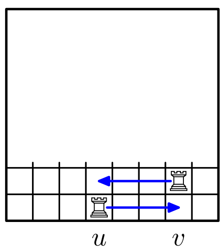
Joonis 7

Näitame algul, et Miku saab toimida nii, et Manni ei saa kunagi ühtki vankrit lüüa. Asetagu Miku 8 vankrit lauale nii, et igal real ja igal liinil paikneb täpselt üks vanker. Oletame, et Manni käib vankri ruudult (x, y) ruudule (x, z). Selle tagajärjel tekib seis, kus igal real on üks vanker, kuid liinil y vankreid pole ja liinil z on vanker peale ruudu (x, z) veel mingil ruudul (t, z). Käigu Miku vankriga ruudult (t, z) ruudule (t, y) (joonis 6). Tulemusena on jälle igas reas ja igas veerus täpselt üks vanker. Manni ristsuunalise käigu puhul on Miku vastus analoogiline. Samal moel võib Miku vastata Manni järgmisele käigule, siis ülejärgmisele jne.

Näitame nüüd, et ka Manni saab mängida nii, et Miku kunagi ei võida. Kui algseisus on mõnel real või liinil kaks vankrit, saab Manni vankri lüüa ja võidab ise. Seetõttu eeldame, et algseisus on igal real ja liinil täpselt üks vanker. Olgu kahe esimese rea vankrid ruutudel $(1, u)$ ja $(2, v)$. Manni võib käia vankri ruudult $(2, v)$ ruudule $(2, u)$. Et äsja vastase poolt liigutatud nuppu ise liigutada ega lüüa ei tohi, peab Miku, vältimaks ruudul $(1, u)$ oleva vankri löömist Manni poolt järgmisel käigul, liigutama selle mõnele ruudule $(1, w)$. Kui $w \neq v$ (joonis 7), saab Manni võita, käies vankri ruudult $(2, u)$ ruudule $(2, w)$ ja lüües järgmisel käigul emma-kumma vankri liinil w (joonis 8). Kui $w = v$ (joonis 9), on saadud seisus jälle igal real ja liinil täpselt üks vanker ja Manni saab jätkata sama strateegiat.



Joonis 8



Joonis 9

Märkus. Manni viigistrateegias on oluline, et ta käiks ühe vankri teise vankri kõrvalruudule (muidu Miku võidab, tuues kolmanda vankri nende kahe vahele) ja rünnatav vanker asub laua äärel (muidu Miku võidab, nihutades rünnatava vankri eemale nii, et Manni liigutatud vanker jääb ise tule alla).

5. *Vastus*: neljandas reas 4, viiendas reas 4 ja kuuendas reas 2.

Lahendus 1. Ilmselt on arv 1! kustutatud, sest kõik ülejäänud faktoriaalid on paaris ja sõltumata sellest, millised neist on kustutatud, annaksid koos arvuga 1! paaritu summa. Samuti peavad mõlemad arvud 2! olema kustutatud, sest kõik arvud järgnevates ridades jaguvad 6-ga ja 6-ga jagub ka 2016, kuid 2! ega 2! + 2! ei jagu 6-ga. Analoogselt näeme, et kõik arvud 3! peavad olema kustutatud, sest ülejäänud arvud tabelis ja arv 2016 jaguvad 24-ga, kuid 3!, 3! + 3! ega 3! + 3! + 3! ei jagu 24-ga.

Alates 5. reast jaguvad kõik faktoriaalid 5-ga, arv 2016 annab 5-ga jagades jäägi 1. Seega peab arve 4! esinema niipalju, et nende summa annaks 5-ga jagades samuti jäägi 1. Arv 4! annab 5-ga jagades jäägi 4, arv $2 \cdot 4!$ jäägi 3, arv $3 \cdot 4!$ jäägi 2 ning ainult $4 \cdot 4!$ annab 5-ga jagades jäägi 1. Seega on 4. reas alles 4 arvu.

Ülejäänud arvud peavad summaks andma 2016 − 96 ehk 1920. Kõik arvud alates 6. reast jaguvad 720-ga, arv 1920 aga annab 720-ga jagades jäägi 480. Ainus võimalus arvude 5! liitmisel jääki 480 saada on võtta 4 eksemplari. Seega on 5. reas alles 4 arvu ning ülejäänud arvud annavad summaks 1440. Et $7! = 5040 > 1440$, peavad olema alles veel 2 liidetavat 6. reast.

Lahendus 2. Iga k korral

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = \\
&= (2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + \ldots + ((k+1)-1) \cdot k! = \\
&= (2 \cdot 1! - 1!) + (3 \cdot 2! - 2!) + \ldots + ((k+1) \cdot k! - k!) = \\
&= (2! - 1!) + (3! - 2!) + \ldots + ((k+1)! - k!) = \\
&= (k+1)! - 1!.
\end{aligned}$$

Seega on esimese k rea arvude summa väiksem kui ükskõik milline arv järgnevates ridades. Järelikult on kindla arvu esitamiseks tahvlil olevate faktoriaalide summana ainus võimalus valida igal sammul suurim võimalik faktoriaal, mille liitmisel summa ei ületa antud arvu. Summa 2016 saamiseks on niisiis vaja valida kõigepealt kaks korda 6!, mis annavad kokku 1440, järelejäänud vahe 576 esitamiseks seejärel neli korda 5!, mis annavad kokku 480, ning lisada neli korda 4!, mis annab täpselt nõutud kogusumma.

Lahendused

1. *Vastus*: 7.

Rakendades korduvalt ruutude vahe valemit, saame

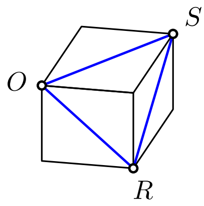
$$\begin{aligned}
3^{2016}-1 &= (3^{1008}-1)(3^{1008}+1) = \\
&= (3^{504}-1)(3^{504}+1)(3^{1008}+1) = \\
&= (3^{252}-1)(3^{252}+1)(3^{504}+1)(3^{1008}+1) = \\
&= (3^{126}-1)(3^{126}+1)(3^{252}+1)(3^{504}+1)(3^{1008}+1) = \\
&= (3^{63}-1)(3^{63}+1)(3^{126}+1)(3^{252}+1)(3^{504}+1)(3^{1008}+1).
\end{aligned}$$

Arvud 3^{126}, 3^{252}, 3^{504} ja 3^{1008} kui paaritu arvu paarisastmed on mingite paaritute arvude ruudud. Paaritu arvu ruut annab 8-ga jagades jäägi 1, arvud $3^{126}+1$, $3^{252}+1$, $3^{504}+1$ ja $3^{1008}+1$ seega annavad 8-ga jagades jäägi 2. Järelikult jaguvad need neli tegurit 2-ga, kuid mitte 4-ga. Et 3^{62} annab 8-ga jagades jäägi 1, siis 3^{63} annab 8-ga jagades jäägi 3. Järelikult $3^{63}-1$ ja $3^{63}+1$ annavad 8-ga jagades vastavalt jäägid 2 ja 4, mistõttu esimene jagub 2-ga, kuid mitte 4-ga, ja teine jagub 4-ga, kuid mitte 8-ga. Kokkuvõttes on arvu 2 aste vaadeldavas korrutises $1+2+1+1+1+1$ ehk 7.

2. *Vastus*: 2,5.

Lahendus 1. Olgu esimese, teise ja kolmanda töölise panus ajaühikus vastavalt x, y ja z osa tervest tööst. Siis teisel ja kolmandal töölisel koos kuluks poole töö tegemiseks $\frac{1}{2(y+z)}$ ajaühikut, kolmandal ja esimesel töölisel koos kuluks poole töö tegemiseks $\frac{1}{2(z+x)}$ ajaühikut ning esimesel ja teisel töölisel koos kuluks poole töö tegemiseks $\frac{1}{2(x+y)}$ ajaühikut. Ülesandes toodud moel tööd tehes kulutavad nad seega $\frac{1}{2(y+z)}+\frac{1}{2(z+x)}+\frac{1}{2(x+y)}$ ajaühikut, samas kui kõik koos tööd tehes kuluks $\frac{1}{x+y+z}$ ajaühikut. Esitatud küsimuse vastuseks on nende kestuste suhe. Saame

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2(y+z)}+\frac{1}{2(z+x)}+\frac{1}{2(x+y)}}{\frac{1}{x+y+z}} &= \frac{x+y+z}{2(y+z)}+\frac{x+y+z}{2(z+x)}+\frac{x+y+z}{2(x+y)} = \\
&= \frac{1}{2}+\frac{x}{2(y+z)}+\frac{1}{2}+\frac{y}{2(z+x)}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2(x+y)}.
\end{aligned}$$



Joonis 10

Et ülesandes kirjeldatud viisil töötades saavad töölised parajasti kogu töö tehtud, siis

$$\frac{x}{2(y+z)} + \frac{y}{2(x+z)} + \frac{z}{2(x+y)} = 1.$$

Järelikult otsitav suhe on $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$ ehk 2,5.

Lahendus 2. Olgu esimese töölise tööaeg ülesandes kirjeldatud olukorras a ajaühikut, teise töölise tööaeg b ajaühikut ja kolmanda töölise tööaeg c ajaühikut. Kokkuvõttes teevad nad $a+b+c$ ajaühikuga ära terve töö.

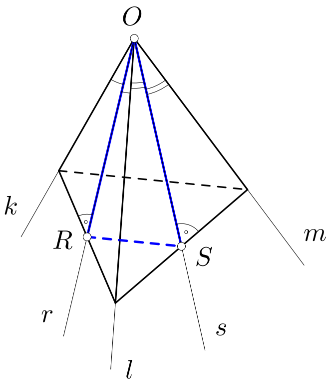
Kui teine tööline töötaks a ajaühikut ja kolmas tööline samuti a ajaühikut, saaks ülesande tingimuste põhjal tehtud pool tööd. Samuti kui kolmas tööline töötaks b ajaühikut ja esimene samuti b ajaühikut, saaks tehtud pool tööd, ja kui esimene tööline töötaks c ajaühikut ja teine samuti c ajaühikut, saaks tehtud pool tööd. Siit nähtub, et kui esimene tööline töötaks $b+c$ ajaühikut, teine $a+c$ ajaühikut ja kolmas $a+b$ ajaühikut, saaks kokku tehtud poolteist niisugust tööd. Pannes juurde tegelikult tehtud töö, osutub, et kui kõik töölised töötavad $a+b+c$ ajaühikut, tehakse kokku 2,5-kordne kogutöö.

Seega töötaksid töölised koos 2,5 korda kiiremini kui ülesandes kirjeldatud olukorras.

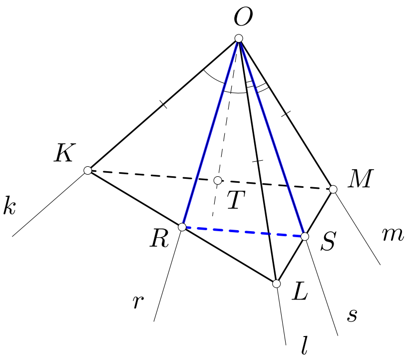
3. *Vastus*: ei.

Lahendus 1. Olgu O kuubi tipp ja väljugu kiired k, l ja m piki kuubi servi. Siis $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$. Kiired r ja s väljuvad tipust O mööda tahkude nurgapoolitajaid, mis on ühtlasi diagonaalid. Nende kahe diagonaali teised otspunktid R ja S on omakorda ühe kuubi tahu diagonaali otspunktideks (joonis 10). Kolmest diagonaalist moodustub võrdkülgne kolmnurk ORS, mistõttu $\angle ROS = 60^\circ$. Seega ei ole kiirte r ja s vahelise nurga suurus võrdne poolega kiirte k ja m vahelise nurga suurusest.

Lahendus 2. Olgu O korrapärase tetraeedri tipp ja väljugu kiired k, l ja m piki tetraeedri servi. Siis $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Kiired r ja s väljuvad tipust O mööda tahkude nurgapoolitajaid, mis on ühtlasi kõrgused. Olgu kiirte r ja s lõikepunktid tipu O vastastahu servadega vastavalt R ja S (joonis 11). Siis



Joonis 11



Joonis 12

$|OR| = |OS| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$, kus a on tetraeedri servapikkus, ja $|RS| = \dfrac{1}{2}a$, sest RS on tahu kesklõik. Siinusteoreemi põhjal

$$\frac{\frac{1}{2}a}{\sin\angle ROS} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sin\angle OSR} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sin\angle SRO}.$$

Kui kehtiks ülesande hüpotees, oleks $\angle ROS = 30^\circ$ ehk $\sin\angle ROS = \dfrac{1}{2}$. Seega siinusteoreemi võrrete põhjal $\sin\angle OSR = \sin\angle SRO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ehk $\angle OSR = \angle SRO = 60^\circ$. Kuid kolmnurka, mille nurkade suurused on 30°, 60° ja 60°, pole olemas.

Lahendus 3. Olgu K, L, M punktid vastavalt kiirtel k, l, m, mis asuvad punktist O võrdsel kaugusel $a \neq 0$. Olgu R, S ja T vastavalt kiire r lõikepunkt lõiguga KL, kiire s lõikepunkt lõiguga LM ning kiirte k ja m vahelise nurga poolitaja lõikepunkt lõiguga KM (joonis 12). Lisaks olgu θ kiirte r ja s vahelise nurga suurus.

Üldisust kitsendamata eeldame, et $\alpha \geqslant \beta$. Võrdhaarsetes kolmnurkades KOL ja LOM saame vastavalt $|OR| = a\cos\dfrac{\alpha}{2}$ ja $|OS| = a\cos\dfrac{\beta}{2}$. Võrdhaarses kolmnurgas KOM leiame aga $|KT| = a\sin\dfrac{\gamma}{2}$. Kuna RS on kolmnurga KLM kesklõik, siis $|RS| = |KT| = a\sin\dfrac{\gamma}{2}$. Koosinusteoreemist kolmnurgas ROS saame

$$a^2\sin^2\frac{\gamma}{2} = a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + a^2\cos^2\frac{\beta}{2} - 2a^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\theta.$$

Jagades läbi a^2-ga ning reorganiseerides liikmed, saame

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} - 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\theta + \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} - 1\right) = 0.$$

Kui kehtib ülesande hüpotees $\theta = \frac{\gamma}{2}$, saame siit θ sisseasendamisel ruutvõrrandi $\cos\frac{\gamma}{2}$ suhtes. Seega

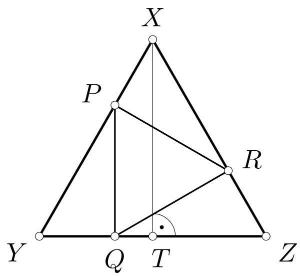
$$\begin{aligned}
\cos\frac{\gamma}{2} &= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\beta}{2} + 1} = \\
&= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\left(1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - \cos^2\frac{\beta}{2}\right)} = \\
&= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \pm \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \\
&= \cos\left(\frac{\alpha}{2} \mp \frac{\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

Kuna $\alpha \geqslant \beta$, siis $\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$ ja $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ on mõlemad 0° ja 180° vahel. Ka $\frac{\gamma}{2}$ on samas vahemikus, seega $\gamma = \alpha - \beta$ või $\gamma = \alpha + \beta$. See aga tähendab, et kiired k, l ja m on ühel tasandil. Seega ruumis ülesande hüpotees ei kehti.

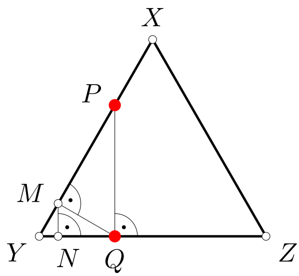
4. *Vastus*: jah.

Lahendus 1. Olgu vaadeldav kolmnurk XYZ. Näitame, et mingil küljel leidub punkt, mis on sama värvi oma projektsiooniga mõnele teisele küljele. Selleks võtame punktid P, Q ja R vastavalt külgedel XY, YZ ja ZX nii, et $\frac{|XP|}{|XY|} = \frac{|YQ|}{|YZ|} = \frac{|ZR|}{|ZX|} = \frac{1}{3}$ (joonis 13). Siis $PQ \perp YZ$, sest kui T tähistab külje YZ keskpunkti, siis $\frac{|TQ|}{|TY|} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{|XP|}{|XY|}$, mistõttu $PQ \parallel XT$. Seega punkt Q on punkti P projektsioon küljele YZ. Analoogselt on punkt R punkti Q projektsioon küljele ZX ja punkt P punkti R projektsioon küljele XY. Et vähemalt kaks punktidest P, Q ja R peavad olema ühte värvi, on mingi punkt ja tema projektsioon ühte värvi.

Olgu üldisust kitsendamata punkt P ja tema projektsioon Q mõlemad punased. Olgu veel M punkti Q projektsioon küljele XY ning N punkti M projektsioon küljele YZ (joonis 14). Kui M on punane, siis PQM on täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on punased. Kui N on punane, siis PQN on täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on punased. Kui Y on punane, siis on PQY täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on punased. Ülejäänud juhtudel on MNY täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on sinised.



Joonis 13

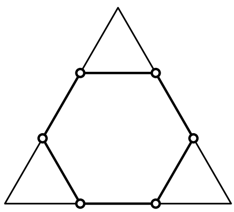


Joonis 14

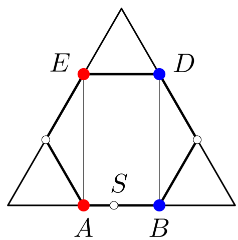
Lahendus 2. Jagame kolmnurga küljed kolmeks võrdseks osaks ja vaatleme nende jagamispunktide ühendamisel saadavat kuusnurka (joonis 15). Et algsest kolmnurgast on eemaldatud kolm temaga sarnast kolmnurka sarnasusteguriga $\frac{1}{3}$, on kuusnurga kõigi külgede pikkused võrdsed kolmandikuga algse kolmnurga küljepikkusest ja kõik nurgad on suurusega 120°. Seega on kuusnurk korrapärane.

Oletame, et kuusnurga mingid kaks vastastippu on ühte värvi. Kui ülejäänud nelja tipu hulgas leidub sama värvi tipp, siis see tipp moodustab koos kahe vaadeldava vastastipuga otsitava täisnurkse kolmnurga. Kui kõik ülejäänud neli tippu on teist värvi, siis suvalised kolm neist moodustavad otsitava täisnurkse kolmnurga.

Jääb vaadelda juht, kus iga kaks vastastippu on erinevat värvi. Siis leidub kaks naabertippu, mis on erinevat värvi, ühtlasi on ka nende vastastipud erinevat värvi. Üks paar neist erivärvilistest naabritest asub ühel kolmnurga küljel; olgu need tipud A ja B (punane ja sinine) ning nende vastastipud D ja E (sinine ja punane, joonis 16). Nurgad ABD ja BAE on täisnurgad, sest on kuusnurga ümberringjoone diameetrile toetuvad piirdenurgad. Valime küljelt AB suvalise punkti S, mis pole vaadeldava kuusnurga tipp. Kui S on punane, siis SAE on täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on puna-



Joonis 15



Joonis 16

sed; kui S on sinine, siis SBD on täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on sinised.

5. *Lahendus 1.* Valides tahvlilt arvud x ja y, kirjutatakse järgmisel sammul tahvlile arv $x + y + \text{SÜT}(x, y)$; valides tahvlilt arvu x paaris iseendaga, kirjutatakse järgmisel sammul tahvlile arv $x + x + \text{SÜT}(x, x)$ ehk $3x$.

Näitame, et hiljemalt teisel sammul tekib tahvlile kaks ühesugust arvu. Selleks oletame, et alguses on tahvlil arvud n ja m ning esimesel sammul tekkivad arvud $n + m + \text{SÜT}(n, m)$, $3n$ ja $3m$ on kõik erinevad. Valides arvu $n + m + \text{SÜT}(n, m)$ paaris iseendaga, saame teisel sammul arvu $3(n + m + \text{SÜT}(n, m))$ ehk $3n + 3m + 3\,\text{SÜT}(n, m)$. Valides aga arvud $3n$ ja $3m$, saame teisel sammul arvu $3n + 3m + \text{SÜT}(3n, 3m)$. Et $\text{SÜT}(3n, 3m) = 3\,\text{SÜT}(n, m)$, tekib sama arv kaks korda.

Lahendus 2. Olgu sammul s suurim tahvlil olev arv $m(s)$ ja tahvlil olevate arvude arv $n(s)$. Ilmselt $m(s+1) = m(s)+m(s)+\text{SÜT}(m(s), m(s)) = 3\cdot m(s)$, sest iga $x \leqslant m(s)$ ja $y \leqslant m(s)$ korral ka $\text{SÜT}(x, y) \leqslant m(s)$, mistõttu $x + y + \text{SÜT}(x, y) \leqslant 3 \cdot m(s)$. Seega iga s korral $m(s) = 3^s \cdot m(0)$.

Oletame, et ühelgi sammul ei teki tahvlile korduvaid arve. Siis iga s korral $n(s + 1) = \dfrac{n(s) \cdot (n(s) + 1)}{2} > \dfrac{(n(s))^2}{2}$. Et $n(0) = 2$, siis $n(1) = 3$ ja $n(2) = 6$ ning lihtne induktsioon näitab, et iga $s \geqslant 2$ korral $n(s) > 2 \cdot 3^{2^{s-2}}$. Seega $\dfrac{n(s)}{m(s)} > \dfrac{2}{m(0)} \cdot 3^{2^{s-2}-s}$. Eksponentfunktsioon kasvab kiiremini igast lineaarfunktsioonist, mistõttu s piiramatul kasvamisel saab $3^{2^{s-2}-s}$ suuremaks kui $\dfrac{m(0)}{2}$ ning $n(s) > m(s)$.

Kuna aga arvud on positiivsed, siis $n(s) \leqslant m(s)$. Vastuolu näitab, et mingil sammul peab tahvlile tekkima mitu ühesugust arvu.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_{\delta(n)}$ arvu n kõik jagajad kasvavas järjestuses. Siis

$$\sigma(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_{\delta(n)} \geqslant 1 + 2 + \ldots + \delta(n) = \frac{\delta(n)\cdot(\delta(n)+1)}{2} > \frac{(\delta(n))^2}{2}.$$

Lahendus 2. Positiivse täisarvu n iga positiivse jagaja d korral kehtib võrratus

$$d + \frac{n}{d} \geqslant 2 \cdot \sqrt{d \cdot \frac{n}{d}} = 2\sqrt{n},$$

kusjuures juhul $d \neq \frac{n}{d}$ ehk $d \neq \sqrt{n}$ on võrratus range. Kui n pole täisruut, siis liites kõik need võrratused jagajate $d < \sqrt{n}$ jaoks saame

$$\sigma(n) > \frac{\delta(n)}{2} \cdot 2\sqrt{n} = \delta(n) \cdot \sqrt{n},$$

sest arvu n iga jagaja esineb täpselt korra mingis paaris $(d, \frac{n}{d})$. Kui n on täisruut, saame analoogselt

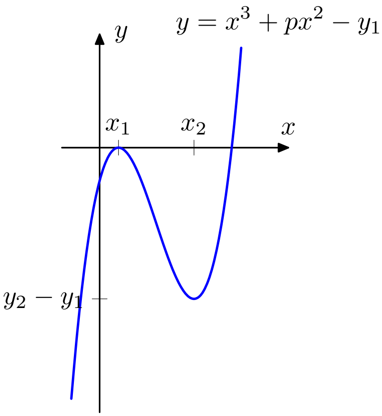
$$\sigma(n) \geqslant \frac{\delta(n)-1}{2} \cdot 2\sqrt{n} + \sqrt{n} = \delta(n) \cdot \sqrt{n}.$$

Teisalt, kui n pole täisruut, on arvu n jagajate paare $(d, \frac{n}{d})$, kus $d < \sqrt{n}$, kokku vähem kui $\sqrt{n}$, millest tuleneb võrratus $\sqrt{n} > \frac{\delta(n)}{2}$. Kui n on täisruut, on selliseid jagajate paare kokku ülimalt $\sqrt{n} - 1$, millest saame $\sqrt{n} - 1 \geqslant \frac{\delta(n)-1}{2}$, kust jällegi $\sqrt{n} > \frac{\delta(n)}{2}$. Kokkuvõttes

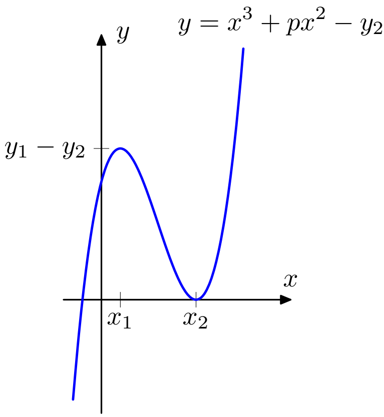
$$\sigma(n) \geqslant \delta(n) \cdot \sqrt{n} > \delta(n) \cdot \frac{\delta(n)}{2} = \frac{(\delta(n))^2}{2}.$$

2. *Vastus*: jah.

Lahendus 1. Funktsioonil $y = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$ on kaks erinevat nullkohta 0 ja 3 ning funktsioonil $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x-2)^2(x+1)$ samuti kaks erinevat nullkohta -1 ja 2.



Joonis 17

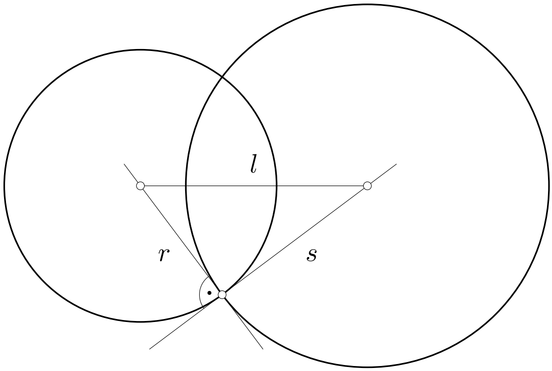


Joonis 18

Lahendus 2. Funktsioonil $y = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$ on kaks erinevat nullkohta -1 ja 2 ning funktsioonil $y = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ samuti kaks erinevat nullkohta -2 ja 1.

Lahendus 3. Vaatame suvalist funktsiooni kujul $y = x^3 + px^2$, kus $p \neq 0$. Selle funktsiooni tuletisel $y' = 3x^2 + 2px$ on kaks erinevat nullkohta x_1 ja x_2, sest diskriminant $4p^2$ on positiivne. Funktsiooni $y = x^3 + px^2$ väärtused kohtadel x_1 ja x_2 olgu vastavalt y_1 ja y_2. Siis funktsioonil $y = x^3 + px^2 - y_1$ on kohal x_1 kahekordne nullkoht (joonis 17), funktsioonil $y = x^3 + px^2 - y_2$ aga kohal x_2 kahekordne nullkoht (joonis 18). Kuna need pole kolmekordsed nullkohad, peab neil kuupfunktsioonidel olema kummalgi ka üks ühekordne nullkoht. Seega on mõlemal funktsioonil täpselt kaks erinevat nullkohta. Sama kehtib ka funktsioonide $y = \dfrac{4}{y_1 - y_2} \cdot \left(x^3 + px^2 - y_1\right)$ ja $y = \dfrac{4}{y_1 - y_2} \cdot \left(x^3 + px^2 - y_2\right)$ kohta, nende vabaliikmed aga erinevad täpselt 4 võrra (konstruktsiooni põhjal ilmselt $y_1 \neq y_2$). Seega võib võtta $a = \dfrac{4}{y_1 - y_2}$, $b = \dfrac{4p}{y_1 - y_2}$, $c = 0$ ja $d = -\dfrac{4y_1}{y_1 - y_2}$.

3. *Lahendus 1.* Vaatleme suvalist kaht ringjoont raadiustega r ja s ning keskpunktide vahelise kaugusega l. Lõikugu need kaks ringjoont täisnurga all. Puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega, mistõttu puutujate ristseisust nende ringjoonte lõikepunktis järeldub lõikepunkti tõmmatud raadiuste ristseis (joonis 19). Pythagorase teoreemist $r^2 + s^2 = l^2$. Ümberpöördult, kui kehtib $r^2 + s^2 = l^2$, siis $r + s > l$, mistõttu ringjooned lõikuvad; tingimuse $r^2 + s^2 = l^2$ tõttu on lõikepunkti tõmmatud raadiused risti, mistõttu on risti ka puutujad ehk ringjooned lõikuvad täisnurga all.



Joonis 19

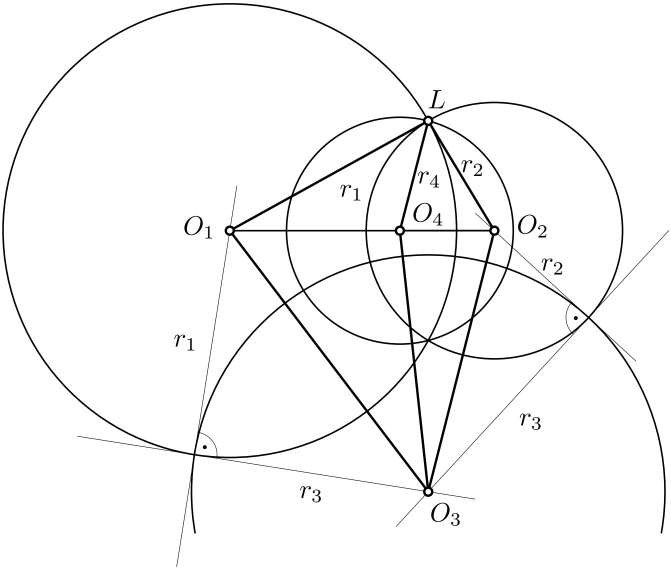
Olgu ringjoonte c_1, c_2, c_3 ja c_4 keskpunktid vastavalt O_1, O_2, O_3 ja O_4 ning raadiused vastavalt r_1, r_2, r_3 ja r_4. Olgu ringjoonte c_1 ja c_2 üks lõikepunkt L (joonis 20). Eelnevalt tõestatud kriteeriumi valguses tuleb ülesande lahendamiseks näidata, et kui $r_1^2 + r_3^2 = |O_3O_1|^2$ ja $r_2^2 + r_3^2 = |O_3O_2|^2$, siis $r_4^2 + r_3^2 = |O_3O_4|^2$.

Kuna $r_2^2 + r_3^2 = |O_3O_2|^2$, siis tõestatav võrdus on samaväärne võrdusega $r_4^2 + |O_3O_2|^2 = |O_3O_4|^2 + r_2^2$ ehk $r_4^2 - r_2^2 = |O_3O_4|^2 - |O_3O_2|^2$. Et ringjooned c_1, c_2 ja c_4 lõikuvad samas kahes punktis, asuvad nende ringjoonte keskpunktid O_1, O_2 ja O_4 lõikepunkte ühendava lõigu keskristsirgel. Kasutades nüüd koosinusteoreemi kõigepealt kolmnurkades LO_2O_4 ja $O_3O_2O_4$ ning seejärel kolmnurkades LO_2O_1 ja $O_3O_2O_1$, saame samaväärsuste ahela

$$
\begin{aligned}
& r_4^2 - r_2^2 = |O_3O_4|^2 - |O_3O_2|^2 \iff \\
& \quad \iff |LO_4|^2 - |LO_2|^2 = |O_3O_4|^2 - |O_3O_2|^2 \iff \\
& \quad \iff |LO_4|^2 - |LO_2|^2 - |O_2O_4|^2 = |O_3O_4|^2 - |O_3O_2|^2 - |O_2O_4|^2 \iff \\
& \quad \iff -2|LO_2||O_2O_4| \cos \angle LO_2O_4 = -2|O_3O_2||O_2O_4| \cos \angle O_3O_2O_4 \iff \\
& \quad \iff -2|LO_2||O_2O_1| \cos \angle LO_2O_1 = -2|O_3O_2||O_2O_1| \cos \angle O_3O_2O_1 \iff \\
& \quad \iff |LO_1|^2 - |LO_2|^2 - |O_2O_1|^2 = |O_3O_1|^2 - |O_3O_2|^2 - |O_2O_1|^2 \iff \\
& \quad \iff |LO_1|^2 - |LO_2|^2 = |O_3O_1|^2 - |O_3O_2|^2 \iff \\
& \quad \iff r_1^2 - r_2^2 = |O_3O_1|^2 - |O_3O_2|^2.
\end{aligned}
$$

Et $|O_3O_1|^2 = r_1^2 + r_3^2$ ja $|O_3O_2|^2 = r_2^2 + r_3^2$, siis saadud võrdus kehtib, mistõttu kehtib ka tõestatav võrdus.

Lahendus 2. Sarnaselt lahendusega 1 taandame ülesande väite võrduse $r_4^2 + |O_3O_2|^2 = |O_3O_4|^2 + r_2^2$ kehtivusele eeldustel $r_1^2 + r_3^2 = |O_3O_1|^2$ ja



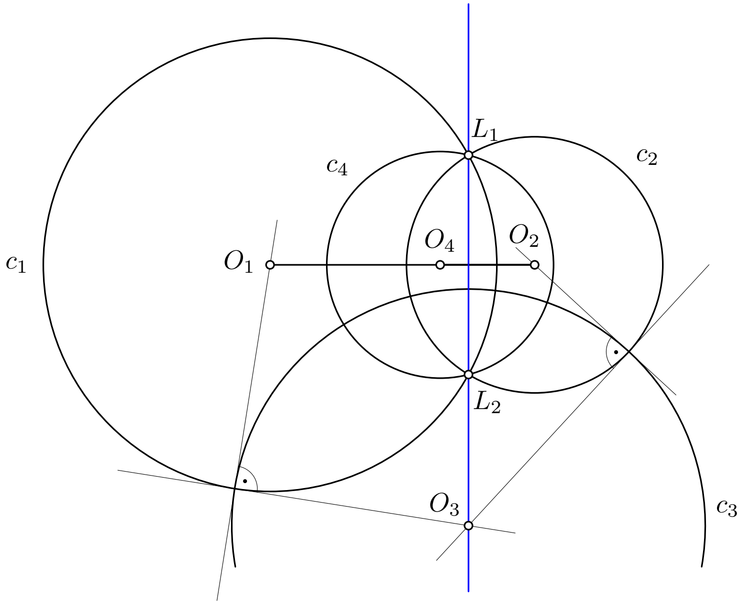
Joonis 20

$r_2^2 + r_3^2 = |O_3O_2|^2$. Võrdus $r_4^2 + |O_3O_2|^2 = |O_3O_4|^2 + r_2^2$ väljendab aga tingimust, et nelinurga $LO_2O_3O_4$ vastaskülgede pikkuste ruutude summad on võrdsed. See kehtib parajasti siis, kui nelinurga $LO_2O_3O_4$ diagonaalid on risti ehk $LO_3 \perp O_2O_4$. Et ringjooned c_1, c_2 ja c_4 lõikuvad samas kahes punktis, on nende ringjoonte keskpunktid O_1, O_2 ja O_4 ühel sirgel. Seega $LO_3 \perp O_2O_4$ parajasti siis, kui $LO_3 \perp O_2O_1$ ehk nelinurga $LO_2O_3O_1$ diagonaalid on risti. See aga kehtib parajasti siis, kui nelinurga $LO_2O_3O_1$ vastaskülgede pikkuste ruutude summad on võrdsed ehk

$$r_1^2 + |O_3O_2|^2 = r_2^2 + |O_3O_1|^2.$$

Eeldustest $r_1^2 + r_3^2 = |O_3O_1|^2$ ja $r_2^2 + r_3^2 = |O_3O_2|^2$ tulenevalt see võrdus kehtib, seega peab paika ka tõestatav võrdus.

Lahendus 3. Kasutame samu tähistusi nagu eelmistes lahendustes, lisaks tähistame ringjoonte c_1, c_2 ja c_4 lõikepunktid L_1 ja L_2. Et ringjoon c_3 lõikub ringjoonega c_1 täisnurga all ning puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega, siis ringjoone c_3 raadius, mis on tõmmatud ringjoonte c_3 ja c_1 lõikepunkti, on ringjoone c_1 puutujalõik. Seega punkti O_3 potents ringjoone c_1 suhtes on r_3^2. Analoogselt on punkti O_3 potents ka ringjoone c_2 suhtes r_3^2. Järelikult asub O_3 ringjoonte c_1 ja c_2 radikaalteljel L_1L_2 (joonis 21). Kuna ringjoon c_4 läbib ringjoonte c_1 ja c_2 lõikepunkte, on sirge L_1L_2 ühtlasi ringjoonte c_1 ja c_4 radikaaltelg. Seega punkti O_3 potents

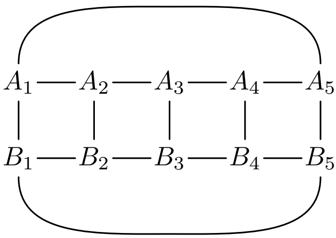


Joonis 21

ringjoonte c_1 ja c_4 suhtes on sama ehk r_3^2, mistõttu ringjoone c_3 raadius, mis on tõmmatud ringjoonte c_3 ja c_4 lõikepunkti, on ringjoone c_4 puutujalõik (et $|O_3L_1| \cdot |O_3L_2| = r_3^2$, siis r_3 on suuruselt $|O_3L_1|$ ja $|O_3L_2|$ vahel, mis tähendab, et ringjooned c_3 ja c_4 tõesti lõikuvad). Järelikult lõikuvad ringjooned c_3 ja c_4 täisnurga all.

4. *Vastus*: a) ei; b) ei.

Olgu riigis 10 linna. Olgu 5 linna A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ühendatud tsükliliselt ning ülejäänud 5 linna B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 samuti ühendatud tsükliliselt. Lisaks olgu ühendatud omavahel A_i ja B_i iga $i = 1, 2, 3, 4, 5$ korral (joo-



Joonis 22

nis 22). Siis iga linn kuulub tsüklisse pikkusega 5 ja ka tsüklisse pikkusega 4 (nendeks tsükliteks on $A_i \to A_{i+1} \to B_{i+1} \to B_i \to A_i$ iga $i = 1, 2, 3, 4$ korral). Samas puuduvad tsüklid pikkusega 3.

5. *Vastus:* 2016.

Olgu ribale kirjutatud arvud järjekorras $a_1, a_2, \ldots, a_{125}$. Ülesande tingimuse kohaselt kehtib iga $i = 1, 2, \ldots, 123$ korral võrratus $a_{i+1} > \frac{a_i + a_{i+2}}{2}$, mis aga on samaväärne võrratusega $a_{i+1} - a_i > a_{i+2} - a_{i+1}$. Tähistades $d_i = a_{i+1} - a_i$, kehtib niisiis $d_1 > d_2 > \ldots > d_{124}$. Olgu a_m suurim ribale kirjutatud arv; siis $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ on positiivsed ja $d_m, d_{m+1}, \ldots, d_{124}$ negatiivsed. Kui vahede $d_1, d_2, \ldots, d_{124}$ seas esineks nii 1 kui ka -1, siis oleksid need mingid järjestikused vahed $d_i = 1$ ja $d_{i+1} = -1$, kust järeldub $a_{i+1} = a_{i-1}$. Vastuolu eeldusega, et ribale kirjutatud arvud on erinevad, näitab, et kas 1 või -1 vahede seas puudub. Üldisust kitsendamata puudugu 1 (kui puudub -1, võime muuta ribale kirjutatud arvude nummerduse vastupidiseks). Siis

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 + (d_1 + d_2 + \ldots + d_{m-1}) \geqslant 1 + (m + (m-1) + \ldots + 2) = \\ &= 1 + 2 + \ldots + m, \\ a_m &= a_{125} - (d_m + d_{m+1} + \ldots + d_{124}) \geqslant 1 + (1 + 2 + \ldots + (125 - m)) \ . \end{aligned}$$

Arvudest m ja $125 - m$ üks on vähemalt 63, mistõttu eelnevatest võrratustest järeldub $a_m \geqslant 1 + 2 + \ldots + 63$.

Teisalt, võttes $a_1 = 1$ ning $d_i = 64 - i$, $1 \leqslant i \leqslant 62$, ja $d_i = 62 - i$, $63 \leqslant i \leqslant 124$, on riba suurim arv a_{63} võrdne summaga $1 + 2 + \ldots + 63$ ning kõik kirjutatavad arvud on positiivsed, sest $1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{63}$ ja

$$a_{63} > a_{64} > \ldots > a_{125} = (1 + 2 + \ldots + 63) - (1 + 2 + \ldots + 62) = 63.$$

Kõik need arvud on ka erinevad, sest iga $i = 64, 65, \ldots, 125$ korral

$$\begin{aligned} a_i &= (1 + 2 + \ldots + 63) - (1 + 2 + \ldots + (i - 63)) = \\ &= (i - 62) + (i - 61) + \ldots + 63 = \\ &= a_{127-i} - 1, \end{aligned}$$

mistõttu a_i on suuruselt a_{126-i} ja a_{127-i} vahel.

Kokkuvõttes on suurim ribale kirjutatud arv $1 + 2 + \ldots + 63$ ehk $\frac{63 \cdot 64}{2}$ ehk 2016.

Hindamisskeemid

1. *(Evely Kirsiaed)*

Lahenduse järgnevalt märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Mainitud, et arv jagub 99-ga, kui ta jagub 9-ga ja 11-ga: 1 p
- Põhjendatud jaguvus 9-ga: 3 p
- Ammendavalt põhjendatud jaguvus 11-ga: 3 p

Enamlevinud punktikaotused kolmandas osas olid järgmised:

- 11-ga jaguvuse reegel oli sõnastatud vigaselt (1 p);
- 11-ga jaguvust põhjendati analoogiliselt žürii lahendusele 2, kuid põhjendus oli puudulik, näiteks ei märgitud, et kõik 100 astmed annavad 11-ga jagades jäägi 1 (1–2p).

2. *(Uve Nummert)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Õige lahendus, kuid läbi tehtud konkreetsete kõrguse ja lifti kiiruse arvväärtustega: 6 p
- Põhiarvutused õigesti läbi tehtud, ent protsent leitud valesti: 5 p
- Leitud õigesti, kui palju maad on liftil veel jäänud allasuunas läbida, kui sportlane jõudis üles ja hakkab alla jooksma – ent edasi läheb arutlus rappa: 3 p
- Tehtud lifti ja sportlase kiiruste erinevustest vale järeldus nende üles ja alla liikumisele kulunud aegade erinevuste kohta: 1 p

3. *(Janno Veeorg)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et sirged AD, BQ ja CR lõikuvad kolmes erinevas punktis: 2 p

  Sealhulgas:

  - Näidatud, et kolmnurk ABC ei saa olla võrdhaarne: *1 p*
- Näidatud, et sirgetest AD, BQ ja CR moodustuv kolmnurk on võrdkülgne: 5 p

Lahenduse eest, mis ei sobi kõigi juhtude jaoks (näiteks kui kolmnurk ABC on nürinurkne), võeti 1 punkt maha.

4. *(Reimo Palm)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Strateegia kirjeldamata või strateegia on mustale kaotav: 0 p
- Esitatud strateegia, mis garanteerib mustale ainult viigi: 3 p
- Paistab õige strateegia, aga kirjeldus liiga ebamäärane või lünklik: 5 p
- Esitatud musta jaoks võitev strateegia: 7 p

5. *(Aleksandr Šved)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Toodud ainult õige arvude piirkond: 0 p
- Toodud ainult õige vastus: 0 p
- Toodud nii õige arvude piirkond kui ka antud õige vastus: 1 p
- Esineb algarvude kokkulugemine üldisel kujul: 1 p
- Toodud õige arvude piirkond, õige vastus ning algarvude kokkulugemine on üldisel kujul: 2 p
- Täielik lahendus tõestusega: 7 p

Iga suurema vea kohta on võetud maha 1 punkt.

Eesti LXIII matemaatikaolümpiaad

2. aprill 2016 Lõppvoor **10. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Elts Abel)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kirjutatud otsitav arv ja saadud arv kümnendsüsteemis: 1 p
- Leitud kahte arvu siduv õige võrdus ja seda lihtsustatud: 2 p
- Leitud võrduses esineva(te) muutuja(te) kõikvõimalikud väärtused koos selgitustega: 3 p
- Moodustatud otsitavad arvud: 1 p

Kui oli saadud vale võrdus, aga leitud sellele vastavad arvud õiget tehnikat kasutades, anti 3 punkti.

Mõnedes töödes oli lisaks õigetele arvudele pakutud vastuseks ka negatiivseid arve. Negatiivsetel arvudel positsioonilist esitust tavamõistes ei leidu, mistõttu ei räägita ka numbrite arvust (arvu „kohalisusest“) ja negatiivsed arvud selles ülesandes vastuseks ei sobi. Punkte negatiivsete arvude vaatlemise eest maha ei võetud.

2. *(Kalle Kaarli)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Ei ole leitud ühtegi lahendit: 0 p
- Leitud ainult lahendid $(0, 1)$ ja $(1, 0)$: 1 p
- Leitud kõik lahendid, kuid arvestatavaid põhjendusi pole: 2 p
- Leitud kõik lahendid, kuid põhjendustes on olulised lüngad: 3–4 p
- Ülesanne põhimõtteliselt lahendatud, kuid arutlustes on väiksenad kergesti kõrvaldatavad lüngad: 6 p
- Ülesanne laitmatult lahendatud: 7 p

3. *(Oleg Košik)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Lahendus ainult juhu $n = 3$ jaoks: 0 p
- Lahendus paarituarvulise n jaoks: 2 p

  Sealhulgas:
  - Tähelepanek, et sobib korrapärane hulknurk: *1 p*
  - Selgitus, miks korrapärane hulknurk vastab ülesande tingimutele: *1 p*

- Lisaks näidatud, et kui kõrguste lõikepunkt asub hulknurga sisepiirkonnas, siis n on paaritu: 3 p
- Esitatud õige konstruktsioon suvalise n-nurga jaoks, kuid puudub selgitus, miks lõikuvad kõik kõrgused täisnurga tipus: 5 p

4. *(Mark Gimbutas)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Nimetame *nullseisuks* olukorda, kus igal real ja igal veerul on ainult üks vanker.

- Aru saadud, et Miku peab mängu alguses vankrid asetama nullseisu: 1 p
- Mainitud, et Manni peab nullseisu korral käima nii, et üks vanker jääb ääre ja vastliigutatud vankri vahele: 3 p

  Sealhulgas:
  - Mainitud, et Manni peab nullseisu korral käima vankri teise vankri kõrvale: *1 p*
- Aru saadud, et pärast Manni eelkirjeldatud käiku peab Miku taastama nullseisu: 3 p

  Sealhulgas:
  - Mainitud mittekaotav strateegia, et kui üks samm pärast nullseisu sattuvad kaks vankrit teineteise tule alla, siis ühe nendest vankritest saab liigutada vabanenud reale või veerule ja sellega taastada nullseis: *2 p*
  - Mainitud olukord, kus kas kolmanda vankri viimine kahe vankri vahele või tule alla sattunud vankri liigutamine teda sihtiva vankriga samal joonel viib võiduni ülejärgmisel käigul: *1 p*

5. *(Ahti Peder)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Näidatud, et 1!-d on kustutatud: 1 p
- Näidatud, et 2!-d on kustutatud: 1 p
- Näidatud, et 3!-d on kustutatud: 1 p
- Näidatud, et alates 7. reast on kõik kustutatud: 1 p
- Näidatud, et tahvlile alles jäänud 6!-de arv on 2: 1 p
- Näidatud, et tahvlile alles jäänud 5!-de arv on 4: 1 p
- Näidatud, et tahvlile alles jäänud 4!-de arv on 4: 1 p

Ülesanne osutus oodatust lihtsamaks. Mittetäispunktide saamine olid enajmaolt põhjustatud valest faktoriaali leidmisest.

Hindamisskeemid

1. *(Triinu Veeorg)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antavad punktid summeeriti.

- Saadud kuju $(3^{1008}+1)(3^{504}+1)(3^{252}+1)(3^{126}+1)(3^{63}+1)(3^{63}-1)$: 2 p
- Leitud arvu $(3^{1008}+1)(3^{504}+1)(3^{252}+1)(3^{126}+1)$ suurim tegur, mis on kahe aste: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud, et kõik korrutise tegurid jaguvad 2-ga, aga mitte 4-ga: *1 p*
  - Tulemus korrektselt põhjendatud : *1 p*
- Leitud suurim kahe aste, millega $(3^{63}+1)(3^{63}-1)$ jagub: 2 p

  Sealhulgas:
  - Leitud, et $3^{63}+1$ jagub 4-ga, aga mitte 8-ga ja $3^{63}-1$ jagub 2-ga, aga mitte 4-ga: *1 p*
  - Tulemus korrektselt põhjendatud : *1 p*

  Saadud õige vastus: 1 p

2. *(Maksim Ivanov)*

Žürii lahenduse 1 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Avaldatud, mitu ajaühikut kulutavad kõik töölised kokku, töötades ülesandes kirjeldatud viisil: 2 p
- Avaldatud, mitu ajaühikut kulutavad kõik töölised kokku koos töötades: 1 p
- Koostatud (ja suhte leidmisel ka rakendatud) võrdus lähtuvalt sellest, et töötades ülesandes kirjeldatud viisil saavad töölised kogu töö tehtud: 2 p
- Leitud ülesandes küsitud suhe: 2 p

Kõik õpilased, kes lahendasid ülesande vastavalt žürii lahendusele 2, said 7 punkti.

3. *(Andres Põldaru)*

Žürii lahenduse 3 osade eest antud punktid summeeriti:

- Konstrueeritud kolmnurk ROS: 1 p

- Leitud kolmnurga ROS külgede pikkused: 2 p
- Rakendatud koosinusteoreem ja asendus $\theta = \frac{\gamma}{2}$: 2 p
- Koosinusteoreemi abil põhjendatud, et lahendit alati ei leidu (kas väärtuste proovimise või γ avaldamise teel): 2 p

Kui kolmnurga ROS asemel kasutati sfäärilist kolmnurka ja sfäärilist koosinusteoreemi, jaotati punkte analoogselt.

Tööd, mis vastasid žürii lahendustele 1 ja 2, said kõik 7 punkti või väikse lünga puhul 6 punkti.

Ainult kahemõõtmelise juhu vaatlemise eest punkte ei antud.

4. *(Urve Kangro)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et kolmnurga küljele tõmmatud ristlõigu otsad ei saa olla sama värvi: 2 p
- Näidatud, et leidub kolmnurk, mille tipud asuvad algse kolmnurga külgedel ja küljed on risti esialgse kolmnurga külgedega: 3 p

  Sealhulgas:
  - Ainult väite eest, et selline kolmnurk leidub: *1 p*
- Järeldatud, et selles kolmnurgas peab kaks tippu olema ühte värvi ja saadud vastuolu: 2 p

Esines ka korrapärast kuusnurka kasutavaid lahendusi, need said reeglina täispunktid.

Mitmetes lahendustes kasutati vaikimisi eeldust, et kolmnurga külgedel on lõplik arv punkte, mis on vale. Sellistes ülesannetes ei saa kasutada väiteid nagu näiteks:

- kõik punktid peavad olema värvitud vaheldumisi üht ja teist värvi;
- oletame, et 2 kõrvutiasuvat punkti on ühte värvi;
- olgu ühel küljel paaritu arv punkte.

Püüti kasutada ka tõenäosust, aga kuna siin on juhte lõpmatu arv, siis tuleks kõigepealt defineerida, kuidas me neid mõõdame, ja tegelikult pole siin tegu juhuslikkusega, vaid me peame näitama, et kõikvõimalike värvimiste, ka kõige „ebasoodsamate“ puhul leidub ühte värvi tippudega täisnurkne kolmnurk.

5. *(Raul Kangro)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Õige tähelepanek selle kohta, palju igal sammul arve tahvlile tekib, kuid rohkem kasulikke järeldusi pole: 1 p
- Esimene samm üldkujul (suvaliste tahvlil olevate arvude a ja b korral) õige, teisel sammul vead: 2 p
- Korrektne lahendus: 7 p

Ülesanne osutus väga lihtsaks, enamus osalejatest sai täispunktid žürii esimesele näidislahendusele vastava lahenduse eest.

Hindamisskeemid

1. *(Aleksei Lissitsin)*

Skeem 1. Tüüpiliste žürii lahendusele 1 vastavate mõttekäikude eest anti punkte järgmiselt.

- Idee paigaldada kõik tegurid kasvavas järjekorras: 2 p
- Täislahendus: 7 p

Skeem 2. Žürii lahenduse 2 järgnevate osade eest antavad punktid summeeriti.

- Tõestatud, et $\delta(n)\sqrt{n} < \sigma(n)$: 4 p
- Tõestatud, et $\sqrt{n} > \dfrac{\delta(n)}{2}$: 3 p

Kui juhtumiga, kus n on täisruut, ei olnud arvestatud, siis lahendus sai 1 võrra vähem punkte.

Skeem 3. Lisalahenduse 3 (selle sammud on toodud siin skeemis) alamosade eest punktid summeeriti.

- On toodud valem $\delta(n) = \prod\limits_i (a_i + 1)$. 1 p
- On toodud valem $\sigma(n) = \prod\limits_i \sum\limits_{k=0}^{a_i} p_i^k$. 2 p
- On idee tõestada võrratus kordajate kaupa: nt $p_i \geqslant 3$ korral $\sum\limits_{k=0}^{a_i} p_i^k \geqslant (a_i + 1)^2$. 1 p
- Ülemine võrratus on tõestatud $p_i \geqslant 3$ korral. 2 p
- On tõestatud võrratus $\sum\limits_{k=0}^{a_i} 2^k > \dfrac{1}{2}(a_i + 1)^2$ 1 p

Kui skeemide järgi punkte ei saanud, kuid võrratus oli tõestatud algarvuliste n puhul, siis anti 1 punkt.

2. *(Mart Abel)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Näide konkreetsetest reaalarvudest a, b, c ja d, mille korral ülesande tingimused on täidetud: 7 p

  Sealhulgas allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti:

- Tähele pandud, et mõlema polünoomi üks nullkoht peab olema ka tuletise nullkohaks ning lokaalseks ekstreemumiks, leitud polünoomi tuletis ja selle nullkohad (a, b, c ja d kaudu): *1 p*
- Näidatud, et eksisteerib selline kuuppolünoom, mille väärtuste vahe lokaalsetel ekstreemumitel on täpselt 4: *3 p*
- Näidatud, et kui eelpool kirjeldatud polünoom eksisteerib, siis on ka ülesandes nõutud polünoomid olemas: *3 p*

Tüüpviga oli see, et lihtsalt väideti, et leidub selline kuuppolünoom, mille lokaalse maksimumi ja lokaalse miinimumi vahe on täpselt 4. Sellise polünoomi eksisteerimist ei saa aga lihtsalt „joonise pealt välja lugeda“ või öelda, et „selline polünoom eksisteerib“ ilma, et toodaks konkreetne näide vähemalt ühest sellisest polünoomist.

3. *(Joonas Kalda)*

Skeem 1. Žürii lahenduste 1 ja 2 alamosade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et ristuvate ringjoonte raadiused ja puutujalõigud lõikepunktides ühtivad: 1 p
- Näidatud, et O_1, O_2 ja O_4 asuvad ühel sirgel, kus O_i on ringjoone c_i keskpunkt: 1 p
- Märgatud, et piisab seose $r_3^2 + r_4^2 = |O_3O_4|^2$ kehtivuse näitamisest, kus r_i on ringjoone c_i raadius: 1 p

Skeem 2. Tüüpiliste lahenduste eest vastavalt žürii lahendusele 3 anti punkte järgnevalt.

- Näidatud, et ristuvate ringjoonte raadiused ja puutujalõigud lõikepunktides ühtivad: 1 p
- Täislahendus, kus pole näidatud, et ristuvate ringjoonte raadiused ja puutujalõigud lõikepunktides ühtivad: 6 p
- Täislahendus: 7 p

Mitmed õpilased märkisid enda töös, et ringjoone c_3 keskpunkt asub ringjoonte c_1 ja c_2 ühisel välisel puutujal. Üldjuhul see aga nii ei ole.

4. *(Erik Paemurru)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Toodud näide ainult b-osa jaoks: 2 p
- Toodud näide mõlema osa jaoks: 7 p

Esines veel üks lihtne näide a-osa jaoks, kus defineeriti viisnurk $ABCDE$, linnad F ja G ning ühendati otseteedega tsükliliselt viisnurk ja seejärel linnad FA, FC, GC ja GE.

Kokku esines töödes a-osa jaoks üheksa sisuliselt erinevat joonist.

5. *(Kairi Hennoch)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Tähele pandud, et vahed peavad kahanema, ning selle põhjal väidetud, et vahed peavad olema $124, 123, \ldots, 1$: 1 p

Punkte võeti maha põhjenduste puudulikkuse eest.