Lõppvoor 2015

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

4. aprill 2015 | Lõppvoor | **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Kas leidub naturaalarv, millest esimese kolme numbri kustutamisel saadav arv on täpselt k korda väiksem esialgsest arvust, kui

a) $k = 2015$?

b) $k = 2016$?

2. Leia kõik võimalused asendada võrduses

$$VIINI + VALSS = LANNER$$

tähed numbritega, nii et võrdus oleks tõene. Samale tähele vastab sama number, erinevatele tähtedele vastavad erinevad numbrid.

3. Rööpküliku $ABCD$ tipu A juures on nurk suurusega 60°. Tippudest B ja D tõmmatud nurgapoolitajad lõikavad vastavalt külgi AD ja BC vastavalt punktides E ja F. On teada, et $BEDF$ on romb. Millises suhtes jaotab lõikude AC ja BE ühine punkt lõigu BE?

4. Siimul on täring, mille tahkudel on arvud 1 kuni 6, ning ruuduline paber, mille ruudud on parajasti täringu tahu suurused. Siim värvib ühe ruudu punaseks ja asetab täringu paberile nii, et selle alumine tahk, kus on arv 1, katab täpselt punase ruudu. Nüüd hakkab Siim täringut sammhaaval veeretama tahult tahule, nii et iga sammu järel katab täringu alumine tahk paberil jälle täpselt ühe ruudu. Leia vähim arv, mitu sammu (täringu veeretamist mingilt tahult naabertahule üle nende ühise serva) peab Siim tegema, et täring asetuks punasele ruudule vähemalt korra iga oma tahuga ning jõuaks lõpuks punasele ruudule tagasi nii, et tema alumisel tahul on taas arv 1?

5. Jüri avastab raamatukogus, et ühest köitest on hulk järjestikuseid lehti välja rebitud. Leia puuduvate lehekülgede numbrid, kui on teada, et nende leheküljenumbrite summa on 452 ja trükk on kahepoolne.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

4. aprill 2015 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised 1-st suuremad naturaalarvud n, mille korral $\frac{1}{n}$ ja $\frac{1}{n+1}$ avalduvad lõpliku kümnendmurruna.

2. Olgu x, y, z sellised reaalarvud, et $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ ja $xyz = 3$. Leia $x^3 + y^3 + z^3$.

3. Kolmnurga ABC küljel BC valitakse selline punkt P, et $|BP| : |PC| = 2 : 1$. Tõesta, et lõik AP poolitab kolmnurga ABC tipust C tõmmatud mediaani.

4. Tahvlile kirjutatakse ühte ritta naturaalarvud 1 kuni n ja nende alla samad arvud vastupidises järjestuses. Tähistame kohakuti kirjutatud arvude korrutiste summat $S(n)$. (Näiteks $S(6) = 1\cdot6+2\cdot5+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot2+6\cdot1 = 56$.)

Tõesta, et iga naturaalarvu n korral

$$\begin{aligned} S(n+1) - S(n) &= 1 + 2 + \ldots + n + (n+1), \\ S(n+1) + S(n) &= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2. \end{aligned}$$

5. Kas leidub selline täisnurkne kolmnurk, mille kõigi külgede pikkused on täisarvud ning mingi ühe külje pikkus on teise külje pikkuse ruut?

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

4. aprill 2015 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised positiivsed täisarvud n, mis esituvad mingi algarvu positiivse täisarvulise astmena ja mille korral võrrandil

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = n$$

leidub täisarvuline lahend.

2. a) Tiinal on vihikusse kirjutatud mingi positiivne täisarv. Matemaatika harjutamiseks kirjutab ta iga päev sellesse vihikusse juurde eelmise arvu numbrite korrutise. Tõesta, et alates mingist päevast kirjutab ta üht ja sama arvu.

b) Kas sama väide kehtib sõltumata algsest arvust ka juhul, kui Tiina korrutab iga kord eelmise arvu numbrite korrutise veel ka 2-ga?

3. Kas ukseavast mõõtmetega 99 cm × 190 cm mahub läbi kapp mõõtmetega 250 cm × 195 cm × 26 cm?

4. Kui palju on selliseid 10-kohalisi naturaalarve, mis jaguvad 99-ga ja mille kõik numbrid on erinevad?

5. Kolmnurga pindala S ja ümberringjoone raadius r rahuldavad tingimust $S \geqslant r^2$. Tõesta, et selle kolmnurga kõik nurgad on suuremad kui 30°, kuid ükski nurk pole suurem kui 90°.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

4. aprill 2015 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et võrrandil $x^2+y^3 = z^{2015}$ on lõpmata palju lahendeid positiivsetes täisarvudes.

2. Leia kõik funktsioonid f, mis on määratud kõigi reaalarvude hulgal ja omandavad reaalarvulisi väärtusi ning rahuldavad kõigi reaalarvude x ja y korral seost
$$f(f(xy)) = |x|f(y) + 3f(xy).$$

3. Olgu täisnurkse kolmnurga ümberringjoone raadius R ja siseringjoone raadius r. Tõesta, et $R \geqslant \left(1+\sqrt{2}\right) r$.

4. Olgu $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sellised erinevad reaalarvud, et $0 < |x_0| \leqslant \ldots \leqslant |x_{n-1}|$. Tõesta, et hulga $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ kõigi alamhulkade elementide summad on mingi aritmeetilise jada 2^n järjestikust liiget mingis järjestuses parajasti siis, kui arvud $|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n-1}|$ suhtuvad nagu $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$.

Märkus. Üheelemendilise hulga elementide summa on selle hulga ainus element; tühja hulga elementide summaks loetakse 0.

5. Tõesta, et
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2015} > \frac{13}{2}.$$

LXII Олимпиада Эстонии по математике

4 апреля 2015 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Существует ли натуральное число, при удалении первых трёх цифр которого получается ровно в k раз меньшее число, если

а) $k = 2015$?

б) $k = 2016$?

2. Найти все способы заменить в равенстве

$$VIINI + VALSS = LANNER$$

буквы цифрами так, чтобы равенство оказалось верным. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным разные.

3. Величина угла при вершине A параллелограмма $ABCD$ равна 60°. Биссектрисы, проведённые из вершин B и D, пересекаются со сторонами AD и BC соответственно в точках E и F. Известно, что $BEDF$ ромб. В каком отношении точка пересечения отрезков AC и BE делит отрезок BE?

4. У Сени есть игральный кубик, на гранях которого записаны числа от 1 до 6, и клетчатая бумага, клетки которой по величине равны грани кубика. Сеня раскрашивает одну клетку в красный цвет и располагает кубик на бумаге так, что его нижняя грань с числом 1 точно покрывает красную клетку. Затем Сеня начинает шаг за шагом переваливать кубик с грани на грань так, что после каждого хода нижняя грань кубика снова точно покрывает одну клетку бумаги. Найти наименьшее количество шагов (переваливаний кубика с одной грани на соседнюю через их общее ребро), необходимых для того, чтобы кубик лёг на красную клетку каждой своей гранью по крайней мере один раз и вернулся в конце на красную клетку так, чтобы на нижней грани снова было число 1.

5. Находясь в библиотеке, Жора обнаружил, что из одного тома вырвано некоторое число идущих подряд листов. Найти номера отсутствующих страниц, если известно, что сумма этих номеров равна 452, а на листах напечатано с двух сторон.

LXII Олимпиада Эстонии по математике

4 апреля 2015 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все натуральные числа n большие одного, при которых $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ представимы в виде конечных десятичных дробей.

2. Даны такие действительные числа x, y, z, что $x+y+z=1$, $x^2+y^2+z^2=11$ и $xyz=3$. Найти $x^3+y^3+z^3$.

3. На стороне BC треугольника ABC выбрана такая точка P, что $|BP|:|PC|=2:1$. Доказать, что отрезок AP делит проведённую из вершины C медиану треугольника ABC пополам.

4. На доске в ряд друг за другом записываются натуральные числа от 1 до n, а под ними те же самые числа, но в обратном порядке. Обозначим сумму произведений записанных друг над другом чисел через $S(n)$. (Например, $S(6)=1\cdot6+2\cdot5+3\cdot4+4\cdot3+5\cdot2+6\cdot1=56$.)

Доказать, что для каждого натурального числа n выполняются равенства

$$\begin{aligned} S(n+1)-S(n) &= 1+2+\ldots+n+(n+1), \\ S(n+1)+S(n) &= 1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2. \end{aligned}$$

5. Существует ли прямоугольный треугольник, длины всех сторон которого являются целыми числами, причём длина какой-то одной стороны равна квадрату длины другой стороны?

LXII Олимпиада Эстонии по математике

4 апреля 2015 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие целые положительные числа n, которые являются положительной целочисленной степенью какого-либо простого числа, и при которых у уравнения
$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = n$$
существует целочисленное решение.

2. а) В тетради Дины записано какое-то целое положительное число. Чтобы упражняться в математике, она каждый день будет записывать в эту тетрадь произведение всех цифр предыдущего числа. Доказать, что начиная с некоторого дня она будет записывать одно и то же число.

б) Верно ли такое же утверждение независимо от начального числа, если Дина будет записывать произведение цифр предыдущего числа, умноженное еще и на 2?

3. Пройдёт ли шкаф размером 250 см × 195 см × 26 см в дверной проём размером 99 см × 190 см?

4. Сколько среди 10-значных натуральных чисел таких, которые делятся на 99 и в записи которых все цифры различны?

5. Площадь треугольника, S, и радиус описанной вокруг него окружности, r, удовлетворяют условию $S \geqslant r^2$. Доказать, что все углы этого треугольника больше, чем 30°, но ни один угол не больше, чем 90°.

LXII Олимпиада Эстонии по математике

4 апреля 2015 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что у уравнения $x^2 + y^3 = z^{2015}$ бесконечно много решений в положительных целых числах.

2. Найти все такие функции f, определённые на множестве всех действительных чисел и принимающие действительные значения, что при всех действительных числах x и y выполняется равенство

$$f(f(xy)) = |x|f(y) + 3f(xy).$$

3. Радиус описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности равен R, а радиус вписанной в него окружности равен r. Доказать, что $R \geqslant \left(1+\sqrt{2}\right) r$.

4. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ такие различные действительные числа, что $0 < |x_0| \leqslant \ldots \leqslant |x_{n-1}|$. Доказать, что суммы элементов всех подмножеств множества $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ в каком-то порядке представляют собой 2^n последовательных членов какой-то арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда числа $|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n-1}|$ соотносятся как $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$.

Примечание. Сумма элементов множества, в котором один элемент, равна этому элементу; сумма элементов пустого множества считается равной нулю.

5. Доказать, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2015} > \frac{13}{2}.$$

LXII Estonian Mathematical Olympiad

April 4, 2015 Final round **Grade 9**

Working time: 5 hours.
A correct and sufficiently explained solution to each problem is worth 7 points.
Calculators are not permitted.

1. Does there exist a natural number such that dropping the first three digits from it leads to exactly k times smaller number, where

a) $k = 2015$?

b) $k = 2016$?

2. Find all possibilities to substitute digits for letters in the equality

$$VIINI + VALSS = LANNER$$

in such a way that the equality becomes true. The same digit must correspond to all occurrences of the same letter and different digits must correspond to different letters.

3. The size of the angle at vertex A of parallelogram $ABCD$ is 60°. The bisectors of angles at vertices B and D intersect sides AD and BC, respectively, at points E and F, respectively. Given that $BEDF$ is a rhombus, find the ratio of the lengths of the parts of line segment BE into which line segment AC divides it.

4. Simon has a dice with faces containing numbers from 1 to 6, and a squared paper whose squares equal by size to the faces of the dice. Simon paints one square red and places the dice on the paper with the face containing number 1 down and covering the red square entirely. Simon starts rolling the dice step-by-step from face to face in such a way that, after each step, the downwards face of the dice covers an entire square of the paper again. Find the smallest number of steps (i.e., rollings of the dice from a face to its neighbouring face over their common edge) that Simon must complete in order to have the dice laying on the red square at least once with each of its faces down and finally returning to the original placement on the red square with the face containing number 1 down.

5. George discovers in the library that, from a book, some number of consecutive pages have been pulled out. Find the page numbers of the missing pages, given that their sum is 452 and the print is double-sided.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

4. aprill 2015 Lõppvoor **9. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* a) ei; b) jah.

Olgu antud arvu esimesest kolmest numbrist moodustunud arv a ja ülejäänud osa b. Olgu arvus kokku m numbrit.

a) Saame võrrandi $a \cdot 10^{m-3} + b = 2015b$, millest $a = \dfrac{2014b}{10^{m-3}}$. Kuna SÜT$(2014, 10^{m-3}) = 2$, siis jääb murru $\dfrac{2014b}{10^{m-3}}$ taandamisel sisse tegur 1007. Seega a ei saa olla kolmekohaline.

b) Sobib näiteks arv 4032, sest $4032 = 2016 \cdot 2$.

Märkus. Pole raske näidata, et ülesande b-osa vastuseks sobivad ainsana arvud kujul $4032 \cdot 10^t$ ja $8064 \cdot 10^t$, kus t on suvaline mittenegatiivne täisarv.

2. *Vastus:* $V = 6$, $I = 5$, $N = 7$, $A = 2$, $L = 1$, $S = 3$, $E = 0$, $R = 8$.

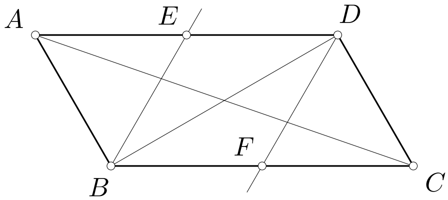
Ilmselt $L = 1$, sest L on esimene number kuuekohalises arvus, mis tekib kahe viiekohalise arvu liitmisel.

Oletame, et kümneliste liitmisel ei teki ülekannet sajalistesse. Kui nüüd $I \leqslant 8$, siis $I + 1 = N$ ja ka sajalistest tuhandelistesse ei teki ülekannet. See aga tähendaks, et $I + A = N$ või $I + A = 10 + N$, kust vastavalt $A = 1 = L$ või $A = 11 \geqslant 10$, mis kumbki pole võimalik. Kui aga $I = 9$, siis $N = 0$ ja tekib ülekanne sajalistest tuhandelistesse, kust saame vastuolu seetõttu, et ainsa võimalusena summasse $N = 0$ saada on võtta ka $A = 0$.

Järelikult ei ole võimalik, et kümneliste liitmisel ei tule sajalistesse ülekannet. Seega $I + 2 = N$ või $I + 2 = 10 + N$. Viimasel juhul aga tekiks ülekanne ka sajalistest tuhandelistesse, kust $I + A + 1 = 10 + N$ ja $A = 1 = L$ — jälle vastuolu. Kokkuvõttes $I \leqslant 7$ ja $I + 2 = N$ ning tuhandeliste tehtest $A = 2$. Viimasest saame ka $V = 6$.

Ilmselt $I \neq 0$ ja $S \neq 0$, sest muidu saaksime ühelistest vastavalt $S = R$ või $I = R$. Et $1 = L$ ja $2 = A$, siis $I \geqslant 3$ ja $S \geqslant 3$. Et ka 6 on kasutatud, siis $I \neq 6$ ja $N = I + 2$ tõttu ka $I \neq 4$. Numbri I jaoks jäävad variandid $I = 3$, $I = 5$ ja $I = 7$, mispuhul vastavalt $N = 5$, $N = 7$ ja $N = 9$.

- Kui $I = 3$ ja $N = 5$, siis ülekande tekkimiseks kümnelistest sajalistesse peab tingimata olema $S \geqslant 5$, sest $S = 4$ korral ühelistest ülekannet ei teki. Et $5 = N$ ja $6 = V$, peab olema $S \geqslant 7$. Teisalt, tehtest ühelistega saame $3 + S = 10 + R$, kust $R \leqslant 2$. Kuna $1 = L$ ja $2 = A$, jääb ainsa võimalusena õhku $R = 0$ ja $S = 7$, kuid siis kümnelistest $E = 3 = I$, mis pole võimalik.



Joonis 1

- Kui $I = 5$ ja $N = 7$, siis võrdus $S = 3$ annab lahendi $R = 8$ ja $E = 0$. Juht $S = 4$ pole võimalik, sest annab $E = 1 = L$. Numbrid 5, 6 ja 7 on juba kasutusel. Juhtudel $S = 8$ ja $S = 9$ saaksime kümnelistest vastavalt $E = 6 = V$ ja $E = 7 = N$, mis pole võimalik.
- Kui $I = 7$ ja $N = 9$, siis $S \geqslant 3$ tekitab ülekande ühelistest kümnelistesse. Siis aga $9 + S + 1 = 10 + E$, kust $S = E$ — vastuolu.

3. *Vastus:* $2 : 1$.

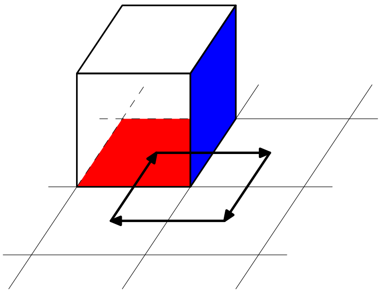
Lahendus 1. Rööpküliku $ABCD$ nurkade suurused on andmete põhjal 60° ja 120°. Kuna BE poolitab nurga tipu B juures, siis $\angle ABE = 60^\circ = \angle BAE$ (joonis 1). Seega $|AE| = |BE|$. Teisalt, et $BEDF$ on romb, siis $|BE| = |DE|$. Kokkuvõttes $|AE| = |DE|$. Seega BE on kolmnurga ABD tipust B tõmmatud mediaan. Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis AC sisaldab kolmnurga ABD tipust A tõmmatud mediaani. Mediaanid aga jaotavad üksteist suhtes $2 : 1$.

Lahendus 2. Rööpküliku $ABCD$ nurkade suurused on andmete põhjal 60° ja 120°. Kuna DF poolitab nurga tipu D juures, siis $\angle CDF = 60^\circ = \angle DCF$. Seega $|CF| = |DF|$. Teisalt, et $BEDF$ on romb, siis $|DF| = |BF|$. Kokkuvõttes $|CF| = |BF|$. Et ülesande tingimuste põhjal $|BC| = |AD|$ ja $|BF| = |DE|$, siis ka $|FC| = |AE|$.

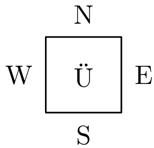
Olgu N lõikude AC ja BE lõikepunkt; kolmnurgad BCN ja EAN on samasihiliste külgede tõttu sarnased. Et $|BC| = 2|FC| = 2|AE|$, on nende sarnasustegur 2. Järelikult $|BN| : |NE| = 2 : 1$.

4. *Vastus:* 24.

Et alguses ja lõpus on täring punasel ruudul nii, et tema alumisel tahul on arv 1, ning vahepeal peab ta punast ruutu puutuma vähemalt korra ka iga ülejäänud tahuga, siis peab täring vähemalt 6 korda punaselt ruudult lahkuma ja sinna tagasi jõudma eelmisest korrast erineva alumise tahuga. Näitame, et iga selline käik peab sisaldama vähemalt 4 sammu. Tõepoolest, sammude arv peab olema paaris (ruudud malekorras värvides näeme, et igal sammul liigub täring valgelt ruudult mustale või vastupidi) ning 2 sammust ei piisa, sest siis peaks esimese sammu järel täringu kohe üle sama serva tagasi veeretama, nii et alumine tahk ei muutu.



Joonis 2



Joonis 3

Näitame nüüd, et 4 sammuga saab täringu punaselt ruudult ära viia ja sinna tagasi tuua nii, et uueks alumiseks tahuks on algse alumise tahu mistahes naabertahk (st mõni teine tahk peale vastastahu). Selleks veeretame täringut esimesel sammul nii, et soovitud tahk saaks alumiseks, ning iga järgmise sammu teeme eelmisega võrreldes 90° päripäeva. Niiviisi jääb pärast 4 sammu alumiseks tahuks seesama tahk, mis on alumine ka esimese sammu järel (joonisel 2 on see tahk värvitud siniseks).

Jääb üle tähele panna, et sel viisil (st alustades algsest alumisest tahust ja valides järgmiseks tahuks alati eelmise tahu mingi naabertahu) saame läbi käia kõik täringu tahud ja jõuda lõpuks tagasi esialgsele alumisele tahule. Tõepoolest, olgu algseisus täringu alumine tahk A, ülemine Ü ja ülejäänud tahud ilmakaarte järgi N, E, S ja W, siis sobiv tsükkel on näiteks A-N-E-Ü-S-W-A (joonisel 3 on näha pealtvaade).

5. *Vastus:* 53 kuni 60.

Olgu puuduvate lehekülgede arv n ja olgu puudu leheküljed numbritega $a, a+1, \ldots, a+n-1$. Ülesande tingimusest $a+(a+1)+\ldots+(a+n-1) = 452$. Seega puuduvate leheküljenumbrite aritmeetiline keskmine on $\frac{452}{n}$. Kuna järjestikused täisarvud paiknevad arvteljel oma aritmeetilise keskmise suhtes sümmeetriliselt, siis

$$\frac{452}{n} = \frac{a + (a + n - 1)}{2},$$

kust $n \cdot (2a + n - 1) = 904 = 2^3 \cdot 113$. Et puuduvate leheküljenumbrite arv n peab olema paaris, siis $2a + n - 1$ on paaritu. Arvu 904 paaritud tegurid on 1 ja 113, kuid juhul $2a + n - 1 = 1$ oleks $n = 904$ ja a negatiivne. Seega $2a + n - 1 = 113$ ja $n = 8$. Võrrandi $2a + 7 = 113$ lahendiks on $a = 53$. Väljarebitud leheküljed on järelikult numbritega 53 kuni 60.

Lahendused

1. *Vastus:* 4.

Olgu $\dfrac{1}{n}$ ja $\dfrac{1}{n+1}$ lõplikud kümnendmurrud, kus komajärgsete numbrite arv on vastavalt u ja v. Siis $\dfrac{10^u}{n}$ ja $\dfrac{10^v}{n+1}$ on täisarvud, mis tähendab, et arvudel n ja $n+1$ pole muid algtegureid peale 2 ja 5. Kuna järjestikused täisarvud ei saa jaguda mõlemad 2-ga ega mõlemad 5-ga, peab üks neist olema 2 aste ja üks 5 aste.

Et ainult arv 1 on nii 2 aste kui ka 5 aste, kuid otsitakse vaid 1-st suuremaid arve, siis võime eeldada, et $5^k \pm 1 = 2^l$, kus k ja l on positiivsed täisarvud. Et 5 annab 4-ga jagades jäägi 1, siis ka kõik 5 astmed annavad 4-ga jagades jäägi 1, mistõttu arv $5^k + 1$ jagub 2-ga, kuid mitte 4-ga. Selline arv saaks olla kujul 2^l ainult juhul $2^l = 2$, mis annaks $5^k = 1$. Järelikult peab olema $5^k - 1 = 2^l$. Siis aga $2^l = (5-1) \cdot (5^{k-1} + \ldots + 5 + 1)$, mistõttu ka summa $5^{k-1} + \ldots + 5 + 1$ peab olema 2 aste. Üks võimalus on $k = 1$ ehk $5^{k-1} + \ldots + 5 + 1 = 1$, mis annab otsitavaks arvuks $n = 4$. Juhul $k > 1$ peab k olema paaris, sest summas $5^{k-1} + \ldots + 5 + 1$ on k paaritut liidetavat. See annab võimaluse tegurdada $2^l = 5^k - 1 = \left(5^{\frac{k}{2}} - 1\right) \cdot \left(5^{\frac{k}{2}} + 1\right)$, kus tegurid peavad jälle olema 2 astmed. Kuna need tegurid erinevad teineteisest 2 võrra, on ainus võimalus $5^{\frac{k}{2}} - 1 = 2$ ja $5^{\frac{k}{2}} + 1 = 4$, mis viib vastuoluni.

2. *Vastus:* 25.

Lahendus 1. Esimese võrduse poolte kuupitõstmisel saame

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz = 1. \quad (1)$$

Esimese ja teise võrduse poolte korrutamisel aga tekib

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 = 11. \quad (2)$$

Lahutades võrdusest (1) 3-ga korrutatud võrduse (2), saame

$$-2 \cdot (x^3 + y^3 + z^3) + 6 \cdot xyz = -32.$$

Kuna $xyz = 3$, siis saame $-2 \cdot (x^3 + y^3 + z^3) = -32 - 6 \cdot 3 = -50$, kust $x^3 + y^3 + z^3 = 25$.

Lahendus 2. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y + z &= 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 11, \\ xyz &= 6. \end{cases}$$

Esimesest võrrandist saame $z = 1 - x - y$; asendades teise võrrandisse ja lihtsustades, tekib y suhtes ruutvõrrand $y^2 + (x-1)y + (x^2 - x - 5) = 0$ lahenditega $y = \dfrac{1 - x \pm \sqrt{21 + 2x - 3x^2}}{2}$. Siis

$$z = 1 - x - \frac{1 - x \pm \sqrt{21 + 2x - 3x^2}}{2} = \frac{1 - x \mp \sqrt{21 + 2x - 3x^2}}{2},$$

mistõttu kolmandasse võrrandisse asendamisel tekib x suhtes võrrand

$$x \cdot \frac{\left(1 - x \pm \sqrt{21 + 2x - 3x^2}\right) \cdot \left(1 - x \mp \sqrt{21 + 2x - 3x^2}\right)}{4} = 3.$$

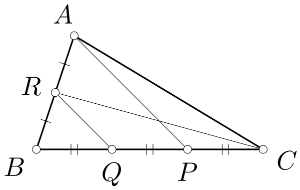
Ruutude vahe valemiga lihtsustades saame siit $x \cdot \dfrac{(1-x)^2 - (21 + 2x - 3x^2)}{4}$ ehk $x \cdot \dfrac{1 - 2x + x^2 - 21 - 2x + 3x^2}{4} = 3$, mis on samaväärne kuupvõrrandiga $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$. Et $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1)^2(x-3)$, siis $x = -1$ või $x = 3$.

Kuna algne süsteem on kõigi muutujate suhtes sümmeetriline, siis ka y ja z võimalikud väärtused on -1 ja 3. Võrdus $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ ei kehti juhul $x = y = z = -1$ ning kui üks muutujatest on väärtusega 3, peavad teised võtma väärtuse -1. Seega

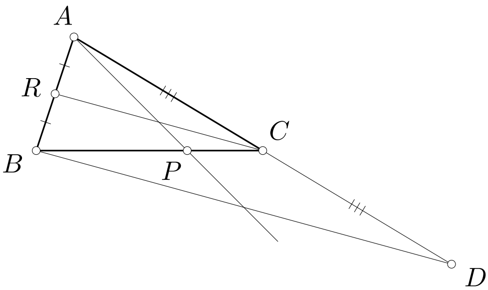
$$x^3 + y^3 + z^3 = 3^3 + (-1)^3 + (-1)^3 = 25.$$

3. *Lahendus 1.* Olgu Q lõigu BP keskpunkt; ülesande tingimustest lähtuvalt $|BQ| = |QP| = |PC| = \frac{1}{3}|BC|$. Olgu R lõigu AB keskpunkt (vt joonis 4). Siis RQ on kolmnurga ABP kesklõik. Järelikult $RQ \parallel AP$. Kuna kiir AP poolitab kolmnurga CRQ külje CQ, olles ise paralleelne sama kolmnurga küljega RQ, siis AP on kolmnurga CRQ kesklõigu pikendus ja poolitab seega ka külje CR. Lõik CR on aga kolmnurga ABC tipust C tõmmatud mediaan.

Lahendus 2. Olgu R külje AB keskpunkt. Olgu D selline punkt kiirel AC punktist C tagapool, et $|AC| = |CD|$ (vt joonis 5). Siis BC on kolmnurga ABD mediaan. Et $|BP| : |PC| = 2 : 1$, siis P on kolmnurga ABD mediaanide lõikepunkt. Seega AP moodustab osa kolmnurga ABD teisest mediaanist, st kiir AP poolitab lõigu BD. Et CR on kolmnurga ABD kesklõik, siis $CR \parallel BD$, mistõttu kiir AP poolitab ka lõigu CR. See on aga kolmnurga ABC tipust C tõmmatud mediaan.

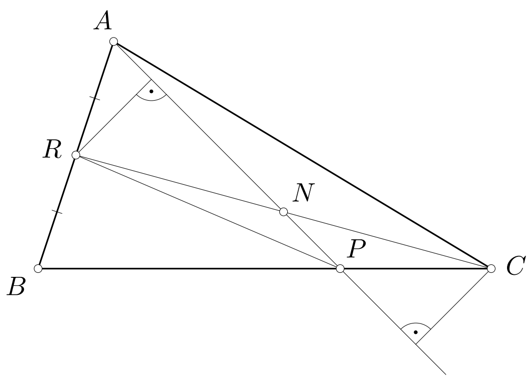


Joonis 4



Joonis 5

Lahendus 3. Olgu R lõigu AB keskpunkt. Tähistagu S_Δ kolmnurga Δ pindala. Kolmnurkadel APB ja APC on ühine tipust A tõmmatud kõrgus, seega suhtest $|BP| : |PC| = 2 : 1$ järeldub $S_{APB} = 2S_{APC}$. Kolmnurkadel APR ja BPR on ühine tipust P tõmmatud kõrgus ja $|AR| = |BR|$, seega nende pindalad on võrdsed, olles kumbki pool kolmnurga APB pindalast. Seega $S_{APR} = S_{APC}$. Et neil kolmnurkadel on ühine külg AP, on võrdsed ka sellele tõmmatud kõrgused ehk tippudest R ja C lõigule AP tõmmatud ristlõigud (joonis 6). Olgu N lõikude AP ja CR lõikepunkt, siis $S_{CNP} = S_{RNP}$, kuna neil kolmnurkadel on ühine külg NP ja sellele tõmmatud kõrgused on võrdsed. Kuna viimasel kolmnurkade paaril on ühine ka tipust P tõmmatud kõrgus, siis on võrdsed ka vastavad alused ehk $|CN| = |NR|$, mida oligi vaja.



Joonis 6

4. Kirjutame $S(n+1)$ ja $S(n)$ avaldise liikmed üksteise alla:

$$\begin{array}{lclclclclclcl} S(n+1) & = & 1\cdot(n+1) & + & 2\cdot n & & + & \ldots & + & n\cdot 2 & + & (n+1)\cdot 1 \\ S(n) & = & 1\cdot n & & + & 2\cdot(n-1) & + & \ldots & + & n\cdot 1 & & \end{array} \tag{3}$$

Tabeli (3) kohakuti asuvate liikmete lahutamisel saame

$$S(n+1)-S(n) = 1\cdot((n+1)-n) + 2\cdot(n-(n-1)) + \ldots + n\cdot(2-1) + (n+1).$$

Et kõik vahed võrduvad 1-ga, siis

$$S(n+1)-S(n) = 1+2+\ldots+n+(n+1).$$

Tabeli (3) kohakuti asuvate liikmete liitmisel aga saame

$$S(n+1)+S(n) = 1\cdot((n+1)+n) + 2\cdot(n+(n-1)) + \ldots + n\cdot(2+1) + (n+1).$$

Parempoolseteks teguriteks on paaritud arvud $2n+1, 2n-1, \ldots, 3, 1$, mis esituvad vastavalt kujul $(n+1)^2-n^2, n^2-(n-1)^2, \ldots, 2^2-1^2, 1^2$. Seega

$$\begin{aligned} S(n+1)+S(n) &= \left((n+1)^2-n^2\right) + \left(2n^2-2(n-1)^2\right) + \ldots + \\ &\qquad + \left(n\cdot 2^2 - n\cdot 1^2\right) + (n+1)\cdot 1^2. \end{aligned}$$

Igas „suures sulus“ koondub parempoolne liige järgmise sulu vasakpoolse liikmega, jättes viimase kordajaga 1. Pärast kõiki koondamisi ja liidetavate järjestuse ümberpööramist saame

$$S(n+1)+S(n) = 1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2.$$

5. *Vastus:* ei.

Oletame, et täisarvuliste küljepikkustega täisnurkse kolmnurga mingi kahe külje pikkused on a ja a^2. Et $a^2 \geqslant a$, siis on kaks võimalust: kas külg pikkusega a^2 on selle kolmnurga hüpotenuus või küljed pikkustega a ja a^2 on kaatetid. Olgu kolmanda külje pikkus x.

Kui külg pikkusega a^2 on hüpotenuus, siis Pythagorase teoreemist saame $a^4 = a^2 + x^2$. Siis aga $x^2 = a^4 - a^2 = a^2(a^2-1)$, st x^2 jagub arvuga a^2 ja järelikult x jagub arvuga a. Seega a^2-1 on täisarvu $\dfrac{x}{a}$ ruut. Ent selliseid positiivseid täisarve, mille ruudud erineksid teineteisest 1 võrra, ei ole.

Kui küljed pikkustega a ja a^2 on kaatetid, siis Pythagorase teoreemist saame $x^2 = a^4 + a^2 = a^2(a^2+1)$, st jällegi x^2 jagub arvuga a^2 ning x jagub arvuga a. Seega a^2+1 on täisarvu $\dfrac{x}{a}$ ruut, mis pole võimalik, sest a^2+1 erineb arvust a^2 vaid 1 võrra.

Märkus. Tegurdusest $x^2 = a^2(a^2 - 1)$ või $x^2 = a^2(a^2 + 1)$ võib vastuoluni jõuda ka teisiti. Üks võimalus on kasutada asjaolu, et järjestikused täisarvud on ühistegurita, kuid kui ühistegurita arvude korrutis on täisruut, peavad need tegurid olema mõlemad täisruudud. Vastuolu tuletame siit nagu lahenduses. Teine võimalus on märgata, et kui kahe positiivse täisarvu korrutis on mingi täisarvu x ruut, peab x olema suuruselt nende tegurite vahel. Kuid kahe järjestikuse täisarvu vahel ühtki täisarvu pole. Selle lähenemise puhul pole vaja isegi tegurdada. Näiteks võrdusest $x^2 = a^4 + a^2$ saame $x^2 < a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2$, mistõttu x^2 asub suuruselt järjestikuste täisarvude a^2 ja $a^2 + 1$ ruutude vahel. Võrdusest $x^2 = a^4 - a^2$ saame sarnaselt $(a^2)^2 > x^2 > a^4 - 2a^2 + 1 = (a^2 - 1)^2$, kus teine võrratus kehtib $a > 1$ tõttu (kuna $a^4 > x^2 \geqslant 1$, siis $a > 1$).

Lahendused

1. *Vastus:* 3.

Olgu $n = p^k$, kus p on algarv ja k positiivne täisarv. Märkame, et

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1).$$

Et ruutfunktsioon $y = x^2 - x + 1$ võtab negatiivse diskriminandi tõttu vaid positiivseid väärtusi, saab võrdus $(x-1)(x^2-x+1) = p^k$ kehtida vaid juhul, kui $x-1$ ja x^2-x+1 on p astmed. Kuna aga $x^2 - x + 1 = x(x-1)+1$, siis $\text{SÜT}(x-1, x^2-x+1) = 1$, mis tähendab, et $x - 1 = 1$ või $x^2 - x + 1 = 1$. Teine variant pole võimalik, sest sel juhul $x^2 - x = 0$, mis annaks $x = 0$ või $x = 1$ ning $x - 1$ ei tuleks positiivne. Seega $x - 1 = 1$, kust $x = 2$ ja $(x-1)(x^2-x+1) = 3 = 3^1$.

2. *Vastus:* b) ei.

a) Näitame, et mitmekohalise arvu numbrite korrutis on sellest arvust endast väiksem. Sellest tulenevalt väheneb Tiina kirjutatav arv, kuni ta jõuab ühekohalise arvuni. Ühekohaline arv aga jääb korduma.

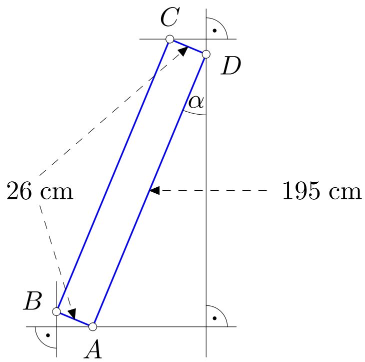
Vajaliku hindamise jaoks olgu meil mitmekohaline arv $\overline{d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0}$, kus d_i on arvu numbrid. Saame

$$\begin{aligned}
\overline{d_k d_{k-1} \ldots d_1 d_0} &= d_k \cdot 10^k + \overline{d_{k-1} \ldots d_1 d_0} \geqslant \\
&\geqslant d_k \cdot 10^k = \\
&= d_k \cdot \underbrace{(10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10)}_{k \text{ tegurit}} > \\
&> d_k \cdot d_{k-1} \cdot \ldots \cdot d_1 \cdot d_0,
\end{aligned}$$

kus viimane võrratus kehtib tänu sellele, et $d_{k-1}, \ldots, d_1, d_0$ on numbrid ja seega 10-st väiksemad.

b) Alustades arvust 4, tekib tsükkel $4 \to 8 \to 16 \to 12 \to 4 \to \ldots$. Seega ei tarvitse jääda vaid üks arv korduma.

3. *Vastus:* jah.



Joonis 7

Piisab näidata, et ristkülik mõõtmetega 195 cm × 26 cm mahub ristkülikusse mõõtmetega 99 cm × 190 cm. Olgu väiksem ristkülik $ABCD$, kus $|AB| = 26$ cm ning A ja B on alumised tipud; pöörame seda ristkülikut ümber tipu A nurga α võrra, mille siinus on $\frac{5}{13}$ ja koosinus järelikult $\frac{12}{13}$ (joonis 7).

Pööratud ristküliku tipp D asub kõrgusel $\frac{12}{13} \cdot 195$ cm ehk 180 cm. Sellest kõrgemale ulatuva osa kõrgus on $\frac{5}{13} \cdot 26$ cm ehk 10 cm. Seega hõivab pööratud ristkülik vertikaalsuunas $180 + 10$ ehk 190 sentimeetrit. Horisontaalsuunas on tipp D liikunud pööramisel $\frac{5}{13} \cdot 195$ cm ehk 75 cm võrra. Tipp B jääb horisontaalsuunas $\frac{12}{13} \cdot 26$ cm ehk 24 cm võrra tipust A teisele poole. Kokku hõivab pööratud ristkülik horisontaalmõõtmes $75 + 24$ ehk 99 sentimeetrit. Kokkuvõttes mahub pööratud ristkülik tõepoolest alale mõõtmetega 99 cm × 190 cm.

Märkus. Vajaliku pöördenurga saab leida võrratuse lahendamise teel. Nurk α peab olema selline, et

$$26 \sin \alpha + 195 \cos \alpha \leqslant 190.$$

Asendades $x = \sin \alpha$, saame $26x + 195\sqrt{1 - x^2} \leqslant 190$ ehk

$$195\sqrt{1 - x^2} \leqslant 190 - 26x.$$

Pärast poolte ruututõstmist ja liikmete reorganiseerimist ruuthulkliikmeks, saame siit

$$\left(13^2 \cdot 229\right) x^2 - \left(2^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19\right) x - 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \geqslant 0.$$

Lahendivalem annab nullkohtadeks

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19 \pm \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 13^2 \cdot \left(2^4 \cdot 19^2 + 7 \cdot 11 \cdot 229\right)}}{2 \cdot 13^2 \cdot 229} = \\
&= \frac{2^2 \cdot 5 \cdot 19 \pm 5\sqrt{23409}}{13 \cdot 229} \\
&= \frac{5 \cdot (76 \pm 153)}{13 \cdot 229}.
\end{aligned}$$

Kuna otsime positiivset suhet x, saab vajalik võrratus seega kehtida ainult juhul $x \geqslant \frac{5 \cdot (76 + 153)}{13 \cdot 229} = \frac{5}{13}$.

4. *Vastus:* 285120.

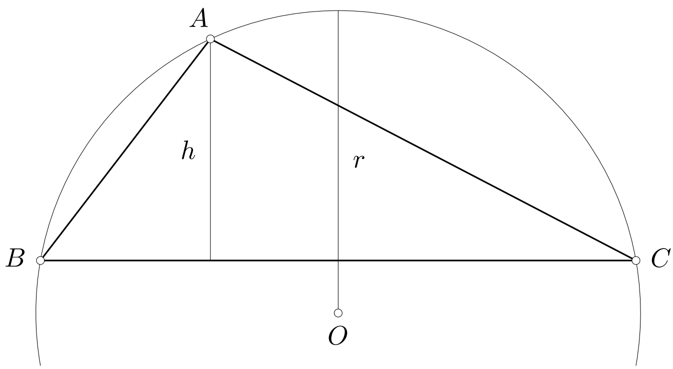
Kuna iga vaadeldava arvu numbrite summa on 45, siis nad kõik jaguvad 9-ga. Jagumiseks 11-ga peab paaris- ja paaritutel kohtadel asuvate numbrite summade vahe jaguma 11-ga. Olgu s paariskohtadel olevate numbrite summa; siis $s - (45 - s)$ ehk $2s - 45$ peab jaguma 11-ga. See peab paika parajasti siis, kui $2s - 12$ jagub 11-ga ehk $s - 6$ jagub 11-ga. Kuna $0+1+2+3+4 \leqslant s \leqslant 5+6+7+8+9$ ehk $10 \leqslant s \leqslant 35$, siis ainsad võimalused on $s = 17$ ja $s = 28$. Paneme tähele, et teisel juhul võrdub ülejäänud, st paaritutel kohtadel olevate numbrite summa 17-ga.

Summa 17 saame 5 erinevast numbrist 11 erineval viisil:

$$\begin{array}{llll}
\{0,1,2,5,9\}\,, & \{0,1,2,6,8\}\,, & \{0,1,3,4,9\}\,, & \{0,1,3,5,8\}\,, \\
\{0,1,3,6,7\}\,, & \{0,1,4,5,7\}\,, & \{0,2,3,4,8\}\,, & \{0,2,3,5,7\}\,, \\
\{0,2,4,5,6\}\,, & \{1,2,3,4,7\}\,, & \{1,2,3,5,6\}\,. &
\end{array}$$

Igas otsitavas arvus on just ühe sellise hulga numbrid mingis järjestuses kas paaris- või paaritutel kohtadel. Seega saab arvu valiku jaotada nelja etappi: (1) valime koha numbrile 0, milleks on 9 võimalust; (2) valime suvaliselt ühe ülaltoodud hulkadest, milleks on 11 võimalust (kuna numbri 0 jaoks on koht juba valitud, määrab selle hulga valik ka selle, kas selle hulga numbrid peavad olema paaris- või paaritutel kohtadel); (3) valime numbrite järjestuse nendel kohtadel, mille kohanumber on numbri 0 kohanumbriga sama paarsusega (kui 0 on paariskohal, siis paariskohtadel olevad numbrid, vastasel juhul paaritutel kohtadel olevad numbrid), milleks on $4! = 24$ võimalust; (4) valime numbrite järjestuse ülejäänud kohtadel, milleks on $5! = 120$ võimalust. Kokku on arvu koostamiseks seega $9 \cdot 11 \cdot 24 \cdot 120$ ehk $99 \cdot 2880$ ehk 285120 võimalust.

5. *Lahendus 1.* Olgu α selle kolmnurga suvalise nurga suurus. Tähistame kolmnurga tipud A, B, C, nii et nurk suurusega α on tipu A juures. Olgu tippude A, B, C vastas olevate külgede pikkused vastavalt a, b, c. Kuna kolmnurga küljed on ümberringjoone kõõlud, ei saa ühegi külje pikkus ületada ümberringjoone diameetrit ehk kahekordset raadiust.



Joonis 8

Esimese võrratuse näitamiseks kasutame seda omadust külgede b ja c jaoks, st $b \leqslant 2r$ ja $c \leqslant 2r$. Et ümberringjoone diameetriga saab kokku langeda ülimalt üks kolmnurga külg, on vähemalt üks neist võrratustest range. Ülesande eeldust kasutades saame seega

$$r^2 \leqslant S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha < \frac{1}{2}\cdot 2r \cdot 2r \cdot \sin\alpha = 2r^2 \cdot \sin\alpha,$$

kust $2\sin\alpha > 1$. See annabki $\alpha > 30^\circ$.

Teise võrratuse näitamiseks kasutame mainitud omadust külje a jaoks, st $a \leqslant 2r$. Olgu h tipust A tõmmatud kõrgus. Ülesande eeldust kasutades saame

$$r^2 \leqslant S = \frac{1}{2}ah \leqslant \frac{1}{2}\cdot 2r \cdot h = r \cdot h,$$

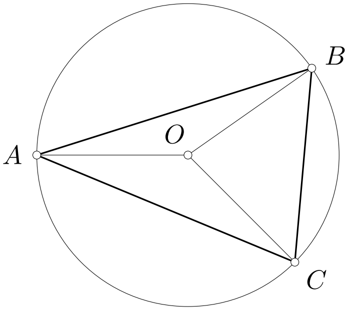
kust $h \geqslant r$. Kui kolmnurga ABC tipu A juures oleks nürinurk, siis asuks kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt O kolmnurgast väljas, mispuhul aga $h < r$ (joonis 8). Vastuolu näitab, et nurk tipu A juures peab olema kas terav- või täisnurk, st $\alpha \leqslant 90^\circ$.

Lahendus 2. Tähistame kolmnurga külgede pikkused ja nurkade suurused nagu eelmises lahenduses. Et siinusteoreemist $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$, siis

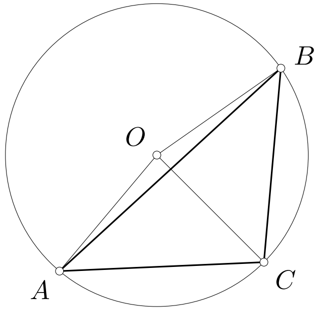
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot 2r\sin\alpha \cdot 2r\sin\beta \cdot \sin\gamma = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Kuna $S \geqslant r^2$, siis saame siit

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \geqslant \frac{1}{2}. \tag{4}$$



Joonis 9



Joonis 10

Kuna siinus ei saa olla 1-st suurem, peavad selle võrratuse kehtimiseks $\sin\alpha$, $\sin\beta$ ja $\sin\gamma$ olema kõik $\frac{1}{2}$-st suuremad (võrdus oleks ühe nurga puhul võimalik, kui teiste nurkade siinused võrduksid 1-ga, kuid kolmnurgas ei saa olla kaht täisnurka). Järelikult on kolmnurga nurgad suuremad kui 30°.

Oletame, et kolmnurk on nürinurkne, olgu γ nürinurga suurus. Võrratusest $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \geqslant \frac{1}{2}$ järeldub siis $\sin\alpha\sin\beta > \frac{1}{2}$. Et $\alpha + \beta < 90^\circ$, saame

$$\sin\alpha\sin\beta < \sin\alpha\sin(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

vastuolu võrratusega (4).

Lahendus 3. Tähistame kolmnurga tipud ja nurkade suurused nagu esimeses lahenduses, olgu üldisust kitsendamata $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Olgu O ümberringjoone keskpunkt; siis kolmnurga pindala esitub kolmnurkade OBC, OCA ja OAB pindalade summana (joonis 9). Järelikult

$$S = \frac{1}{2}r^2 \cdot \left(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma\right).$$

(See valem kehtib ka nürinurkse kolmnurga korral, mispuhul see vastab kolmnurga OAB pindala lahutamisele kolmnurkade OBC ja OCA pindalade summast, vt joonis 10.) Kuna $S \geqslant r^2$, saame siit

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \geqslant 2. \tag{5}$$

Kui kolmnurk oleks nürinurkne, siis oleks üks vasaku poole liidetavatest negatiivne. Et kumbki ülejäänud kahest liidetavast ei saa olla 1-st suurem, ei saa võrratus (5) kehtida.

Jääb näidata, et nurgad on suuremad 30°-st. Kuna oleme juba näidanud, et kolmnurk pole nürinurkne, siis $2\beta \leqslant 2\gamma \leqslant 180^\circ$. Siinusfunktsiooni graafiku kumeruse tõttu

$$\frac{\sin 2\beta + \sin 2\gamma}{2} \leqslant \sin \frac{2\beta + 2\gamma}{2} = \sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha,$$

kust $\sin 2\beta + \sin 2\gamma \leqslant 2 \sin \alpha$. Kui $\alpha \leqslant 30^\circ$, siis $2 \sin \alpha \leqslant 1$ ja $\sin 2\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, mis annab

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 < 2,$$

vastuolu võrratusega (5). Järelikult $\alpha > 30^\circ$ ja kuna α on valiku põhjal vähim nurk, on ka teised nurgad suuremad kui 30°.

Märkus. Nurga suurus 90° on ka saavutatav (võrdhaarne täisnurkne kolmnurk rahuldab ülesande tingimusi). Vähim võimalik nurga suurus on aga suurem kui 30°, ligikaudne väärtus on $32{,}9^\circ$.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Olgu k suvaline mittenegatiivne täisarv. Defineerime

$$n = 2015 \cdot (6k+5) - 1 = 6 \cdot (2015k + 1679).$$

Siis positiivsed täisarvud $x = 2^{\frac{n}{2}}$, $y = 2^{\frac{n}{3}}$, $z = 2^{6k+5}$ rahuldavad antud võrrandit, kuna

$$\left(2^{\frac{n}{2}}\right)^2 + \left(2^{\frac{n}{3}}\right)^3 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} = \left(2^{6k+5}\right)^{2015}.$$

Et k on suvaline, saab niimoodi leida lõpmata palju lahendeid.

Märkus 1. Selle lahenduseni jõudmiseks võib teadlikult otsida lahendeid kujul $x = 2^{\frac{n}{2}}$, $y = 2^{\frac{n}{3}}$, $z = 2^{\frac{n+1}{2015}}$. Et lahendid tuleksid täisarvulised, peab n jaguma 6-ga ja $n+1$ jaguma 2015-ga. Kongruentside keeles annab see süsteemi

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{6}, \\ n \equiv -1 \pmod{2015}. \end{cases}$$

Et $\text{SÜT}(6, 2015) = 1$, leiduvad sel süsteemil hiina jäägiteoreemi põhjal lahendid. Üks neist on ka lahenduses kasutatud väärtus.

Lahendus 2. Paneme tähele, et kui $x = a$, $y = b$, $z = c$ on võrrandi lahend, siis suvalise positiivse täisarvu d korral on $x = d^{3\cdot 2015}a$, $y = d^{2\cdot 2015}b$, $z = d^6 c$ samuti lahend. Seega piisab leida üks võrrandi lahend, selleks sobib näiteks $x = 2^{5037}$, $y = 2^{3358}$, $z = 2^5$ (see vastab eelmise lahenduse juhule $k = 0$).

Lahendus 3. Lõpmatu hulga lahended saab konstrueerida ka järgmiselt. Olgu a, b sellised positiivsed täisarvud, et $\text{SÜT}(a, b) = 1$. Olgu $c = a^2 + b^3$ kanoonilise esitusega $c = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$. Olgu $k_i = 2015m_i - 336\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$, kus m_i on suvaline positiivne täisarv, mille korral $2015m_i - 336\alpha_i \geqslant 0$. Siis võrrandi lahenditeks on $x = ap_1^{3k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{3k_n}$, $y = bp_1^{2k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{2k_n}$, $z = p_1^{6m_1 - \alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{6m_n - \alpha_n}$.

Märkus 2. Viimase lahenduseni võib jõuda, hakates antud võrrandit taandama x ja y ühiste teguritega.

Märkus 3. Eelmiste lahenduste lahendid vastaksid juhule $a = b = 1$.

2. *Vastus:* $f(x) = 0$, $f(x) = 4|x|$ ja $f(x) = -4|x|$.

Lahendus 1. Vahetades algses võrrandis x ja y, saame seose

$$f(f(yx)) = |y|f(x) + 3f(yx).$$

Et $xy = yx$, siis koos algse võrrandiga annab see $|x|f(y) = |y|f(x)$. Asendades sellesse $x = 1$, saame

$$f(y) = |y|f(1), \tag{6}$$

mis peab kehtima iga reaalarvu y korral.

Teisalt, võttes algses võrrandis $x = y = 1$, saame

$$f(f(1)) = f(1) + 3f(1) = 4f(1).$$

Võttes seoses (6) $y = f(1)$, saame

$$f(f(1)) = |f(1)|f(1).$$

Kokkuvõttes $4f(1) = |f(1)|f(1)$ ehk

$$f(1)\big(|f(1)| - 4\big) = 0.$$

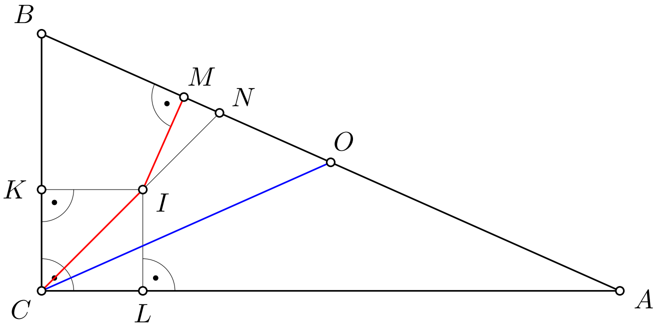
Siit saame võimalused $f(1) = 0$, $f(1) = 4$ ja $f(1) = -4$, mis seose (6) valguses annavad võimalikeks funktsioonideks $f(x) = 0$, $f(x) = 4|x|$ ja $f(x) = -4|x|$. Kontroll näitab, et kõik kolm rahuldavad algset võrrandit.

Lahendus 2. Samasuse (6) tõestamiseks võime võtta kohe algses samasuses $x = 1$, saades iga y korral $f(f(y)) = f(y) + 3f(y) = 4f(y)$. Kasutades saadud tulemust lähtevõrduse vasakus pooles, saame, et iga x ja y korral $4f(xy) = |x|f(y) + 3f(xy)$, millest $f(xy) = |x|f(y)$. Nüüd $y = 1$ annab $f(x) = |x|f(1)$. See on samaväärne seosega (6), nii et edasi võib jätkata nagu lahenduses 1.

Lahendus 3. Samasuseni (6) jõudmiseks võime talitada ka järgmiselt. Valides $x = y = 0$, saame $f(f(0)) = 3f(0)$. Valides $x = 1$, $y = 0$, saame $f(f(0)) = 4f(0)$. Seega $f(0) = 0$.

Edasi olgu $y \neq 0$, $x = \dfrac{1}{y}$. Saame, et $f(f(1)) = \dfrac{1}{|y|}f(y) + 3f(1)$, millest järeldub, et $f(y) = |y| \cdot \big(f(f(1)) - 3f(1)\big)$. Niisiis juhul $y \neq 0$ on $f(y) = A|x|$, kus A on konstant. See kuju laieneb ka juhule $y = 0$, sest oleme juba tõestanud, et $f(0) = 0$. Kuju (6) tuletamiseks võime sarnaselt lahendusega 1 võtta algses samasuses $x = y = 1$, saades $f(f(1)) = 4f(1)$, kust $A = f(f(1)) - 3f(1) = f(1)$.

Märkus. Asjaolu, et $f(0) = 0$, võime märgata ka teisiti. Valides $y = 0$, saame $f(f(0)) = |x|f(0) + 3f(0)$, mis tähendab, et iga reaalarvu x korral $|x|f(0) = f(f(0)) - 3f(0)$. Juhul $f(0) \neq 0$ omandaks vasak pool kõikvõimalikke väärtusi, parem pool on aga konstant. Vastuolu näitab, et $f(0)$ peab võrduma nulliga.



Joonis 11

3. *Lahendus 1.* Olgu antud täisnurkne kolmnurk ABC täisnurgaga tipu C juures ning tema ümber- ja siseringjoone keskpunktid olgu vastavalt O ja I. Täisnurkse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt asub hüpotenuusi keskpunktis. Olgu K, L ja M siseringjoone puutepunktid vastavalt kaatetitega BC ja CA ning hüpotenuusiga AB. Olgu veel N kiire CI lõikepunkt hüpotenuusiga AB (joonis 11).

Et IK ja AC on mõlemad risti sirgega BC, siis $IK \parallel LC$. Et IL ja BC on mõlemad risti sirgega AC, siis $IL \parallel KC$. Lisaks $|IK| = |IL| = r$, mistõttu $IKCL$ on ruut küljepikkusega r ning CI on tema diagonaal. Järelikult $\angle ACN = \angle BCN = 45^\circ$ ja $|CI| = \sqrt{2}r$. Niisiis $|CI| + |IM| = \sqrt{2}r + r$, mistõttu piisab vajaliku väite $R \geqslant \left(1 + \sqrt{2}\right) r$ tõestamiseks näidata, et lõik CO on vähemalt niisama pikk kui murdjoon CIM (joonisel 11 on jooned, mille pikkust võrreldakse, märgitud värviliselt).

Eeldame üldisust kitsendamata, et $\angle BAC \leqslant \angle ABC$. Siis $\angle BAC \leqslant 45^\circ$, mistõttu

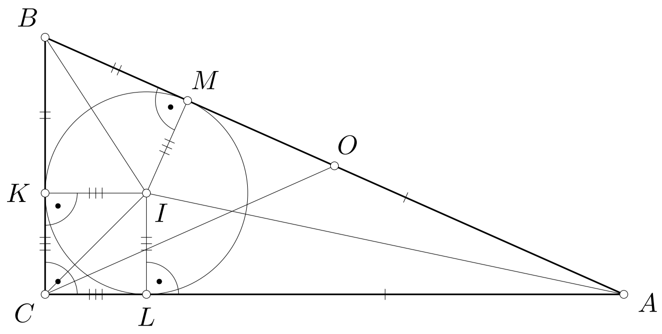
$$\begin{aligned}\angle AOC &= 180^\circ - \angle ACO - \angle OAC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BAC \geqslant \\ &\geqslant 180^\circ - 45^\circ - \angle BAC = \\ &= 180^\circ - \angle ACN - \angle NAC = \angle ANC,\end{aligned}$$

$$\angle ANC = 180^\circ - \angle ACN - \angle NAC \geqslant 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$

Saadud võrratused $\angle AOC \geqslant \angle ANC \geqslant 90^\circ$ näitavad vastavalt, et O asub lõigul NA ning kolmnurgas ANC on tipu N juures nüri- või äärmisel juhul täisnurk. Seega

$$|CO| \geqslant |CN| = |CI| + |IN| \geqslant |CI| + |IM|,$$

mida oligi tarvis tõestada.



Joonis 12

Lahendus 2. Tähistame punktid O, I, K, L, M nagu eelmises lahenduses. Samuti veendume sarnaselt eelmise lahendusega, et $IKCL$ on ruut küljepikkusega r. Kolmnurga ABC pindala avaldub täisnurksete kolmnurkade IAL, IAM, IBM ja IBK ning ruudu $IKCL$ pindalade summana. Et puutujalõikude omadusest tulenevalt $|AL| = |AM|$ ja $|BM| = |BK|$ ning $|IK| = |IL| = |IM| = r$, on kolmnurgad IAL ja IAM võrdse pindalaga ja kolmnurgad IBM ja IBK samuti võrdse pindalaga (joonis 12). Et kolmnurkade IAM ja IBM pindalad annavad kokku kolmnurga IAB pindala ehk $\frac{1}{2}|AB|r$, mis $|AB| = 2R$ tõttu on sama mis Rr, siis

$$S = 2 \cdot Rr + r^2.$$

Teisalt saame kolmnurga ABC pindala avaldada võrdhaarsete kolmnurkade OAC ja OBC pindalade summana, mis annab

$$S = \frac{1}{2}R^2 \sin\angle AOC + \frac{1}{2}R^2 \sin\angle BOC \leqslant \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R^2 = R^2.$$

Kokkuvõttes $R^2 \geqslant 2Rr + r^2$, kust $(R-r)^2 \geqslant 2r^2$ ehk $R - r \geqslant \sqrt{2}r$. Siit saamegi vajaliku võrratuse.

Lahendus 3. Olgu täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused a ja b ning hüpotenuusi pikkus c. On teada, et $R = \dfrac{c}{2}$ ja $r = \dfrac{a+b-c}{2}$. Seega piisab tõestada võrratus

$$\frac{c}{2} \geqslant \left(1+\sqrt{2}\right) \cdot \frac{a+b-c}{2}.$$

Korrutades pooled 2-ga ja viies c-ga liikmed vasakule, saame samaväärse võrratuse

$$\left(2+\sqrt{2}\right)c \geqslant \left(1+\sqrt{2}\right)(a+b).$$

Et liikmed on positiivsed, saame ruututõstmisel samaväärse võrratuse

$$\big(6+4\sqrt{2}\big)c^2 \geqslant \big(3+2\sqrt{2}\big)(a^2+b^2+2ab).$$

Taandades suurusega $3+2\sqrt{2}$ ning asendades vasakul Pythagorase teoreemi järgi $c^2 = a^2+b^2$, tekib

$$2(a^2+b^2) \geqslant a^2+b^2+2ab,$$

millest liikmete vasakule viimisel saame ilmselt kehtiva võrratuse

$$(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Seega nõutud võrratus kehtib.

4. Tähistame $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

Eeldame algul, et hulga X alamhulkade elementide summad mingis järjestuses võetuna on järjestikused liikmed aritmeetilises jadas vahega d. Et arvud $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ on nullist erinevad, siis alamhulkade elementide summad pole kõik võrdsed, mistõttu võib üldisust kitsendamata eeldada, et $d > 0$. Tõestame induktsiooniga n järgi, et $|x_i| = d \cdot 2^i$ iga i korral, kus $0 \leqslant i < n$. Juhul $n = 1$ see väide kehtib, sest alamhulkade summad on 0 ja x_0, mistõttu $|x_0| = d = d \cdot 2^0$. Eeldame, et väide kehtib $n-1$ reaalarvu korral.

Olgu s alamhulkade elementide summadest vähim ning s' väiksuselt teine. Ilmselt saadakse summa s hulga X kõigi negatiivsete elementide alamhulgast N. Et saada summat s', on osa negatiivseid elemente välja jäetud ja/või osa positiivseid elemente lisatud. On ilmne, et kui $x_0 \in N$, siis ainus võimalus on jätta hulgast N välja x_0, ja kui $x_0 \notin N$, siis ainus võimalus on lisada x_0 hulka N, sest kõik teised muutused suurendaksid elementide summat rohkem. Järelikult $d = s' - s = |x_0|$.

Jätame arvu x_0 hulgast X välja. Sellega kaovad täpselt pooled summad ning allesjäänud summad erinevad neist täpselt $|x_0|$ võrra samas suunas. Et $d = |x_0|$, siis summade aritmeetilises jadas on täpselt üks liige igast kahest järjestikusest liikmest kadunud. Seega tulemuseks on aritmeetiline jada vahega $2d$. Induktsiooni eelduse kohaselt $|x_i| = 2d \cdot 2^{i-1} = d \cdot 2^i$ iga i korral, kus $1 \leqslant i < n$. Lisades ka $|x_0| = d = d \cdot 2^0$, on väide tõestatud.

Eeldame nüüd ümberpöördult, et $|x_i| = d \cdot 2^i$ iga i korral, kus $0 \leqslant i < n$. Oletame, et hulga X mingi kahe erineva alamhulga elementide summad on võrdsed. Üldisust kitsendamata võib eeldada, et need alamhulgad ei sisalda ühiseid elemente, sest vastasel korral jätame ühised elemendid mõlemast välja ja järelejäänud elementide summad on ikka võrdsed. Siis iga x_k, mis ühes neist kahest alamhulgast esineb, esitub summana, kus liidetavateks on teised elemendid või nende vastandarvud. Kuid kui x_k on absoluutväärtuselt suurim element neis kahes hulgas, siis on see võimatu, sest $|x_k| = d \cdot 2^k > d \cdot (2^0 + \ldots + 2^{k-1}) = |x_0| + \ldots + |x_{k-1}|$. Järelikult hulga X kõik alamhulgad on erineva elementide summaga.

Olgu s ja t vastavalt hulga X kõigi negatiivsete ja kõigi positiivsete elementide summa, siis ilmselt s on vähim ja t suurim summa. Nende arvude vahe on

$$t - s = |x_0| + \ldots + |x_{n-1}| = d \cdot (2^0 + \ldots + 2^{n-1}) = d \cdot (2^n - 1).$$

Seega lõigule $[s; t]$ mahub täpselt 2^n reaalarvu, mis on arvu d täisarvkordsed. Et aga kõik X alamhulkade elementide summad on arvu d täisarvkordsed ja nad on ülal tõestatu põhjal paarikaupa erinevad, siis katavad need summad parajasti kõik d täisarvkordsed s ja t vahelt, st moodustavad aritmeetilise jada vahega d.

5. *Lahendus 1.* Tähistame $H(k) = \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$ ja kasutame iga $k \geqslant 2$ korral hinnangut $H(k) > 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$. Saame

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2015} = \\
&\quad = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + H(2) + H(3) + \ldots + H(10) - \left(\frac{1}{2016} + \ldots + \frac{1}{2048}\right) > \\
&\quad > \left(4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) + \left(9 \cdot \frac{1}{2}\right) - \left(33 \cdot \frac{1}{2016}\right) = \\
&\quad = \frac{13}{2} + \frac{1}{12} - \frac{33}{2016} > \\
&\quad > \frac{13}{2}.
\end{aligned}$$

Lahendus 2. Et funktsioon $y = \frac{1}{x}$ on kahanev, siis iga positiivse täisarvu n korral $\frac{1}{n} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$. Seega

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2015} \\
&\qquad > \int_1^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x} \mathrm{d}x + \int_3^4 \frac{1}{x} \mathrm{d}x + \ldots + \int_{2015}^{2016} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \\
&\qquad = \int_1^{2016} \frac{1}{x} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Newtoni-Leibnizi valemi põhjal

$$\int_1^{2016} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2016 - \ln 1 = \ln 2016.$$

Ent $\ln 2016 > \frac{13}{2}$, sest

$$\ln 2016 > \log_3 2016 > \log_3 1458 = 6 + \log_3 2 > 6 + \frac{1}{2},$$

kus viimane võrratus kehtib seetõttu, et $2 > \sqrt{3}$.

Eesti LXII matemaatikaolümpiaad

4. aprill 2015 — Lõppvoor — **9. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Toomas Krips)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud a-osa: 5 p

  Sealhulgas lahenduse järgi, mis vaatleb kaht viimast numbrit:
  - Tähele pandud, et arv lõpeb nulli või viiega: *1 p*
  - Tähele pandud, et nulliga lõppeva lahendi võib taandada lahendile, mis ei lõpe nulliga: *1 p*
  - Toodud idee uurida 5-ga lõppeva arvu kahe viimase numbri muutumist: *1 p*
  - Vastuolu tuletatud 5-ga lõppeva arvu juhul: *2 p*

  Sealhulgas žürii lahenduse järgi:
  - Arv viidud kujule $a \cdot 10^{m-3} + b$: *1 p*
  - Arv viidud kujule $a = \dfrac{2014b}{10^{m-3}}$: *1 p*
  - Vastuolu tuletatud: *3 p*
- Lahendatud b-osa: 2 p

2. *(Maksim Ivanov)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et $L = 1$: 1 p
- Põhjendatud, et A ainus võimalik väärtus on 2, millest järeldatud, et $V = 6$: 2 p
- Märgitud, et kehtib seos $I + 2 = N$, millest järeldatud, et paari (I, N) võimalikud väärtused on $(3, 5)$, $(5, 7)$ ja $(7, 9)$: 1 p
- Näidatud, et paaride $(I, N) = (3, 5)$ ja $(I, N) = (7, 9)$ korral tekib vastuolu ülesande tingimustega: 1 p
- Näidatud, et paari $(I, N) = (5, 7)$ korral leidub vaid üks vastus: 1 p
- Leitud vastus: 1 p

3. *(Kairi Kangro)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Korralikult näidatud, et lõigud AB, AE, BE, ED, BF, DF, DC, ja FC on ühepikkused; edasine lahenduskäik vigane või puudu: 3 p

Punkte võeti maha põhjenduste puudumise/ebatäielikkuse ja vigade eest.

4. *(Reimo Palm)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et vähem kui 24 sammuga ei saa: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:
  - Pole uuritud ühe tsükli vähimat sammude arvu: *0 p*
  - Väidetud, et ühe tsükli vähim sammude arv on 4, ilma põhjenduseta: *1 p*
  - Ühe tsükli vähima sammude arvu 4 põhjendus mittetäielik (nt pikkus 3 vaatamata vms puudujäägid): *2 p*

  Tõestatud, et 24 sammuga saab: 4 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:
  - Näide, mis asetab punasele ruudule kõik tahud, kuid rohkem kui 24 sammuga: *1 p*
  - Näite asemel on esitatud üldised selgitused: *2–3 p*
  - Näide üldjoontes õige, kuid väiksema puudujäägiga: *3 p*

5. *(Kaie Kubjas)* Lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem väljarebitud lehekülgede numbrite keskmise analüüsi järgi.

- Näidatud, et väljarebitud lehekülgi on paarisarv: 1 p
- Näidatud, et väljarebitud lehekülgede aritmeetiline keskmine on $x + 0.5$: 2 p
- Arv 452 tegurdatud: 1 p
- Eelneva põhjal leitud tegurid, millest pool sobib keskmiseks: 2 p
- Antud korrektne lõppvastus: 1 p

Skeem väljarebitud lehtede numbrite keskmise analüüsi järgi.

- Näidatud, et väljarebitud lehti (koosneb kahest leheküljest) on paarisarv: 1 p
- Näidatud, et väljarebitud lehtede keskmine on paaritu arv: 2 p
- Arv 452 tegurdatud: 1 p
- Eelneva põhjal leitud keskmiseks sobivad tegurid: 2 p
- Korrektne lõppvastus: 1 p

Skeem järjestikuste arvude summa tegurdamist kasutava lahenduse järgi.

- Summa $x + (x + 1) + \ldots + (x + y)$ tegurdatud: 2 p
- Arv 452 tegurdatud: 1 p
- Näidatud, et väljarebitud lehekülgi on paarisarv: 1 p
- Eelneva põhjal leitud tegurite sobiv vastavus tegurduste vahel: 2 p
- Antud korrektne lõppvastus: 1 p

Skeem variantide läbivaatusel põhinevate lahenduse järgi.

- Põhjendatud, et väljarebitud lehekülgi on vähem kui 30: 2 p
- Esitatud idee kõigi võimaluste läbiproovimiseks: 2 p
- Võimalused ammendavalt läbi proovitud: 2 p
- Antud korrektne lõppvastus: 1 p

Hindamisskeemid

1. *(Ivo Adermann)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Mainitud, et mingisugune 10 aste peab jaguma arvudega n ja $n+1$, või midagi sarnast: 1 p
- Teisendatud ülesanne kujule „Leia naturaalarvud a ja b, nii et 2^a ja 5^b erinevad ühe võrra“: 1 p
- Vaadatud läbi juht, kus $2^a = 5^b + 1$: 2 p
- Vaadatud läbi juht, kus $5^a = 2^b + 1$: 2 p
- Viidud lahendus õigesti lõpuni: 1 p

Ainult õige lõppvastuse eest anti 1 punkt.

2. *(Janno Veeorg)* Tüüpiliste žürii lahendusele 1 vastavate mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Õige lahendus mõne arvutusveaga: 6 p
- Saadud žürii lahenduse võrrand (2) või mõni sellega samaväärne võrrand: 2 p
- Saadud žürii lahenduse võrrand (1) või mõni sellega samaväärne võrrand: 2 p

Tüüpilistele žürii lahendusele 2 vastavate mõttekäikude eest anti punkte järgnevalt.

- Saadud kuupvõrrandiga $x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$ samaväärne võrrand ja leitud selle üks võimalik lahend: 5 p
- Avaldatud üks muutuja teise kaudu: 2 p
- Näide arvudest, mis rahuldavad neid võrduseid: 1 p

3. *(Laur Tooming)* Lahenduste allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Žürii lahendusele 1 vastav skeem:

- Ühendatud lõikude BP ja AB keskpunktid: 1 p
- Näidatud, et saadud lõik RQ on paralleelne lõiguga AP: 3 p
- Lahendus lõpule viidud: 3 p

Žürii lahendusele 2 vastav skeem:

- Konstrueeritud kolmnurk ABD, pikendades lõiku AC iseenda pikkuse võrra punktini D: 2 p
- Tähele pandud, et lõik BC on mediaan kolmnurgas ABD: 1 p
- Näidatud, et lõigu AP pikendus on mediaan kolmnurgas ABD: 2 p
- Tähele pandud, et lõigud RC ja BD on paralleelsed: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 1 p

Pindalade kaudu koostatud lahendusele vastav skeem:

- Tähele pandud, et $S_{APB} = 2S_{APC}$: 1 p
- Näidatud, et $S_{APC} = S_{APR}$: 2 p
- Näidatud, et punktid R ja C on samal kaugusel sirgest AP: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Kõige tavalisemad olid žürii lahendusega 2 sarnased lahendused.

4. *(Terje Hõim)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Ülesande mõlemad osad täielikult lahendatud: 7 p
- Ainult esimene osa lahendatud: 3 p
- Leitud mingi üldine valem $S(n)$ jaoks, kui n on paaris või paaritu, aga valem induktsiooni abil tõestamata: 1 p

5. *(Alisa Pankova)*

- Jaotatud kaheks juhuks: (1) $c = a^2$ ja (2) $b = a^2$, kus a, b on kaatetid ja c hüpotenuus: 1 p
- Täislahendus ühel neist juhtudest: 4 p

  Sealhulgas:
  - Jõutud võrrandini, millest saab tuletada midagi huvitavat: $b^2 = a^2(a^2 + 1)$, $b = a\sqrt{a^2 + 1}$ vms: *1 p*
  - Tehtud kasulikke tähelepanekuid: nt teades, et b jagub a-ga, on $a^2 + 1$ täisarvu $\dfrac{b}{a}$ ruut: *1 p*
  - Sõnastatud vastuolu: nt saame, et $n(n+1)$ peab olema täisruut, aga nii ei saa olla: *1 p*
  - Vastuolu tekkimine põhjendatud (kui on ilmne, siis põhjendust ei nõuta): *1 p*
- Täislahendus teisel neist juhtudest: 2 p

Kui esimese juhu lahenduse eest on teenitud vähemalt 3 p (nt vastuolu põhjendus on puudu), siis saab teise juhu eest endiselt 2 p, kui on tehtud analoogselt ja on sama viga.

Hindamisskeemid

1. *(Valdis Laan)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Polünoomi $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ tegurdamine: 2 p
- On näidatud, et $x^2 - x + 1$ ja $x - 1$ on sama algarvu astmed: 2 p
- On näidatud, et $\text{SÜT}(x - 1, x^2 - x + 1) = 1$: 1 p
- On vaadatud läbi juhud $x - 1 = 1$ ja $x^2 - x + 1 = 1$: 2 p

2. *(Ahti Peder)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Ülesande a-osa: 4 p

  Sealhulgas:
  - Tähele pandud, et arvud alati vähenevad ja ühekohalisteks saades jäävad korduma: *2 p*
  - Vähenemine korrektselt tõestatud: *2 p*

  Ülesande b-osa: 3 p

  Sealhulgas:
  - Õige vastus: *1 p*
  - Vastus põhjendatud näite toomise teel: *2 p*

Väite tõestamine vaid kahe- ja kolmekohaliste korral ei ole üldiselt piisav näitamaks, et väide kehtib kõikide positiivsete täisarvude jaoks. Selle eest võeti maha 1–2 punkti.

3. *(Andres Põldaru)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Arvestatud sellega, et kapi lühematest külgedest moodustatud ristkülik peab mahtuma ukse sisse: 1 p
- Tuletatud võrrandid või võrratused vajaliku pöördenurga jaoks või lõikude jaoks ukse nurkadest kapi nurkadeni: 3 p
- Võrrandid/võrratused õigesti lahendatud ja kontrollitud, et kapi pööramine ei liiguta kappi teises suunas ukse piiridest välja või et leitud lõigud annavad õige suurusega ja täisnurkse kapi: 3 p

4. *(Ago-Erik Riet)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Aru saadud, et on vaja kontrollida 9-ga ja 11-ga jaguvust: 1 p
- Korrektselt kontrollitud 9-ga jaguvust: 1 p
- Sõnastatud mingi lihtsasti kasutatav 11-ga jaguvuse tunnus, nagu näiteks, et paaris- ja paaritutel kohtadel olevate numbrite summade vahe jagub 11-ga: 2 p
- Leitud, et paariskohtadel olevate numbrite summa peab olema 17 või 28 ja paaritutel kohtadel olevate numbrite summa vastavalt 28 või 17: 1 p
- Arvutus õigesti lõpule viidud: 2 p

Skeemi viimase rea eest sai 1 punkti, kui enamus arvutusest oli õige, aga oli tehtud mõni väike arvutusviga.

Lahenduste eest, kus 9-ga jaguvuse kontroll oli õige, aga 11-ga jaguvuse tunnus ebatäpne, näiteks, et paaris- ja paaritutel kohtadel olevate numbrite summad peaksid olema võrdsed, sai 3 punkti.

5. *(Oleg Košik)* Lahenduste korral, mis taanduvad teatud trigonomeetriliste võrratuste uurimisele (nagu žürii lahendus 2 või 3) allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Ülesanne taandatud trigonomeetrilise võrratusele (näiteks võrratusele $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \geqslant \frac{1}{2}$ või võrratusele $\sin^3\alpha + \cos\alpha \geqslant 1$): 3 p
- Analüüsitud lihtsam juht (vastavalt $\alpha < 30^\circ$ või $\alpha > 90^\circ$): 1 p
- Analüüsitud raskem juht: 3 p

Ülesande mõlemal osal leidus palju erinevaid lahendusi, ka lisaks žürii väljapakutud kolmele.

Ainult juhu $\alpha < 30^\circ$ õige lahenduse eest võis üldjuhul saada 4 punkti. Ainult nürinurkne juhu sellise lahenduse eest, mis ei sisalda oluliselt kasulikku juhu $\alpha < 30^\circ$ jaoks, sai 3 punkti.

Üksikuid punkte sai mõne üksiku kasuliku tähelepaneku või valemi eest, nagu näiteks et kolmnurga külg ei saa olla pikem kahekordsest raadiusest, või et täisnurkse võrdhaarse kolmnurga korral kehtib võrdus. Üksikute tähelepanekute/valemite punkte liideti ainult juhul, kui õiges lahenduses võib märgatavat kasu olla mõlemast tähelepanekust korraga.

Hindamisskeemid

1. *(Urve Kangro)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Leitud mingi lahendite jada: 7 p
- Lahendus muidu õige, aga lõppvastus vigane: 6 p
- Tehtud kasulikke tähelepanekuid: 1 p
- Ülesanne taandatud lihtsamale kujule: 1 p

Ülesanne oli 0-7 tüüpi. Kellel oli idee lahendite leidmiseks, see sai üldiselt täispunktid. Enamus õpilasi, kes ülesande ära lahendasid, otsisid lahendit 2 astmete kujul (žürii lahendus 1), üks töö vastas ka žürii lahendusele 2.

2. *(Indrek Zolk)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestus, et ainsad ülesande tingimusi rahuldavad funktsioonid on kujul $f(x) = A|x|$, kus A on mingi konstant: 5 p
- Konstandi A kõigi võimalike väärtuste leidmine: 2 p

Tööd, kus esines üks või kaks, aga mitte kolm, lahendit (koos kontrolliga, kui see pole ilmne ega järeldunud juba lahenduskäigust), said skeemi teise rea eest 1 punkti.

Halva üllatusena selgus, et paljudes töödes oli algusest peale (või mingitele võrrandi väliskujust motiveeritud intuitiivsetele kaalutlustele tuginedes) vaadeldud ainult teatud spetsiaalsel kujul funktsioone, nagu näiteks $f(x) = ax$ või $f(x) = a|x|$. Teisiti öeldes, implikatsioone kujul

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(f(xy)) = |x|f(y) + 3f(xy)$$

$$\Downarrow$$

mingi loogiline lause

$$\Downarrow$$

mingi uus loogiline lause

esines vaid vähestes töödes. Selliste implikatsioonide (mis saadakse sageli asendustega $x = 0$, $x = 1$, $x = -y$, $x \leftrightarrow y$ jne) läbiviimine moodustab praktiliselt alati põhilise osa tööst funktsionaalvõrrandite lahendamisel. Ühelgi juhul aga ei ole pelgalt mingi kitsa funktsioonide klassi (nt lineaarfunktsioonid, polünoomid, trigonomeetrilised funktsioonid, logaritmid vmt) läbivaatamine tõsiseltvõetav meetod funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sisaldava funktsionaalvõrrandi lahendamiseks, kuna suurem hulk funktsioone jääb sel korral alati läbi vaatamata.

3. *(Kaur Aare Saar)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Täislahendus üksikute puudustega: 6 p
- Leitud seos, mis kirjeldab siseringjoone ja ümberingjoone raadiuste suhet: 5 p
- Näidatud, et võrdhaarse kolmnurga korral kehtib võrdus: 2 p
- Mõni üksik kasulik tähelepanek: 1 p

Mitmed lahendajad eeldasid intuitiivselt, et võrdhaarse kolmnurga korral on suhe $\frac{R}{r}$ vähim. Selline väide vajab matemaatilist tõestust.

4. *(Peeter Laud)* Olgu $\mathscr{A}$ väide „Hulga $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ alamhulkade summad on mingi aritmeetilise jada 2^n järjestikust elementi mingis järjekorras“ ja $\mathscr{B}$ väide „Arvud $|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n-1}|$ suhtuvad nagu $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$“.

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud $\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B}$: 4 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:
  - Tõestus tehtud ainult positiivsete $x_0, \ldots, x_{n-1}$ jaoks: *2 p*
  - Induktsiooniga mindud n-elemendiliselt hulgalt $(n+1)$-elemendilisele hulgale, põhjendamata, et kõik $(n+1)$-elemendilised hulgad on niimoodi saadavad: *0 p*

  Tõestatud $\mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A}$: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste osaliste mõttekäikude eest:
  - Tõestatud ainult positiivsete $x_0, \ldots, x_{n-1}$ jaoks: *2 p*
  - Leitud, et tekkiv aritmeetiline jada on kuidagi seotud arvude $0, \ldots, 2^n - 1$ kahendesitustega: *1 p*
  - Märgatud, et mingi arvu x_i märgi muutmisel jääb väide $\mathscr{A}$ kehtima: *1 p*

5. *(Nikita Salnikov-Tarnovski)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Idee kasutada integraali summa hindamiseks: 3 p
- Tõestatud, et otsitav summa on suurem, kui määratud integraal 1-st 2015-ni funktsioonist $y = \frac{1}{x}$: 2 p
- Korrektne tõestus, et $\ln 2015 > 6{,}5$: 2 p