# Lõppvoor 2014

# Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

8. märts 2014 Lõppvoor **9. klass**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Korrutises

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$$

on murdude nimetajateks kõik paaritud naturaalarvud 1-st $(2n-1)$-ni. Kas saab valida 1-st suurema naturaalarvu $n$ nii, et see korrutis oleks täisarv?

**2.** Rong väljus lähtejaamast 12 minutit ettenähtust hiljem. Kui rong jätaks kõik vahepeatused tegemata ja sõidaks sihtjaamani sama keskmise kiirusega, nagu sõiduplaani järgi sõites oleks sel rongil peatustevahelistel lõikudel, siis jõuaks ta sihtjaama täpselt õigeks ajaks. Kui aga rong peatuks kõigis ettenähtud peatustes ettenähtud aja, siis peaks ta peatustevahelistel lõikudel sõitma ettenähtust 40% suurema keskmise kiirusega, et õigel ajal sihtjaama jõuda. Kui kaua peaks rong sõiduplaani kohaselt teel olema?

**3.** Kolmnurga $ABC$ külgedel $BC$, $CA$ ja $AB$ leiduvad vastavalt punktid $D$, $E$ ja $F$ nii, et punktid $A$, $B$, $D$, $E$ asuvad ühel ringjoonel, punktid $B$, $C$, $E$, $F$ asuvad ühel ringjoonel ning punktid $A$, $C$, $D$, $F$ asuvad samuti ühel ringjoonel. Kas selleks on kindlasti vaja, et kolmnurk $ABC$ oleks võrdkülgne?

**4.** Leia suurim naturaalarv $n$, mille korral saab kuubil valida sellised $n$ tippu, millest ükski kolm pole täisnurkse kolmnurga tipud.

**5.** Juku kirjutab paberile kõikvõimalikud 20-kohalised arvud, milles numbrid 3, 4, 5 ja 6 esinevad mingis järjekorras igaüks 5 korda järjest. Tõesta, et kirjutatud arvude seast saab valida sellised kaks, mille vahe jagub 207-ga.

# Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

8. märts 2014 Lõppvoor **10. klass**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Olgu $a$ ja $n$ positiivsed täisarvud. Tõesta, et

$$\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor = a.$$

*Märkus.* Iga reaalarvu $x$ korral tähistab $\lfloor x \rfloor$ arvu $x$ *täisosa*, st suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu $x$.

**2.** Olgu $a$, $b$ ja $c$ reaalarvud, mille korral $abc = 1$. Tõesta, et

$$\frac{1}{1+a^{2014}} + \frac{1}{1+b^{2014}} + \frac{1}{1+c^{2014}} > 1.$$

**3.** Teravnurkses kolmnurgas $ABC$ lõikuvad tipust $B$ tõmmatud kõrgus ja tipust $C$ tõmmatud nurgapoolitaja punktis $D$. Olgu $E$ punktiga $D$ sümmeetriline punkt sirge $AC$ suhtes. On teada, et punktid $A$, $B$, $C$ ja $E$ asuvad ühel ringjoonel. Tõesta, et kolmnurk $ABC$ on võrdhaarne.

**4.** Milliste positiivsete täisarvude $k$ korral saab kõik arvud $1, 2, 3, \ldots, (2k)^2$ paigutada $2k \times 2k$ tabelina nii, et ühegi rea ega veeru arvude summa ei oleks $k$-ga sama paarsusega?

**5.** Olgu $m$ positiivne täisarv. Tõesta, et kui Mari kirjutab tahvlile vähemalt $m + 3$ arvu, siis Jüril on võimalik valida neist 4 arvu nii, et mingi kahe valitud arvu ja ülejäänud kahe valitud arvu summad annavad $m$-ga jagades sama jäägi.

# Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

8. märts 2014 | Lõppvoor | **11. klass**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Kui palju on positiivseid täisarve $n$, mille korral arv $2014 \cdot n$ jagub arvuga $2014 + n$?

**2.** Tõesta, et mistahes positiivsete reaalarvude $a$, $b$ ja $c$ korral

$$\frac{1+ab}{c} + \frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} > \sqrt{a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}.$$

**3.** Malle joonistas rombi $ABCD$ ning valis küljel $AB$ punkti $E$ ja küljel $BC$ punkti $F$ nii, et kolmnurk $DEF$ tuli võrdkülgne. Suur oli Malle imestus, kui ta avastas veel teisegi võimaluse valida sama rombi küljel $AB$ punkt $E$ ja küljel $BC$ punkt $F$ nii, et $DEF$ on võrdkülgne. Millised saavad olla selle rombi nurkade suurused?

**4.** Ruudustikus mõõtmetega $2n \times 2n$ on täpselt pooled ruudud värvitud mustaks ja ülejäänud valgeks. Ühel sammul võib vabalt valida selle ruudustiku ruudu mõõtmetega $2 \times 2$ ja peegeldada tema nelja ühikruudu värvid selle $2 \times 2$ ruudu horisontaalse või vertikaalse kesktelje suhtes. Milliste positiivsete täisarvude $n$ korral on suvalise algse ruutude värvimise korral võimalik selliste sammudega jõuda olukorda, kus kogu ruudustik on värvitud malekorras?

**5.** Raamatukogu töötab 31-päevaste tsüklitena. Iga tsükli viimasel päeval on raamatukogu inventuuri tõttu suletud. Igal raamatulaenutamisel märgitakse tagastamispäevaks üldjuhul laenutamispäevast $a$ päeva võrra hilisem päev, kus $a$ on mingi fikseeritud positiivne täisarv; kui see aga langeks inventuuripäevale, siis on tagastamispäev veel päeva võrra hiljem. Suur raamatusõber Jaak laenutab mingil päeval raamatukogust raamatu; laenutatud raamatu tagastab ta alati ettenähtud tagastamispäeval ja laenutab siis kohe uue. Tõesta, et kui 30 jagub arvuga $a$, siis teatud aja möödudes hakkab Jaak igal inventuurile vahetult järgneval päeval raamatukogus käima.

# Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

8. märts 2014 | Lõppvoor | **12. klass**

*Lahendamisaega on 5 tundi.*
*Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.*
*Taskuarvutit kasutada ei lubata.*

**1.** Ats ja Pets mõtlesid kumbki kaks positiivset täisarvu, mis ei ületa teatud positiivset täisarvu $n$. Kui kumbki liitis enda mõeldud arvud, andsid saadud summad arvuga $n$ jagades võrdsed jäägid. Kui aga kumbki korrutas enda mõeldud arvud, andsid saadud korrutised arvuga $n$ jagades jällegi võrdsed jäägid. Kas võib kindlalt väita, et Ats ja Pets mõtlesid samad arvud, kui

a) $n = 99$?

b) $n = 101$?

**2.** Leia kõik reaalarvude paarid $(x, y)$, mis rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + \sin x &= y \\ y + \sin y &= x \end{cases}.$$

**3.** Olgu $I$ kolmnurga $ABC$ siseringjoone keskpunkt. Olgu $R_A$, $R_B$ ja $R_C$ vastavalt kolmnurkade $BIC$, $CIA$ ja $AIB$ ümberringjoonte raadiused ning $R$ kolmnurga $ABC$ ümberringjoone raadius. Tõesta, et

$$R_A + R_B + R_C \leqslant 3R.$$

**4.** Tahvlile kirjutatakse mingi positiivne täisarv $n$ ühe korra, seejärel kirjutatakse arvu $n-1$ kaks korda jne, igal järgneval sammul kirjutatakse viimati tahvlile kirjutatud arvudest ühe võrra väiksemat arvu kaks korda rohkem kordi. Nullideni jõudmisel lõpetatakse. Tõesta, et lõpuks tahvlil olevate arvude summa on väiksem kui $2^{n+1}$.

**5.** Leia kõik positiivsete täisarvude paarid $(x, y)$, mille korral

$$x(x+1) = y(y+1)(y^2+1).$$

## LXI Олимпиада Эстонии по математике

8 марта 2014 г. Заключительный тур **9 класс**

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**1.** В произведении

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$$

знаменателями дробей являются все нечётные натуральные числа от 1 до $2n-1$. Можно ли выбрать такое натуральное число $n$ больше 1, что это произведение будет целым числом?

**2.** Поезд выехал от начальной станции на 12 минут позже расписания. Если поезд не будет делать промежуточных остановок, а поедет на конечную станцию с той же средней скоростью, с которой он должен был бы ехать между остановками согласно расписанию, то прибудет на конечную станцию точно по расписанию. Если же поезд будет останавливаться на всех предназначенных остановках предназначенное для этого время, то чтобы прибыть на конечную станцию по расписанию, поезду придётся между остановками ехать со средней скоростью на 40% выше предназначенной. Какое время должен поезд быть в пути согласно расписанию?

**3.** На сторонах $BC$, $CA$ и $AB$ треугольника $ABC$ можно найти соответственно такие точки $D$, $E$ и $F$, что точки $A$, $B$, $D$, $E$ принадлежат одной окружности, точки $B$, $C$, $E$, $F$ принадлежат одной окружности, а также точки $A$, $C$, $D$, $F$ принадлежат одной окружности. Обязательно ли для этого, чтобы треугольник $ABC$ был равносторонний?

**4.** Найти наибольшее натуральное число $n$, при котором у куба можно выбрать $n$ вершин так, что никакие три из них не будут вершинами прямоугольного треугольника.

**5.** Юра записывает на бумагу все возможные 20-значные числа, в которых цифры 3, 4, 5 и 6 представлены в каком-то порядке каждая по 5 раз подряд. Доказать, что среди записанных на бумаге чисел можно выбрать два таких, разность которых будет делиться на 207.

# LXI Олимпиада Эстонии по математике

8 марта 2014 г. Заключительный тур **10 класс**

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**1.** Пусть $a$ и $n$ – целые положительные числа. Доказать, что

$$\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor = a.$$

*Примечание.* Для каждого действительного числа $x$, $\lfloor x \rfloor$ обозначает *целую часть* числа $x$, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее $x$.

**2.** Пусть $a$, $b$ и $c$ – действительные числа, при которых $abc = 1$. Доказать, что

$$\frac{1}{1+a^{2014}} + \frac{1}{1+b^{2014}} + \frac{1}{1+c^{2014}} > 1.$$

**3.** В остроугольном треугольнике $ABC$ высота из вершины $B$ и биссектриса из вершины $C$ пересекаются в точке $D$. Пусть $E$ – точка, симметричная точке $D$ относительно прямой $AC$. Известно, что точки $A$, $B$, $C$ и $E$ принадлежат одной окружности. Доказать, что треугольник $ABC$ равнобедренный.

**4.** При каких положительных целых числах $k$ можно все числа $1, 2, 3, \ldots, (2k)^2$ расположить таблицей $2k \times 2k$ так, что сумма чисел ни одной строки и ни одного столбца не будет той же чётности, что и $k$?

**5.** Пусть $m$ – положительное целое число. Доказать, что если Маша запишет на доске по меньшей мере $m + 3$ числа, то у Пети всегда будет возможность выбрать из них 4 таких, что сумма каких-то двух выбранных чисел и сумма остальных двух выбранных чисел будут давать равные остатки при делении на $m$.

# LXI Олимпиада Эстонии по математике

8 марта 2014 г. Заключительный тур **11 класс**

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**1.** Сколько существует целых положительных чисел $n$, при которых число $2014 \cdot n$ делится на $2014 + n$?

**2.** Доказать, что при любых положительных действительных числах $a$, $b$ и $c$ выполняется неравенство

$$\frac{1+ab}{c} + \frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} > \sqrt{a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}.$$

**3.** Мила нарисовала ромб $ABCD$ и на стороне $AB$ выбрала точку $E$, а на стороне $BC$ точку $F$ так, что треугольник $DEF$ вышел равносторонним. Каково же было удивление Милы, когда она обнаружила ещё одну возможность выбрать точки $E$ на стороне $AB$ и $F$ на стороне $BC$ этого ромба, чтобы $DEF$ оказался равносторонним! Какими могут быть величины углов этого ромба?

**4.** У клетчатого поля размером $2n \times 2n$ ровно половина клеток чёрные, а остальные белые. За один шаг можно на этом поле произвольным образом выбрать квадрат размером $2 \times 2$ и зеркально отразить цвета его четырёх клеток относительно горизонтальной или вертикальной центральной оси этого $2 \times 2$ квадрата. Для каких целых положительных чисел $n$ возможно, исходя из ситуации с любой начальной раскраской, с помощью описанных шагов придти к ситуации, в которой поле раскрашено в шахматном порядке?

**5.** Библиотека работает по 31-дневным циклам. В последний день каждого цикла библиотека закрыта на инвентуру. При выдаче книги днём возврата обычно назначают день, который на $a$ дней позже дня выдачи, где $a$ – это какое-то фиксированное целое положительное число; однако если этот день выпадает на день инвентуры, то днём возврата назначают следующий за ним день. Искушённый книголюб Антон однажды берёт из библиотеки книгу; взятую книгу он всегда возвращает в положенный день возврата и сразу же берёт новую. Доказать, что если 30 делится на $a$, то спустя некоторое время Антон будет заходить в библиотеку в каждый день, следующий непосредственно за инвентурой.

# LXI Олимпиада Эстонии по математике

8 марта 2014 г. Заключительный тур **12 класс**

*Время, отводимое для решения: 5 часов.*
*Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.*
*Пользоваться калькулятором не разрешается.*

**1.** Алиса и Василий задумали по два целых положительных числа, не превышающих заданное целое положительное число $n$. Когда каждый из них сложил свои числа, оказалось, что полученные суммы имеют равные остатки при делении на $n$. Когда каждый из них перемножил свои числа, то полученные произведения также имели равные остатки при делении на $n$. Можно ли с уверенностью утверждать, что Алиса и Василий задумали одни и те же числа, если

а) $n = 99$?

б) $n = 101$?

**2.** Найти все пары действительных чисел $(x, y)$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + \sin x = y \\ y + \sin y = x \end{cases}.$$

**3.** Пусть $I$ обозначает центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$. Пусть радиусы окружностей, описанных вокруг треугольников $BIC$, $CIA$ и $AIB$, равны соответственно $R_A$, $R_B$ и $R_C$, а радиус окружности, описанной вокруг треугольника $ABC$, равен $R$. Доказать, что

$$R_A + R_B + R_C \leqslant 3R.$$

**4.** На доске записывается какое-то целое положительное число $n$ один раз, затем записывается число $n - 1$ два раза и т.д., на каждом следующем шагу на доске записывается число на один меньшее предыдущего в два раза больше раз. При достижении нуля процесс заканчивается. Доказать, что в конце концов сумма чисел на доске будет меньше чем $2^{n+1}$.

**5.** Найти все пары целых положительных чисел $(x, y)$, при которых

$$x(x + 1) = y(y + 1)(y^2 + 1).$$

# Lahendused

**1.** *Vastus:* ei.

Antud korrutist teisendades saame

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1} = \frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}.$$

Et see oleks täisarv, peaks arv $2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n$ jaguma arvuga $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$. Kuna aga

$$2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n = (2\cdot1)\cdot(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)\cdot\ldots\cdot(2\cdot n) = 2^n\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n)$$

ja arv $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$ on paaritu, siis peaks arv $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ jaguma arvuga $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$. Juhul $n>1$ on see võimatu, sest $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n < 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$.

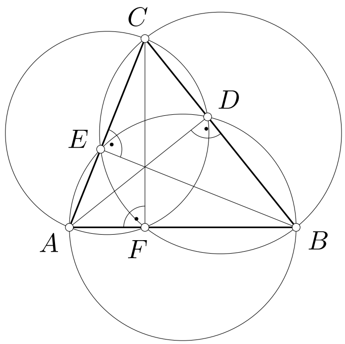
*Märkus.* Seda, et juhul $n \geqslant 2$ pole murru $\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$ väärtus täisarv, saaks lühemalt näidata Tšebõšovi teoreemi abil, mille kohaselt leidub $n \geqslant 2$ korral arvude $n$ ja $2n$ vahel vähemalt üks algarv. Kuna see algarv on kindlasti paaritu, esineb ta nimetajas oleva korrutise tegurite seas. Lugejas aga on kõik tegurid kujul $2i$, kus $i \leqslant n$, mistõttu lugeja tegurid ei jagu $n$-st suuremate algarvudega. Seega ei saa vaadeldava murru nimetajat välja taandada.

**2.** *Vastus:* 54 minutit.

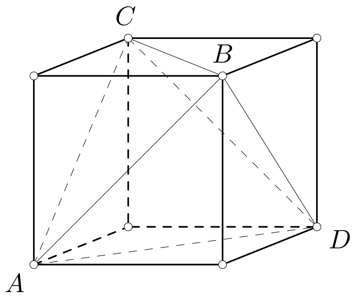
Olgu otsitav sõiduaeg $t$. Leiame hilinenud rongi puhta sõiduaja (ilma seisuaegadeta) kahel ülesandes kirjeldatud juhul. Kui rong peatusi ei tee, siis on puhas sõiduaeg ilmselt $t-12\,\text{min}$. Vastavalt andmetele on rongi plaanijärgne kiirus seisuaegade mahaarvamisel niisama suur kui 12-minutilisel hilinemisel, mistõttu on rongi plaanijärgne seisuaeg vahepeatustes kokku võrdne hilinemisega ehk 12 minutit. Seega kui rong lisaks hilinemisele teeb ka peatusi, on puhas sõiduaeg $t-24\,\text{min}$. Kiirus viimasel juhul on 40% võrra ehk 1,4 korda suurem; kuna läbitud vahemaa on sama, kehtib võrdus

$$t-12\,\text{min} = 1{,}4\cdot(t-24\,\text{min}),$$

kust $0{,}4t = 21{,}6\,\text{min}$ ehk $t = 54\,\text{min}$.




Joonis 1




Joonis 2

**3.** *Vastus:* ei.

Näitame, et $ABC$ võib olla suvaline teravnurkne kolmnurk. Olgu $D$, $E$ ja $F$ vastavalt tippudest $A$, $B$ ja $C$ tõmmatud kõrguste aluspunktid (joonis 1). Et $\angle ADB = 90^\circ = \angle AEB$, asuvad $D$ ja $E$ ringjoonel diameetriga $AB$. Analoogiliselt asuvad $E$ ja $F$ ringjoonel diameetriga $BC$ ning $F$ ja $D$ ringjoonel diameetriga $CA$. Ülesande tingimused on seega täidetud, nii et kolmnurga võrdkülgsust vaja ei ole.

**4.** *Vastus:* 4.

Olgu kuubi mingi tipp $A$ ja olgu $B$, $C$ ja $D$ tipu $A$ vastastipud neil kolmel tahul, millele $A$ kuulub (joonis 2). Siis ka tippudest $B$, $C$ ja $D$ mistahes kaks on kuubi mingi tahu vastastipud. Seega mistahes kaks tippu valitud neljast asuvad teineteisest kuubi tahu diagonaali pikkuse kaugusel. Järelikult on iga kolm valitud tippu võrdkülgse, mitte täisnurkse kolmnurga tippudeks.

Vaatame nüüd olukorda, kus valitakse vähemalt 5 tippu. Kaks vastastahku hõlmavad kokku kõik kuubi tipud. Seega vähemalt ühel kahest vastastahust peab olema vähemalt 3 valitud tippu. Ruudu kolm tippu aga moodustavad täisnurkse kolmnurga.

**5.** Et $207 = 9 \cdot 23$ ning 9 ja 23 on ühistegurita, siis piisab leida vahe, mis jagub arvudega 9 ja 23. Kõik paberile kirjutatud 20-kohalised arvud jaguvad ise 9-ga, sest nende kõigi ristsumma on $(3+4+5+6)\cdot 5$ ehk 90. Seega jaguvad ka kõigi nende arvude vahed 9-ga. Jääb üle näidata, et mingi kahe paberile kirjutatud arvu vahe jagub 23-ga. Selleks paneme tähele, et numbrite 3, 4, 5 ja 6 omavahelise esinemisjärjekorra valikuks on 24 võimalust. Seega on paberil 24 arvu, samas kui võimalikke erinevaid jääke 23-ga jagamisel on 23. Järelikult leidub kirjutatud arvude seas kaks sellist, mis annavad 23-ga jagades võrdsed jäägid. Nende arvude vahe jagubki 23-ga.

## Lahendused

**1.** *Lahendus 1.* Murdude lugejad $a, a+1, \ldots, a+n-1$ on $n$ järjestikust täisarvu. Seega leidub nende seas mingi $n$-ga jaguv arv $a+i$, kus $0 \leqslant i < n$; olgu $a+i = dn$. Täpselt $n$ järjestikust täisarvu alates arvust $dn$ annavad $n$-ga jagamisel sama täisosa $d$, eelnevad $n$ täisarvu annavad siis täisosa $d-1$. Seega antud summa $n-i$ tagumist liidetavat $\left\lfloor \frac{a+i}{n} \right\rfloor$ kuni $\left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor$ on kõik võrdsed arvuga $d$, neile eelnevad $i$ liidetavat on aga võrdsed arvuga $d-1$. Kokkuvõttes

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor &= (d-1)\cdot i + d\cdot(n-i) = \\ &= di - i + dn - di = \\ &= dn - i = a.\end{aligned}$$

*Lahendus 2.* Olgu $\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = q$; siis $a = qn + r$, kus $0 \leqslant r < n$. Jaotame ülesandes antud liidetavad kahte rühma: esimeses on $n-r$ liidetavat, kus murru lugejad on võrdsed arvudega $qn+r$ kuni $qn+(n-1)$, ja teises ülejäänud $r$ liidetavat, kus murru lugejad on võrdsed arvudega $q(n+1)$ kuni $q(n+1)+(r-1)$. Esimese $n-r$ murru täisosad on ilmselt võrdsed arvuga $q$ ja tagumise $r$ murru täisosad arvuga $q+1$. Seega

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor &= q\cdot(n-r) + (q+1)\cdot r = \\ &= qn - qr + qr + r = \\ &= qn + r = a.\end{aligned}$$

*Lahendus 3.* Teeme induktsiooni $a$ järgi. Kui $a = 0$, siis murdude lugejad on $0, 1, \ldots, n-1$, mis on kõik $n$-st väiksemad naturaalarvud. Seega kõik liidetavad täisosad on võrdsed 0-ga ning summa tuleb 0 nagu tarvis. Induktsiooni sammuks piisab võrduste ahelast

$$\left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{a+n}{n} \right\rfloor = a - \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{n} + 1 \right\rfloor = a - \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + 1 = a + 1.$$

**2.** *Lahendus 1.* Tähistame $a^{2014} = u$, $b^{2014} = v$ ja $c^{2014} = w$; siis $abc = 1$ tõttu ka $uvw = 1$. Et tõestatava võrratuse vasaku poole murdude nimetajad on positiivsed, saame arvuga $(1+u)(1+v)(1+w)$ läbi korrutades samaväärse võrratuse

$$(1+v)(1+w) + (1+w)(1+u) + (1+u)(1+v) > (1+u)(1+v)(1+w).$$

Avades sulud, saame vasakul $1+w+v+vw+1+u+w+wu+1+v+u+uv$, paremal aga $1+w+v+vw+u+uw+uv+uvw$. Liikmete viimisel ühele poole koos sarnaste liikmete koondamise ning võrduse $uvw = 1$ kasutamisega jääb järele tõestatavaga samaväärne võrratus

$$1+u+v+w > 0.$$

Viimane aga ilmselt kehtib, sest $u$, $v$ ja $w$ on positiivsed.

*Lahendus 2.* Tähistame $a^{2014} = u$, $b^{2014} = v$ ja $c^{2014} = w$. Siis $abc = 1$ tõttu ka $uvw = 1$. Seega leiduvad sellised positiivsed reaalarvud $x$, $y$, $z$, et $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{z}$ ja $w = \frac{z}{x}$. Ülesande võrratus teisendub kujule

$$\frac{1}{1+\frac{x}{y}} + \frac{1}{1+\frac{y}{z}} + \frac{1}{1+\frac{z}{x}} > 1$$

ehk kujule

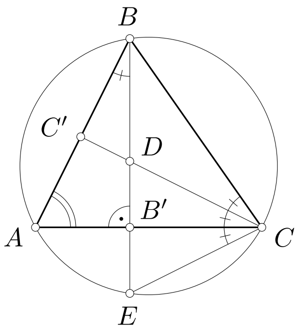
$$\frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{x}{z+x} > 1.$$

Ilmselt kehtivad aga võrratused $\frac{y}{x+y} > \frac{y}{x+y+z}$, $\frac{z}{y+z} > \frac{z}{x+y+z}$ ja $\frac{x}{z+x} > \frac{x}{x+y+z}$. Nende võrratuste kokkuliitmisel vajalik võrratus tekibki.

*Lahendus 3.* Tähistame $a^{2014} = u$, $b^{2014} = v$ ja $c^{2014} = w$; siis $abc = 1$ tõttu ka $uvw = 1$. Olgu üldisust kitsendamata $w$ arvudest $u$, $v$, $w$ maksimaalne. Siis $w \geqslant 1$, sest vastasel korral oleksid $u$, $v$, $w$ väiksemad 1-st ega saaks anda korrutiseks arvu 1. Seega $uv \leqslant 1$. Nüüd

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} - 1 &= \frac{(1+v)+(1+u)-(1+u)(1+v)}{(1+u)(1+v)} = \\ &= \frac{1-uv}{(1+u)(1+v)} \geqslant 0.\end{aligned}$$

Seega $\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} \geqslant 1$, millest $\frac{1}{1+w}$ positiivsuse tõttu järeldub ka ülesande võrratus.




Joonis 3

**3.** *Lahendus 1.* Olgu $B'$ sirgete $BD$ ja $AC$ lõikepunkt ning $C'$ sirgete $CD$ ja $AB$ lõikepunkt (joonis 3). Sümmeetriast ja piirdenurkade võrdsusest saame

$$\angle ACC' = \angle ACD = \angle ACE = \angle ABE = \angle ABB'.$$

Et kolmnurkadel $ABB'$ ja $ACC'$ on tipu $A$ juures ühine nurk, on need kolmnurgad tunnuse NN põhjal sarnased. Järelikult on võrdsed ka kolmandad nurgad ehk $\angle AC'C = \angle AB'B = 90°$. Seega $CC'$ on kolmnurga $ABC$ kõrgus, st tipust $C$ tõmmatud nurgapoolitaja ja kõrgus langevad kokku. Järelikult on kolmnurk $ABC$ võrdhaarne.

*Lahendus 2.* Kasutame tuntud teoreemi, mille kohaselt kolmnurga kõrguste lõikepunkt peegeldub kolmnurga igast küljest kolmnurga ümberringjoonele. Kuna kolmnurga $ABC$ ümberringjoone punkt $E$ asub tipust $B$ tõmmatud kõrguse pikendusel, on just tema kolmnurga $ABC$ kõrguste lõikepunkti peegeldus küljest $AC$. Seega $D$ on kolmnurga $ABC$ kõrguste lõikepunkt. Et tipust $C$ tõmmatud nurgapoolitaja läbib seda punkti, langeb ta kõrgusega kokku. Järelikult on kolmnurk $ABC$ võrdhaarne.

**4.** *Vastus:* iga $k \geqslant 2$ korral.

*Lahendus 1.* Näitame algul, et nõutud paigutus pole võimalik $k = 1$ korral, kus arvud $1, 2, 3, 4$ tuleks kirjutada $2 \times 2$ tabelina. Et kõik rea- ja veerusummad oleksid paaris, peaksid mõlemad tabelisse kirjutatavad paaritud arvud olema korraga samas reas ja ka samas veerus. See ilmselt pole võimalik.

Järgnevas tähistagu 0 ja 1 vastavalt suvalist paaris- ja paaritut arvu; ülesande tingimuste täitmiseks tuleb neid paigutada $2k \times 2k$ tabelisse võrdsel arvul nii, et iga rea ja veeru ühtede arv on $k$-st erineva paarsusega. Juhul $k = 2$ on üks võimalik ülesande tingimusi rahuldav paigutusviis kujutatud joonisel 4. Näitame, kuidas saada suvalisest tingimusi rahuldavast paigutusest $k$ korral tingimusi rahuldav paigutus $k + 1$ jaoks. Selleks lisame esimese $k - 1$ rea lõppu $0$, $1$ ning ülejäänud $k + 1$ rea lõppu $1$, $0$. Sarnaselt

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |

Joonis 4

$$
\begin{array}{cccccc|ccl}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \Big\}\ \begin{matrix} k-1 \\ \text{rida} \end{matrix} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \Big\}\ \begin{matrix} k+1 \\ \text{rida} \end{matrix} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & 0 & \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \\
1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \\
\multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{1 \cdots 1}}_{\begin{matrix} k-1 \\ \text{veergu} \end{matrix}}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{0 \cdots 0}}_{\begin{matrix} k+1 \\ \text{veergu} \end{matrix}}} & & &
\end{array}
$$

Joonis 5

lisame esimese $k-1$ veeru alla 0, 1 ning ülejäänud $k+1$ veeru alla 1, 0. Lõpuks kirjutame seni täitmata paremasse alumisse nurka 0, 1 ja 1, 0 (joonis 5). Et nulle ja ühtesid lisame võrdselt, on ka tulemusena saadud tabelis neid kokku võrdselt. Tehtud lisandustega muutub iga rea ja veeru ühtede arvu paarsus vastupidiseks, st kui enne oli ühtede arv $k$-st erineva paarsusega, siis nüüd on see $(k+1)$-st erineva paarsusega. Et igas lisandunud reas ja veerus on kas $k$ või $k+2$ ühte, on ka neis ridades ja veergudes ühtede arv $(k+1)$-st erineva paarsusega. Järelikult saadud paigutus rahuldab ülesande tingimusi. Alustades nõuetekohasest paigutusest $k=2$ jaoks ja korrates kirjeldatud samme piisav arv kordi, saame leida ülesandes nõutud arvude paigutuse suvalise $k \geqslant 2$ jaoks.

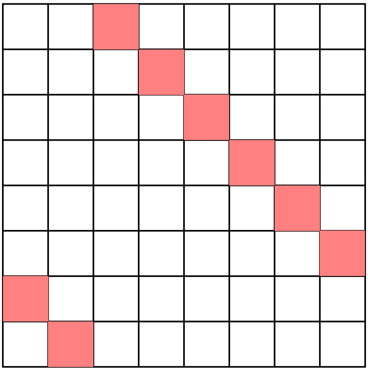
*Lahendus 2.* Nõuetekohase konstruktsiooni iga $k \geqslant 2$ jaoks saame anda ka teisiti. Nagu eelmises lahenduses, tähistagu suvalist paarisarvu 0 ja paaritut arvu 1. Juhtudel $k=2$ ja $k=3$ on sobivad arvude paigutused esitatud vastavalt joonisel 6 ja 7. Näitame, kuidas saada suvalisest tingimusi rahuldavast paigutusest $k$ korral tingimusi rahuldav paigutus $k+2$ jaoks. Täiendame algul $2k \times 2k$ tabelit vaid nullidega, mille paigutame vööna laiusega

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

Joonis 6

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Joonis 7



Joonis 8

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | | | | | | 0 |
| 1 | | 1 | | | | | |
| | 0 | | 0 | | | | |
| | | 1 | | 1 | | | |
| | | | 0 | | 0 | | |
| | | | | 1 | | 1 | |
| | | | | | 0 | | 0 |
| 1 | | | | | | 1 | |

Joonis 9

2 ümber kogu tabeli. Kuna $(2(k+2))^2 - (2k)^2 = 16k + 16 = 16(k+1)$, siis tuleb täpselt $8(k+1)$ neist nullidest ühtedeks muuta.

- Kui $k$ on paaritu, siis võib vajaliku arvu nulle ühtedeks muuta $2 \times 2$ plokkide kaupa suvalisel viisil. Tehtud operatsioonide tulemusena säilib ühtede arvu paarsus olemasolevates ridades, uued read ja veerud on aga paarisarvu ühtedega nagu tarvis.
- Kui $k$ on paaris, siis peavad ühtede arvud ridades ja veergudes olema paaritud. Muutes algul ühtedeks neli nulli tabeli ühe ja sama diagonaali otstes, saab see tingimus kõikjal täidetud; ülejäänud muutused nullidest ühtedeks teeme $2 \times 2$ plokkidena suvalisel viisil.

Alustades nõuetekohasest paigutusest $k = 2$ või $k = 3$ korral ja korrates kirjeldatud samme vastavalt paaris või paaritu $k$ jaoks, saame leida nõutud paigutuse suvalise $k \geqslant 2$ jaoks.

*Lahendus 3.* Näitame veel ühe nõuetekohase konstruktsiooni iga $k \geqslant 2$ jaoks. Nagu eelmistes lahendustes, tähistagu suvalist paarisarvu 0 ja paaritut arvu 1. Jaotame $2k \times 2k$ ruudustiku diagonaalideks, mis algavad ülemise rea mingist ruudust ning kulgevad alla paremale kuni ruudustiku parema servani, jätkudes seejärel vasakust servast rea võrra madalamalt (joonisel 8 on üks selline diagonaal $8 \times 8$ ruudus värvitud punaseks). Iga selline diagonaal sisaldab täpselt ühe ruudu igast reast ja igast veerust.

Valime kaks sellist diagonaali, mille vahele jääb täpselt üks diagonaal, ja täidame mõlemad valitud diagonaalid vaheldumisi arvudega 0 ja 1 (joonis 9). Selle tulemusel on igas reas ja veerus 0 või 2 ühte. Nüüd täidame ülejäänud diagonaalidest pooled tervenisti nullide ja pooled tervenisti ühtedega. Et diagonaale on kokku $2k$, siis tervenisti ühtedega täidetavaid diagonaale on $\dfrac{2k-2}{2}$ ehk $k-1$. Järelikult on iga rea ja veeru ühtede arv $k-1$ või $k+1$, niisiis $k$-st erineva paarsusega.

**5.** Et Mari kirjutab $m+3$ arvu ja võimalikke jääke $m$-ga jagamisel on $m$, siis Mari kirjutatud arvude seas leidub kaks sellist, mis annavad $m$-ga jagamisel võrdsed jäägid; olgu need arvud $a$ ja $b$. Ülejäänud $m+1$ arvust saab samuti valida kaks sellist, mis annavad $m$-ga jagamisel võrdsed jäägid; olgu need arvud $c$ ja $d$. Nüüd $a+c$ ja $b+d$ annavad $m$-ga jagamisel sama jäägi, seega Jüri võib valida arvud $a$, $b$, $c$, $d$.

# Eesti LXI matemaatikaolümpiaad

8. märts 2014 Lõppvoor **11. klass**

## Lahendused

**1.** *Vastus:* 13.

*Lahendus 1.* Olgu $d = \text{SÜT}(2014, n)$ ning $2014 = da$ ja $n = dx$; siis $a$ ja $x$ on ühistegurita. Et $2014n = d^2ax$ ja $2014 + n = d(a + x)$, siis arv $2014n$ jagub arvuga $2014 + n$ parajasti siis, kui arv $dax$ jagub arvuga $a + x$. Kuna arvud $a$ ja $x$ on ühistegurita, on kumbki neist ühistegurita ka arvuga $a + x$, mistõttu ka $ax$ ja $a + x$ on ühistegurita. Seega arv $dax$ jagub arvuga $a + x$ parajasti siis, kui arv $d$ jagub arvuga $a + x$. Siit järeldub $d \geqslant a$. Lähtudes võrdusest $da = 2014$, vaatame läbi kõik variandid; arvu 2014 positiivsed jagajad kasvavas järjestuses on 1, 2, 19, 38, 53, 106, 1007, 2014.

- Kui $a = 1$, $d = 2014$, siis $a + x$ peab olema 2014 jagaja. Et $a + x > 1$, on sellel juhul 7 võimalust.
- Kui $a = 2$, $d = 1007$, siis $a + x$ peab olema 1007 jagaja. Et $a + x > 2$, on sellel juhul 3 võimalust.
- Kui $a = 19$, $d = 106$, siis $a + x$ peab olema 106 jagaja. Et $a + x > 19$, on sellel juhul 2 võimalust.
- Kui $a = 38$, $d = 53$, siis $a + x$ peab olema 53 jagaja. Et $a + x > 38$, on sel juhul 1 võimalus.

Kokku saime 13 võimalust.

*Lahendus 2.* Kuna arv $2014 + n$ on alati arvu $2014 \cdot (2014 + n)$ ehk arvu $2014^2 + 2014n$ jagaja, siis $2014 + n$ on arvu $2014n$ jagaja parajasti siis, kui $2014 + n$ on arvu $2014^2$ jagaja. Kanooniline esitus $2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$ näitab, et arvu $2014^2$ jagajate arv on $(2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (2 + 1)$ ehk 27. Neist keskmine on 2014, millest 13 on suuremad ja esituvad kujul $2014+n$ mingi positiivse täisarvu $n$ jaoks. Seega otsitavaid arve $n$ on 13 tükki.

**2.** Vasakut poolt teisendades saame

$$\frac{1+ab}{c} + \frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right). \qquad (1)$$

Mistahes reaalarvude $x, y, z$ korral kehtib $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$, sest selle saame, liites kokku aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vahelised võrratused $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geqslant xy$, $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geqslant yz$ ja $\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}x^2 \geqslant zx$. Seega $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$, millest

$$abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geqslant abc\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = a + b + c.$$

Koos võrdusega (1) annab see

$$\frac{1+ab}{c} + \frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} \geqslant \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + (a + b + c). \tag{2}$$

Et iga $x > 0$ korral $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} > x^2 + 2$, siis $a + \frac{1}{a} > \sqrt{a^2 + 2}$, $b + \frac{1}{b} > \sqrt{b^2 + 2}$ ja $c + \frac{1}{c} > \sqrt{c^2 + 2}$. Liites need võrratused, saame

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) > \sqrt{a^2 + 2} + \sqrt{b^2 + 2} + \sqrt{c^2 + 2},$$

millest seose (2) abil vajalik võrratus järeldubki.

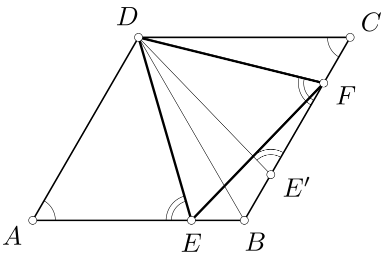
*Märkus.* Kasutatud vahetulemuse (2) saab lühemalt tõestada ümberpaigutusvõrratuse abil. Et sümmeetria tõttu võib eeldada järjestust $a \geqslant b \geqslant c$, millest $ab \geqslant ca \geqslant bc$ ja $\frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{b} \geqslant \frac{1}{a}$ ning ühtlasi $1 + ab \geqslant 1 + ca \geqslant 1 + bc$, siis ümberpaigutusvõrratus annab

$$\frac{1+ab}{c} + \frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} \geqslant \frac{1+ab}{a} + \frac{1+bc}{b} + \frac{1+ca}{c} = \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} + a.$$

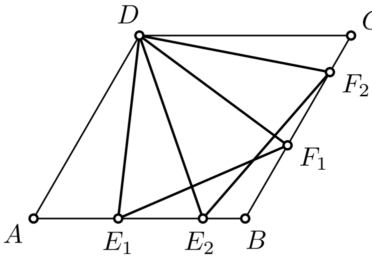
**3.** *Vastus:* $60^\circ$ ja $120^\circ$.

*Lahendus 1.* Ilmselt on ainult üks võimalus valida punktid $E$ ja $F$ vastavalt külgedel $AB$ ja $BC$ nii, et $E$ ja $F$ oleksid diagonaali $BD$ suhtes sümmeetrilised ning $\angle EDF = 60^\circ$. Seega on Malle rombis võimalik valida $E$ ja $F$ ka ebasümmeetriliselt diagonaali $BD$ suhtes, nii et kolmnurk $DEF$ on võrdkülgne; vaatleme järgnevas üht sellist valikut. Üldisust kitsendamata võib eeldada, et $|EB| < |BF|$ (vastasel korral võib vahetada $A$ ja $C$ rollid omavahel ning $E$ ja $F$ rollid omavahel). Olgu $\alpha = \angle BAD = \angle BCD$ ja $\beta = \angle AED$. Olgu veel $E'$ punktiga $E$ sümmeetriline punkt diagonaali $BD$ suhtes (joonis 10); siis $|DE'| = |DE| = |DF|$ tõttu on kolmnurk $E'DF$ võrdhaarne ja $\angle BFD = \angle FE'D = \angle AED = \beta$. Järelikult

$$\angle CDF = 180^\circ - \angle DCF - \angle DFC = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - \beta) = \beta - \alpha.$$




Joonis 10




Joonis 11

Nüüd

$$\begin{aligned} 180^\circ - \alpha &= \angle ADC = \\ &= \angle ADE + \angle EDF + \angle FDC = \\ &= (180^\circ - \alpha - \beta) + 60^\circ + (\beta - \alpha) = \\ &= 240^\circ - 2\alpha. \end{aligned}$$

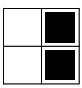
Siit $\alpha = 60^\circ$, st rombi nurkade suurused on $60^\circ$ ja $120^\circ$.

*Lahendus 2.* Olgu Malle esimene valik $E_1$ ja $F_1$ ning tema teine valik $E_2$ ja $F_2$ (joonis 11). Kuna $\angle E_1DF_1 = 60^\circ = \angle E_2DF_2$ ning $|DE_1| = |DF_1|$ ja $|DE_2| = |DF_2|$, siis tasandi pööre $60^\circ$ võrra ümber punkti $D$, mis viib punkti $E_1$ punktiks $F_1$, viib ka punkti $E_2$ punktiks $F_2$. Sama pööre viib järelikult sirge $E_1E_2$ sirgeks $F_1F_2$ ehk sirge $AB$ sirgeks $BC$. Seega $\angle ABC = 120^\circ$, niisiis rombi nurgad on $60^\circ$ ja $120^\circ$.

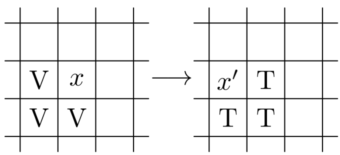
*Märkus.* Rombis nurkadega $60^\circ$ ja $120^\circ$ on tegelikult lõpmata palju võimalusi joonistada võrdkülgset kolmnurka, mille üks tipp asuks rombi tipus ja teised kaks külgedel.

**4.** *Vastus:* iga $n \geqslant 2$ korral.

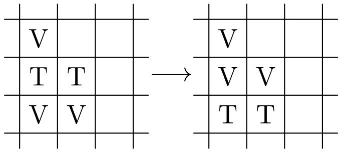
Juhul $n = 1$ pole malemustrit võimalik saada, kui $2 \times 2$ ruudustiku algseis on selline nagu joonisel 12, sest kõrvuti asuvad sama värvi ruudud on ka pärast peegeldamist kõrvuti.



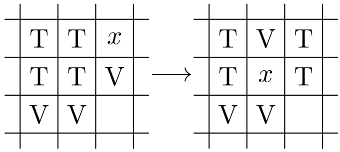
Joonis 12




Joonis 13




Joonis 14




Joonis 15

Näitame järgnevas, et iga $n \geqslant 2$ korral on suvalisest algseisust alustades võimalik jõuda malemustrini. Selleks näitame, et alati, kui leidub valet värvi ruute, on võimalik nende arvu lõpliku arvu käikudega vähendada. Paneme tähele, et valet värvi ruut muutub teisel pool peegeldussirget õiget värvi ruuduks ja vastupidi. Nimetame *topeltpeegelduseks* ühe ja sama $2 \times 2$ ala ühikruutude peegeldamist algul horisontaalse ja seejärel vertikaalse telje suhtes. Topeltpeegeldus on samaväärne lihtsalt peegeldusega $2 \times 2$ ruudu keskpunkti suhtes, sest valet värvi ruudud jäävad sihtpaigas valet ja õiget värvi ruudud õiget värvi.

Oletame algul, et leidub kaks ühise küljega valet värvi ruutu, ja näitame sammud valet värvi ruutude arvu vähendamiseks kõigil juhtudel. Üldisust kitsendamata olgu need kaks ühise küljega ruutu samas reas. Et $n \geqslant 2$, siis võime samuti eeldada, et see rida on ruudustikus ülalt vähemalt kolmas ning et vaadeldavast kahest ruudust paremal on veel vähemalt üks veerg. Tähistame joonistel valet värvi ruutu V-ga ja õiget värvi ruutu T-ga; $x$ tähistab emba-kumba varianti ning $x'$ tähistab $x$-le vastandlikku otsustust (õige $x$ korral on $x'$ vale ja vastupidi).

- Kui kahest kõrvutisest valet värvi ruudust on vähemalt ühe ülemine naaber samuti valet värvi, siis peegeldusel vertikaaltelje suhtes väheneb valet värvi ruutude arv vähemalt 2 võrra (joonisel 13 on valet värvi vasakpoolse ruudu ülemine naaber; teisel juhul aitab sama teisendus).
- Kui mõlema kõrvutise valet värvi ruudu ülemised naaberruudud on õiget värvi, kuid nende kohal asuvatest ruutudest on vähemalt üks valet värvi, siis peegeldusega vertikaaltelje suhtes viime kaks kõrvutiasetsevat valet värvi ruutu ühe rea võrra üles, nii et valede ruutude arv ei muutu (joonis 14). Edasi toimime nagu eelmises punktis.
- Kui kahe kõrvutise valet värvi ruudu kohal on $2 \times 2$ ruut õigesti värvitud, kuid sellest $2 \times 2$ alast paremal on vähemalt üks naaberruut valet värvi, siis vahetame topeltpeegeldusega selle valet värvi ruudu ühega õigesti värvitud $2 \times 2$ ala ruutudest (joonisel 15 on valet värvi alumine parempoolne ruut; teisel juhul aitab sama teisendus). Edasi toimime nagu eelmises või üleeelmises punktis.
- Ülejäänud juhtudel vähendame valet värvi ruutude arvu 2 võrra joonisel 16 näidatud sammudega.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \hline \mathrm{V} & \mathrm{V} & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{T} & \mathrm{V} & \mathrm{V} \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{V} & \mathrm{V} \\ \hline \mathrm{V} & \mathrm{V} & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{T} & \mathrm{V} & \mathrm{V} \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{V} & \mathrm{V} \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \hline \mathrm{T} & \mathrm{T} & \\ \hline \end{array}$$

Joonis 16

Vaatleme lõpuks olukorda, kus kaht ühise küljega valet värvi ruutu ei leidu. Topeltpeegeldustega saab valet värvi ruutu nihutada ruudukaupa mööda diagonaale, muutmata valet ja õiget värvi ruutude arvu. Kuna mustade ja valgete ruutude arvud on algul võrdsed ja need peegeldamiste käigus ei muutu, siis valet värvi musta ruudu leidumise korral peab ruudustikus leiduma ka valet värvi valge ruut ja vastupidi. Seega saab diagonaalsammudega viia valet värvi ruudu teise valet värvi ruudu kõrvale ja toimida edasi ülal kirjeldatud moel.

**5.** *Lahendus 1.* Näitame algul, et mingi aja möödudes läheb Jaak raamatukokku päeval vahetult pärast inventuuri. Kui Jaagul mingil raamatukoguskäimisel vahetatakse inventuuri tõttu tagastamispäev päeva võrra normist hilisemaks, siis satubki ta järgmisel korral raamatukokku just esimesel inventuurijärgsel päeval. Kui aga oletada, et tal tagastamispäeva mitte kunagi inventuuri tõttu normist hilisemaks ei muudeta, käib ta raamatukogus alati igal $a$-ndal päeval; kuna 30 jagub $a$-ga, satub Jaak raamatukokku ühtasi igal 30-ndal päeval. Sattudes raamatukokku nt $r$-ndal päeval pärast inventuuri, tuleb ta raamatukokku ka $r+30$ päeva pärast inventuuri, mis on $r-1$ päeva pärast järgmist inventuuri. Samamoodi jätkates näeme, et mingi arvu tsüklite järel satub ta raamatukokku esimesel inventuurijärgsel päeval.

Pärast niisugust juhtumit läheb Jaak raamatukokku $1+a$, $1+2a$ jne kuni $1+30-a$ ehk $31-a$ päeva pärast inventuuri. Kuna siis oleks $a$ päeva pärast just järgmine inventuur, lükkub järgmine raamatukoguskäik päeva võrra edasi ja toimub jällegi esimesel päeval pärast inventuuri. Seega hakkab Jaak igal inventuurile vahetult järgneval päeval raamatukogus käima.

*Lahendus 2.* Viibigu Jaak pärast inventuuri esmakordselt raamatukogus $r$-ndal päeval. Paneme tähele, et $r \leqslant a$, sest vastasel korral oleks Jaak pidanud inventuurijärgselt juba raamatukogus käinud olema. Et $r \leqslant a$, siis $r+30-a \leqslant 30$. Kuna 30 jagub $a$-ga, siis käib Jaak raamatukogus ka $r+a$, $r+2a$ jne kuni $r+30-a$ päeva pärast inventuuri. Edasi on kaks võimalust.

- Kui $r > 1$, siis $a$ päeva pärast on vaadeldavast inventuurist möödunud $r+30$ päeva ja järgmisest inventuurist juba $r-1$ päeva. Seega järgmises tsüklis läheb Jaak esmakordselt raamatukokku $r-1$ päeva pärast inventuuri.

- Kui $r = 1$, siis $a$ päeva pärast on parajasti järgmine inventuur, mistõttu Jaagu laenutustähtaeg lükkub päeva võrra edasi ja on jälle 1. päeval pärast inventuuri.

Siit nähtub, et kuni esmakordne raamatukogukülastus pärast inventuuri pole kohe esimesel päeval, toimub see igas järgmises tsüklis päeva võrra varem. Mingi aja möödudes tekib olukord, kus Jaak läheb raamatukokku esimesel inventuurijärgsel päeval, misjärel hakkab Jaak ka järgmistes tsüklites esimesel inventuurijärgsel päeval raamatukogus käima.

## Lahendused

**1.** *Vastus:* a) ei; b) jah.

a) Kui Ats mõtles arvud 1 ja 21 ning Pets arvud 10 ja 12, siis mõlemad saavad summaks 22 ning korrutised tulevad vastavalt 21 ja 120, mis mõlemad annavad 99-ga jagamisel jäägiks 21.

b) Olgu Atsi arvud $a$ ja $b$ ning Petsi arvud $c$ ja $d$. Vastavalt ülesande tingimustele jaguvad arvud $(a+b)-(c+d)$ ja $ab-cd$ mõlemad 101-ga. Olgu $(a+b)-(c+d)=101k$; siis $a=101k-b+c+d$, kust

$$\begin{aligned} ab-cd &= (101k-b+c+d)b-cd = \\ &= 101kb-b^2+bc+bd-cd = \\ &= 101kb-(c-b)(d-b). \end{aligned}$$

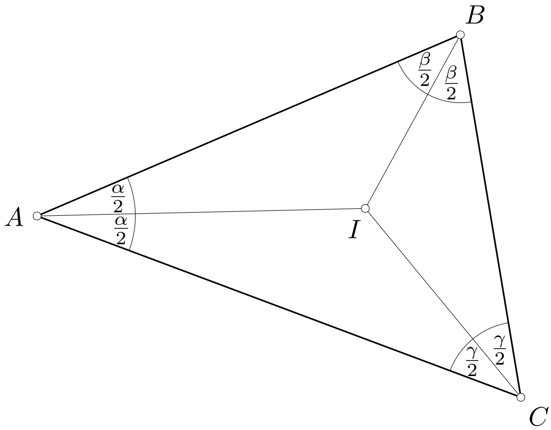
Seega ka korrutis $(c-b)(d-b)$ jagub 101-ga. Kuna 101 on algarv, siis peab 101-ga jaguma kas tegur $c-b$ või tegur $d-b$. Üldisust kitsendamata jagugu 101-ga arv $c-b$. Et kõik arvud on lõigul 1-st 101-ni, tähendab see, et $c=b$. Siis aga $(a+b)-(c+d)=a-d$, kust 101-ga jaguvuse tõttu ka $a=d$. Seega Ats ja Pets mõtlesid samad arvud.

*Märkus.* a)-osas on palju muid võimalusi eitava vastuse põhjendamiseks. Näiteks võis Ats mõelda 99 ja 36 ning Pets 33 ja 3, või siis Ats 99 ja 20 ning Pets 11 ja 9.

**2.** *Vastus:* $(k\pi, k\pi)$, kus $k$ on suvaline täisarv.

*Lahendus 1.* Võrrandite liitmisel ja poolte ühiste liikmete koondamisel saame seose $\sin x + \sin y = 0$ ehk $\sin x = -\sin y$. Seega $y=-x+2k\pi$ või $y=\pi+x+2k\pi = x+(2k+1)\pi$. Teisel juhul oleks $|y-x| = |(2k+1)\pi| \geqslant \pi$, kuid esimesest võrrandist $|y-x| = |\sin x| \leqslant 1 < \pi$, vastuolu. Järelikult $y=-x+2k\pi$, kus $k$ on täisarv. Asetades selle seose esimesse võrrandisse, saame pärast koondamisi $2x+\sin x = 2k\pi$. Näeme, et seda seost rahuldab iga täisarvu $k$ korral väärtus $x=k\pi$; siis ka $y=-k\pi+2k\pi=k\pi$. Et $f(x)=2x+\sin x$ on kasvav funktsioon, ei saa võrrandil $2x+\sin x = 2k\pi$ rohkem lahendeid leiduda.

*Lahendus 2.* Funktsioon $f(z)=z+\sin z$ on rangelt kasvav, sest tema tuletis $f'(z)=1+\cos z$ on kõikjal positiivne, v.a üksikutel kohtadel. Seega kui antud võrrandisüsteemi mõne lahendi $(x,y)$ korral $x<y$, siis




Joonis 17

$y = x + \sin x < y + \sin y = x$ — vastuolu. Analoogselt annab vastuolu ka oletus $y < x$. Kokkuvõttes on $x = y$ ainus võimalus. Asendus võrrandisüsteemi annab $\sin x = \sin y = 0$, kust $x = y = k\pi$ suvalise täisarvu $k$ korral. Kõik paarid $(k\pi, k\pi)$ antud võrrandisüsteemi tõesti ka rahuldavad.

**3.** Olgu $|BC| = a$, $|CA| = b$ ja $|AB| = c$ ning nende külgede vastasnurkade suurused vastavalt $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$ (joonis 17). Siinusteoreem kolmnurkades $ABC$ ja $IBC$ annavad vastavalt $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$ ja $\dfrac{a}{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)} = 2R_A$. Et

$\sin\left(\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$, siis

$$\frac{R_A}{R} = \frac{\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{a}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Samamoodi saame $\dfrac{R_B}{R} = 2\sin\dfrac{\beta}{2}$ ja $\dfrac{R_C}{R} = 2\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

Ülesande lahendamiseks on vaja tõestada, et $\dfrac{R_A}{R} + \dfrac{R_B}{R} + \dfrac{R_C}{R} \leqslant 3$ ehk

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{2}. \tag{3}$$

Kuid siinusfunktsioonile rakendub piirkonnas $(0, \dfrac{\pi}{2})$ Jenseni võrratus, mis annab

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right) &\leqslant \sin\left(\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}\right)=\\ &= \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Sellest võrratus (3) järeldubki.

**4.** *Lahendus 1.* Tahvlil olevate arvude summa on

$$s_n = 1\cdot n + 2\cdot(n-1) + 4\cdot(n-2) + \ldots + 2^{n-1}\cdot 1\,.$$

Defineerime veel

$$r_n = \frac{s_n}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \ldots + \frac{1}{2^n}\cdot n\,.$$

Märkame, et iga $n \geqslant 1$ korral $r_{n+1} = \frac{r_n}{2} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$, kus geomeetrilise jada omaduste põhjal $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots = 1$. Seega alati, kui $r_n < 2$, siis ka $r_{n+1} < \frac{r_n}{2} + 1 < 1 + 1 = 2$. Et $r_1 = \frac{1}{2} < 2$, siis $r_n < 2$ iga $n \geqslant 1$ korral. Siit saamegi, et $s_n = 2^n \cdot r_n < 2^{n+1}$ iga $n \geqslant 1$ korral.

*Lahendus 2.* Olgu tahvlil olevate arvude summa $s_n$ sõltuvalt alguses tahvlile kirjutatavast arvust $n$. Kui algselt oleks tahvlile kirjutatud $n+1$, siis igat sellest väiksemat arvu oleks lõpuks kirjutatud 2 korda rohkem kui siis, kui alustataks arvust $n$. Seetõttu kehtib $s_{n+1} = 2s_n + (n+1)$ iga positiivse täisarvu $n$ korral.

Näitame induktsiooniga, et $s_n = 2^{n+1} - (n+2)$; sellest järeldub ülesande väide. Baas, kui $n = 1$, kehtib, kuna $s_1 = 1 = 4-3 = 2^{1+1} - (1+2)$. Kui väide kehtib $n$ korral, siis

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 2\cdot s_n + (n+1) = \\ &= 2\cdot(2^{n+1} - (n+2)) + (n+1) = \\ &= 2\cdot 2^{n+1} - 2n - 4 + n + 1 = \\ &= 2^{(n+1)+1} - ((n+1)+2). \end{aligned}$$

Seega väide kehtib iga positiivse täisarvu $n$ korral.

**5.** *Vastus:* $(5,2)$.

*Lahendus 1.* Vaatleme antud seost ruutvõrrandina $x$ suhtes. Selle diskriminant on

$$D = 1 + 4y(y+1)(y^2+1) = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1.$$

Kui võrrandi lahend on täisarv, peab $D$ olema täisruut. Paneme aga tähele, et $(2y^2+y)^2 = 4y^4+4y^3+y^2 < D$ ja

$$(2y^2+y+1)^2 = 4y^4+4y^3+y^2+4y^2+2y+1 = D+y^2-2y.$$

Seega kui $y^2-2y>0$, siis $D$ ei saa olla täisruut, sest jääb suuruselt kahe järjestikuse täisarvu ruudu vahele. Võrdusjuhul $y^2-2y=0$ saame $y$ positiivsuse tõttu ainsa võimalsena $y=2$ ning vastavalt

$$x = \frac{-1+\sqrt{D}}{2} = \frac{-1+(2y^2+y+1)}{2} = 5.$$

Juht $y^2-2y<0$ annab ainsa võimalusena $y=1$, mille puhul $x$ pole täisarv.

*Lahendus 2.* Ülesande võrdus on samaväärne võrdusega

$$x(x+1) = (y^2+y)(y^2+1). \tag{4}$$

Kui $x \leqslant y^2$, siis $x(x+1) \leqslant y^2(y^2+1) < (y^2+y)(y^2+1)$, mistõttu võrdus (4) ei saa kehtida. Kui $x \geqslant y^2+y$, siis $x(x+1) \geqslant (y^2+y)(y^2+y+1) > (y^2+y)(y^2+1)$ ja võrdus (4) ei saa samuti kehtida. Seega $y^2 < x < y^2+y$ ehk $x = y^2+a$, kus $0<a<y$. Tehes selle asenduse võrrandis (4), saame uue seose $(y^2+a)(y^2+a+1) = (y^2+y)(y^2+1)$, mis pärast sulgude avamist ja lihtsustamist annab $2ay^2+a^2+a = y^3+y$. See on samaväärne võrdusega

$$2a(y^2+1)+a^2-a = y(y^2+1), \tag{5}$$

millest järeldub, et arv $y^2+1$ on arvu $a^2-a$ jagaja. Kuna aga samas $a^2-a < a^2 < y^2 < y^2+1$, siis $a^2-a=0$, kust ainsa võimalusena $a=1$. Asendades selle võrrandisse (5), saame $2(y^2+1) = y(y^2+1)$ ehk $y=2$. Siit ka $x=5$.

## Hindamisskeemid

**1.** *(Aleksandr Šved)* Tüüpiliste mõttekäikude eest anti punkte järgmiselt.

Lahendus, kus kasutatakse kahe astmeid:

- Näidatud, et iga korrutise lugeja on paarisarv: 1 p
- Näidatud, et lugejas võib mitte arvestada kahe astmeid: 4 p
- Täislahendus: 7 p

Lahendus, kus kasutatakse Tšebõšovi teoreemi:

- Näidatud, et iga murru lugeja on paarisarv: 1 p
- Seletatud, et selleks et saaks koondada viimast paaritut arvu nimetajas, on vaja lisada uusi liikmeid, ehk $n$-i suurendada: 2 p
- Seletatud, et selleks et saaks koondada viimast paaritut arvu nimetajas, on vaja lisada $n$ (või $n-1$) uut liiget, ehk arvu $n$ kahekordistada: 4 p
- Seletatud, et selleks et saaks koondada viimast algarvu nimetajas, on vaja lisada $n$ (või $n-1$) uut liiget, ehk arvu $n$ kahekordistada: 7 p

**2.** *(Eno Tõnisson)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Leitud korrektselt õige vastus, aga lõppvastusena esitatud midagi muud: 6 p
- Antud vastusena 42 minutit, mis tegelikult on aeg, mil rong liigub (teeloleku sisse tuleks arvestada ka peatused): 5 p
- Võrrandi koostamisel arvestatud hiljem väljumist valesti: 3 p
- Leitud plaanijärgne seisuaeg peatustes: 1 p

**3.** *(Janno Veeorg)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Näidatud, et $AD$, $BE$ ja $CF$ on risti vastavalt külgedega $BC$, $AC$ ja $AB$: 1 p
- Täislahendus mõnede puudulike põhjendustega: 6 p
- Täislahendus: 7 p

**4.** *(Reimo Palm)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Toodud välja 4 tippu, mis sobivad: 1 p
- Põhjendatud, et need 4 tippu tõepoolest sobivad: 2 p
- Märgatud ja põhjendatud, et ühelgi tahul ei tohi valida rohkem kui 2 tippu: 2 p
- Sellest lähtudes tõestatud, et kogu kuubis ei tohi valida rohkem kui 4 tippu: 2 p

**5.** *(Elts Abel)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et tuleb kontrollida jaguvust arvudega 9 ja 23: 1 p
- Näidatud, et mistahes kahe vahe jagub 9-ga, sest kõik arvud jaguvad 9-ga: 2 p
- Leitud koostatud arvude arv 24: 1 p
- Näidatud, et leiduvad kaks sama jäägiga arvu jagamisel 23-ga: 2 p
- Põhjendatud, et nende kahe vahe jagub arvuga 23: 1 p

## Hindamisskeemid

**1.** *(Aleksei Lissitsin)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Väide tõestatud juhul, kui $a$ jagub arvuga $n$: 2 p

  *Sealhulgas:*
  - Tehtud vaid juhtum $a = n$: *1 p*
- Väide tõestatud juhul, kui $a$ ei jagu arvuga $n$: 5 p

  *Sealhulgas:*
  - Tehtud vaid juhtum $a < n$: *2 p*

Suurem osa lahendajatest proovis käituda sarnaselt žürii poolt toodud lahendustega. Seejuures paljud tundsid vajadust jagada lahendust kahte ossa vastavalt sellele, kas $a$ jagub arvuga $n$ või mitte.

Tahaks mainida, et seda ülesannet on võimalik lahendada ka induktsiooniga $a$ järgi, kusjuures selline lähenemine ei vaja ka tegelemist arvu $a$ jääkidega. See tundub olevat lihtsam viis, kuidas teha seda ülesannet, aga ainult kaks lahendajat tegi niimodi.

**2.** *(Heiki Niglas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Tehtud mõni kasulik tähelepanek: 1 p
- Kasutatud õigeid ideid, aga mitu hooletusviga või muud ebatäpsust ei võimaldanud lahendust lõpuni viia: 2 p
- Peaaegu täislahendus mõne väikese näpuveaga: 5 p
- Täislahendus: 7 p

Üldiselt oli ülesannet hästi lahendatud. Paljud olid ära tabanud idee viia kõik murrud ühisele nimetajale. Samas sulgude avamisel oli mitmel lahendajal tulnud sisse mõni hooletusviga, mis ei võimaldanud lahendust korrektselt lõpuni viia.

**3.** *(Kairi Kangro)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Näidatud, et nurk $ACE$ võrdub poolega nurgast $BCA$, edasine lahendus vigane või puudub: 2 p
- Täislahendus: 7 p

**4.** *(Uve Nummert)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt:

- Täielik lahendus (põhjendatud, miks $k = 1$ ei sobi, ning üldkujul kirjeldatud iga $k > 1$ jaoks sobiv konstruktsioon, või eraldi sellised konstruktsioonid paaris- ja paaritute arvude $k$ jaoks): 7 p
- Esitatud konstruktsioon, mis on rakendatav iga $k > 1$ korral, kuid see on kirjeldatud ainult konkreetsete väikeste $k$-de jaoks, mitte üldjuhul: 5 p
- Esitatud üldkujul kirjeldatuna konstruktsioon, mis sobib kõigi paarisarvude $k$ (kuid mitte paaritute arvude) korral: 3 p
- Esitatud konstruktsioon, mis sobib kõigi paarisarvude $k$ korral, kuid see on kirjeldatud ainult konkreetsete väikeste $k$-de jaoks, mitte üldjuhul: 2 p
- Esitatud konstruktsioon ainult $k = 2$ ja/või $k = 3$ jaoks: 1 p

Paljud lahendajad arvasid, et nõutava omadusega paigutust ei leidu ühegi $k$ korral, ja üritasid seda põhjendada. Sellised lahendused punkte ei saanud.

Ülesande tingimustele vastavaid paaris- ja paaritute arvude paigutusmustreid on siin palju ning lahendustes esitatud konstruktsioonid olid ka peaaegu kõik erinevad.

**5.** *(Targo Tennisberg)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Käsitletud juhtum, kus neli arvu annavad sama jäägi: 3 p
- Käsitletud juhtum, kus tekib kaks paari, mis kumbki annavad omavahel võrdse jäägi: 3 p
- Selgitatud, et võrdsete jäägipaaride leidmine annab meile võrdsed summad: 1 p

Kui arvud asendati jääkidega põhjendamata, miks nii saab teha, kuid muidu oli lahendus õige, võeti 1 punkt maha. Muud fundamentaalsed arutlusvead loeti võrdseks ülesande ühe poole käsitlemata jätmisega. Kui lahendusest oli näha, et lahendaja saab erinevatest juhtudest aru, kuid ei suutnud neid korrektselt kirjeldada, sai 2 punkti.

Mõnedes lahendustes prooviti näidata, et kuna meil tekib rohkem kui $m$ erinevat arvupaari, peab neil olema Dirichlet' printsiibi põhjal samu summasid. Kuna need paarid pole aga üksteisest sõltumatud, ei vii see mõttekäik sihile.

## Hindamisskeemid

**1.** *(Maksim Ivanov)* Žürii lahenduse 2 allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $2014 + n$ on $2014^2$ jagaja: 3 p
- Leitud arvu $2014^2$ esitus algarvude astmete korrutisena: 1 p
- Leitud arvu $2014^2$ positiivsete jagajate arv: 2 p
- Leidut arvu $2014^2$ positiivsete jagajate hulgast arvust 2014 suuremate jagajate arv: 1 p

Žürii lahenduse 1 moel tegi ainult üks õpilane ja sai maksimumpunktid. Žürii lahenduse 2 moodi teinud õpilased ei jõudnud keegi isegi õige vastuseni. Paljud oletasid, et $n$ peab olema arvu 2014 kordne ning said kätte 7 erinevat väärtust. See oletus aga ei pea paika, sest nt $n = 795$ pole arvu 2014 kordne, kuid rahuldab ülesande tingimust.

**2.** *(Mark Gimbutas)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud võrratus (2) žürii lahenduses: 4 p

  *Sealhulgas žürii lahenduse järgi:*
  - Ülesande võrratuse vasak pool viidud kujule, kus $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ on eraldi: *1 p*
  - Märgitud võrratus aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise kohta: *1 p*

  *Sealhulgas lahendusega ümberpaigutusvõrratuse abil:*
  - Märgitud, et üldisust kitsendamata võib eeldada $a \leqslant b \leqslant c$: *1 p*
  - Järeldatud, et siis $\frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$ ja $1 + ab \leqslant 1 + ca \leqslant 1 + bc$: *1 p*
- Näidatud, et $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c} > \sqrt{a^2+2}+\sqrt{b^2+2}+\sqrt{c^2+2}$: 3 p

  *Sealhulgas:*
  - Märgitud, et $x + \frac{1}{x} > \sqrt{x^2 + 2}$: *2 p*

**3.** *(Jaan Vajakas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Põhjendatud (nt joonise põhjal), et nurga $D$ suurus saab olla $120^\circ$: 1 p

- Mainitud, et juhul $\angle D > 60^\circ$ on täpselt üks sümmeetriline lahend: 1 p
- Toodud sihile viiv idee kasutada siinusteoreemi: 2 p
- Oluline osa tõestusest olemas, aga siis on tehtud suurem arvutusviga: 4 p
- Tõestuskäik sisuliselt olemas, kuid esineb väiksemaid arvutus- ja loogikavigu: 5 p

**4.** *(Kaie Kubjas)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Näidatud iga $n \geqslant 2$ jaoks mõne mittetriviaalse värvimise jaoks teisendus malelauaks: 1 p
- Kirjeldatud lahenduseni viiv idee ilma detailsete selgitusteta: 3 p

**5.** *(Ivo Adermann)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Põhjendatud, et kui Jaak tagastab kuu mõnel muul päeval peale esimese, siis järgmises kuus tagastab ta raamatu ühe päeva võrra varem: 2 p
- Järeldatud, et saabub kuu, mil Jaak tagastab raamatu kuu esimesel päeval: 2 p
- Näidatud, et kui Jaak tagastab raamatu mingi kuu esimesel päeval, siis teeb ta seda ka iga järgneva kuu esimesel päeval: 3 p

## Hindamisskeemid

1. *(Oleg Košik)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Osa a) näide koos selgitusega: 3 p
   - Osa b) tõestus: 4 p

2. *(Ksenia Rožinskaja)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Võrrandite liitmisel jõutud seoseni $\sin x + \cos x = 0$: 1 p
   - Leitud lahend $y = -x + 2k\pi$: 1 p
   - Leitud lahend $y = \pi + x + 2k\pi$: 1 p
   - Näidatud, et lahend $y = \pi + x + 2k\pi$ ei sobi: 1 p
   - Asendatud seos $y = \pi + x + 2k\pi$ esimesse võrrandisse : 1 p
   - Jõutud lahendini $(k\pi, k\pi)$: 1 p
   - Näidatud, et teisi lahendeid ei ole: 1 p

   Enamikes lahendutes puudus põhjendus, miks teisi lahendeid ei ole.

3. *(Hendrik Nigul)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Summa $R_A + R_B + R_C$ avaldamine $R$ ja poolnurkade siinuste kaudu: 5 p

     *Sealhulgas tüüpiliste kasulike mõtete eest:*
     - Kasutatud siinusteoreemi kolmnurkades $BIC$, $CIA$, $AIB$ ja $ABC$ ja tehtud neist kasulikke järeldusi: *3 p*
     - Kasutatud siinusteoreemi kolmnurkades $BIC$, $CIA$, $AIB$ ja $ABC$ ilma järgneva progressita: *1 p*
     - Mainitud, et ühikringjoone sisse joonistatud kõõlkuusnurga ümbermõõt on suurim, kui kuusnurk on korrapärane: *2 p*
     - Mainitud, et kolmnurkade $BIC$, $CIA$ ja $AIB$ ümberringjoonte keskpunktid asuvad kolmnurga $ABC$ ümberringjoonel: *1 p*
   - Tõestatud, et kui $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, siis $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{2}$: 2 p

4. *(Ahti Peder)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud valem $s_n = n + 2^1(n-1) + 2^2(n-2) + \ldots + 2^{n-1}$ tahvlil olevate arvude summa väljendamiseks: 1 p
- Püstitatud hüpotees $s_n = 2^{n+1} - (n+2)$: 3 p
- Hüpotees tõestatud: 3 p

Kahes töös oli näidete abil leitud valem $s_n = 2^{n+1} - (n+2)$ ja mainitud, et sellest ülesande lahenduseks piisab.

**5.** *(Urve Kangro)* Ruutvõrrandi lahendamist kasutava lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lahendatud ruutvõrrand $x$ suhtes: 1 p
- Pandud tähele. et $D$ peab olema täisruut: 1 p
- Näidatud, et $(2y^2+y)^2 < D = (2y^2+y+1)^2 - (y^2-2y)$: 3 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Asendust $x = y^2 + a$ kasutava lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $x > y^2$: 1 p
- Asendatud $x = y^2 + a$ ning lihtsustatud: 1 p
- Näidatud, et $a \leqslant y - 1$ (või $a < y$): 1 p
- Näidatud, et $y^2 + 1$ on $a^2 - a$ jagaja: 2 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Ainult õige vastuse eest ilma põhjenduseta, miks rohkem lahendeid pole, sai 1 punkti. Punkte ei saanud põhjenduste eest, mis proovisid läbi mõningaid võimalusi, näiteks $x = y$, $x = y+1$, $x = y^2+1$, $x = y(y+1)$ jne., sest pole kuidagi põhjendatud, miks rohkem võimalusi pole (näiteks $x = abc$, kus $a$ on $y$ jagaja, $b$ on $y+1$ jagaja ja $c$ on $y^2+1$ jagaja).