Lõppvoor 2012

Ülesanded 2
- 9. klass 2
- 10. klass 3
- 11. klass 4
- 12. klass 5

Ülesanded vene keeles 6
- 9 класс 6
- 10 класс 7
- 11 класс 8
- 12 класс 9

Lahendused 10
- 9. klass 10
- 10. klass 14
- 11. klass 18
- 12. klass 22

Hindamisskeemid 27
- 9. klass 27
- 10. klass 29
- 11. klass 31
- 12. klass 33

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

14. aprill 2012 Lõppvoor **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Täisarvude a, b, c kohta on teada, et $a + b + c$ jagub 6-ga ja $a^2 + b^2 + c^2$ jagub 36-ga. Kas võib kindlalt väita, et arv $a^3 + b^3 + c^3$ jagub

a) 8-ga?

b) 27-ga?

2. Lahenda võrrandisüsteem

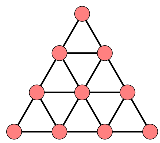
$$\begin{cases} x - xy^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - x^2y^4 + y^4 = 4 \end{cases}.$$

3. Võrdhaarse kolmnurga ABC alus on BC. Nurga ABC poolitaja lõikab külge AC punktis D.

a) Kas alati, kui kolmnurk BCD on võrdhaarne, on ka kolmnurk ABD võrdhaarne?

b) Kas alati, kui kolmnurk ABD on võrdhaarne, on ka kolmnurk BCD võrdhaarne?

4. Võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 3 jaotatakse 9 võrdkülgseks kolmnurgaks küljepikkusega 1. Igasse punkti, mis on mõne väikese kolmnurga tipuks (joonisel punaselt), kirjutatakse täisarv 1-st 10-ni (iga arvu kirjutatakse täpselt ühe korra). Igasse väikesesse kolmnurka kirjutatakse selle kolmes tipus asuvate arvude summa. Tõesta, et vähemalt kolm neist summadest on suuremad kui 11.



5. Jüri tahab joonistada tasandile n ringjoont ja vabalt valitaval arvul sirgeid nii, et kõik sirged lõikuksid ühes punktis ja iga kahe ringjoone jaoks leiduks sirgete seas kaks ühist puutujat.

a) Kas Jüril on võimalik ülesanne lahendada suvalise $n \geqslant 2$ jaoks?

b) Milliste naturaalarvude n korral on Jüril võimalik ülesanne lahendada, kui lisaks peavad kõik ringjooned olema võrdse raadiusega?

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

14. aprill 2012 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude paarid (n, m), kus arvude n ja m aritmeetiline ja geomeetriline keskmine on erinevad kahekohalised naturaalarvud, mis on saadud teineteisest numbrite vahetamise teel.

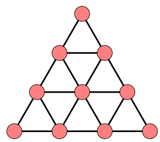
Märkus. Positiivsete arvude x, y *geomeetriliseks keskmiseks* nimetatakse arvu $\sqrt{xy}$.

2. Nimetame reaalarve r, s *lähedasteks*, kui $|r - s| = 10^u$ mingi täisarvu u korral.

Olgu $y = ax + b$ selline lineaarfunktsioon, mille korral leiduvad lähedased arvud x_1, x_2 nii, et ka vastavad y_1, y_2 on lähedased. Tõesta, et siis ükskõik milliste lähedaste arvude x'_1, x'_2 korral on vastavad y'_1, y'_2 samuti lähedased.

3. Tasandil on antud kolmnurk ABC. Olgu P tipust A tõmmatud nurgapoolitaja lõikepunkt küljega BC ning M kolmnurga ABC tipust B tõmmatud mediaani aluspunkt. Sirged AB ja MP lõikuvad punktis K. Tõesta, et kui $\frac{|PC|}{|BP|} = 2$, siis AP ja CK on risti.

4. Võrdkülgne kolmnurk küljepikkusega 3 jaotatakse 9 võrdkülgseks kolmnurgaks küljepikkusega 1. Igasse punkti, mis on mõne väikese kolmnurga tipuks (joonisel punaselt), kirjutatakse täisarv 1-st 10-ni (iga arvu kirjutatakse täpselt ühe korra). Igasse väikesesse kolmnurka kirjutatakse selle kolmes tipus asuvate arvude summa. Tõesta, et leidub kolm väikest kolmnurka, milles olevate arvude summa on vähemalt 48.



5. Leia kõik sellised positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mille korral $x \cdot y! + 2y \cdot x! = z!$.

Märkus. Naturaalarvu n *faktoriaaliks* $n!$ nimetatakse korrutist $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

14. aprill 2012 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Professor P uuris oma viimases teadustöös teatava omadusega naturaalarve. On teada, et alati, kui mingil naturaalarvul x on see omadus, on arvu x kõigil kordsetel samuti see omadus.

Olgu $a_1, \ldots, a_n$ sellised positiivsed täisarvud, mille kõigil ühest suurematel teguritel on professori P uuritud omadus. Kas võib kindlalt väita, et siis ka korrutise $a_1 \ldots a_n$ kõigil ühest suurematel teguritel on see omadus?

2. a) Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral saab täisarvude 1 kuni $n+1$ summa esitada ka n järjestikuse täisarvu summana.

b) Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral leidub selline täisarv a, et täisarvude a kuni $a+n$ summa on võrdne täisarvude $a+n+1$ kuni $a+2n$ summaga.

3. Kolmnurga ABC küljed AB ja AC puutuvad ringjoont c vastavalt punktides B' ja C'. Ringjoone c keskpunkt L asub küljel BC. Kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkt O asub ringjoone c lühemal kaarel $B'C'$. Tõesta, et kolmnurga ABC ümberringjoon ja ringjoon c lõikuvad kahes punktis.

4. Ruudustikule asetatakse hulk kaarte mõõtmetega 1×2 nii, et kaartide servad ühtivad ruudustiku joontega, ükski kaart ei ulatu üle ruudustiku ääre ja iga lahtrit katab täpselt kaks kaarti. Tõesta, et saab eemaldada osa kaarte nii, et ruudustiku iga lahtrit jääb katma täpselt üks kaart.

5. Ruudus küljepikkusega 11 märgitakse 2012 punkti. Tõesta, et saab valida võrdkülgse kolmnurga küljepikkusega 12, mis katab vähemalt 671 punkti.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

14. aprill 2012 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (x, y), mille korral

$$\frac{1}{x^2} + \frac{249}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2012}.$$

2. a) Tõesta, et iga reaalarvu x korral võrdub arvude $\sqrt{1+\sin x}$ ja $\sqrt{1-\sin x}$ aritmeetiline keskmine ühega arvudest $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $-\sin\frac{x}{2}$, $-\cos\frac{x}{2}$.

b) Kas a)-osa lõpus loetletud neljast arvust saab mõne ära jätta nii, et väide jääks kehtima?

3. Teravnurkse kolmnurga ABC sees valitakse niisugune punkt P, millega sümmeetrilised punktid kolmnurga külgede suhtes asuvad kõik kolmnurga ABC ümberringjoonel. Tõesta, et P on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt.

4. Rivis seisab üksteise taga 2^n sõdurit, kus n on positiivne täisarv. Igal ümberrivistumisel võetakse uue rivi etteotsa enne paaritutel kohtadel seisnud sõdurid (nende omavahelist järjekorda muutmata) ja nende järele enne paariskohtadel seisnud sõdurid (samuti omavahelist järjekorda muutmata). Tõesta, et n ümberrivistumise järel on sõdurid samas järjekorras nagu alguses.

5. a) Kas leidub kõigi reaalarvude hulgal määratud reaalarvuliste väärtustega funktsioon, mis pole konstantselt null ja mille graafiku peegeldamisel y-telje suhtes saadakse selle funktsiooni tuletise graafik?

b) Kas leidub kõigi reaalarvude hulgal määratud reaalarvuliste väärtustega funktsioon, mis pole konstantselt null ja mille graafiku nihutamisel 1 ühiku võrra piki x-telge positiivses suunas saadakse selle funktsiooni tuletise graafik?

LIX Олимпиада Эстонии по математике

14 апреля 2012 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. О целых числах a, b, c известно, что $a+b+c$ делится на число 6, а $a^2+b^2+c^2$ делится на число 36. Можно ли с уверенностью утверждать, что число $a^3+b^3+c^3$ делится на

а) число 8?

б) число 27?

2. Решить систему уравнений

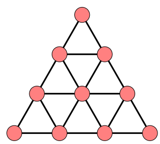
$$\begin{cases} x - xy^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - x^2y^4 + y^4 = 4 \end{cases}.$$

3. Отрезок BC является основанием равнобедренного треугольника ABC. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке D.

а) Всегда ли, когда треугольник BCD будет равнобедренным, то и треугольник ABD будет равнобедренным?

б) Всегда ли, когда треугольник ABD будет равнобедренным, то и треугольник BCD будет равнобедренным?

4. Равносторонний треугольник, длина стороны которого 3, поделён на 9 равносторонних треугольников с длиной стороны 1. В каждую точку, являющуюся вершиной некоторого маленького треугольника (на рисунке обозначены красным), записывают целое число от 1 до 10 (каждое число записывают ровно один раз). В каждый маленький треугольник записывают сумму чисел, находящихся в трёх его вершинах. Доказать, что по крайней мере три такие суммы больше числа 11.



5. Юра хочет нарисовать на плоскости n окружностей и любое количество прямых так, чтобы все прямые пересеклись в одной точке, и для каждых двух окружностей среди нарисованных прямых нашлись бы две их общие касательные.

а) Может ли Юра решить эту задачу для любого числа $n \geqslant 2$?

б) При каких числах n Юра может решить эту задачу, если добавить условие, что все нарисованные окружности имеют равный радиус?

LIX Олимпиада Эстонии по математике

14 апреля 2012 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие пары (n, m) положительных целых чисел, при которых арифметическое и геометрическое среднее чисел n и m являются различными двузначными натуральными числами, которые одно из другого получаются перестановкой цифр.

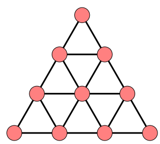
Замечание. Геометрическим средним положительных чисел x, y называется число $\sqrt{xy}$.

2. Назовём действительные числа r, s *приближёнными*, если $|r - s| = 10^u$ при некотором целом числе u.

Пусть $y = ax + b$ такая линейная функция, при которой найдутся такие приближённые числа x_1, x_2, что соответствующие им y_1, y_2 являются приближёнными. Доказать, что тогда при любых приближённых числах x_1', x_2' соответствующие им y_1', y_2' также являются приближёнными.

3. На плоскости дан треугольник ABC. Точка P является точкой пересечения стороны BC и проведённой из вершины A биссектрисы, а точка M является основанием проведённой из вершины B медианы треугольника ABC. Прямые AB и MP пересекаются в точке K. Доказать, что если $\dfrac{|PC|}{|BP|} = 2$, то AP и CK перпендикулярны.

4. Равносторонний треугольник, длина стороны которого 3, поделён на 9 равносторонних треугольников с длиной стороны 1. В каждую точку, являющуюся вершиной некоторого маленького треугольника (на рисунке обозначены красным), записывают целое число от 1 до 10 (каждое число записывают ровно один раз). В каждый маленький треугольник записывают сумму чисел, находящихся в трёх его вершинах. Доказать, что найдутся такие три маленьких треугольника, что сумма чисел, записанных в них, не меньше числа 48.



5. Найти все такие тройки положительных целых чисел (x, y, z), при которых $x \cdot y! + 2y \cdot x! = z!$.

Замечание. Факториалом $n!$ натурального числа n называется произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

LIX Олимпиада Эстонии по математике

14 апреля 2012 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Профессор P в своей последней научной работе изучал натуральные числа с особым свойством. Известно, что если натуральное число x обладает этим свойством, то им обладают и все числа кратные числу x.

Допустим, что $a_1, \ldots, a_n$ – положительные целые числа, все большие единицы делители которых обладают свойством, которое изучал профессор P. Можно ли с уверенностью утверждать, что в этом случае также и все большие единицы делители произведения $a_1 \ldots a_n$ обладают этим свойством?

2. а) Найти все положительные целые числа n, при которых сумму целых чисел от 1 до $n+1$ можно представить как сумму n последовательных целых чисел.

б) Найти все положительные целые числа n, при которых найдётся такое целое число a, что сумма целых чисел от a до $a+n$ равна сумме целых чисел от $a+n+1$ до $a+2n$.

3. Стороны AB и AC треугольника ABC касаются окружности c соответственно в точках B' и C'. Центр L окружности c находится на стороне BC. Центр O описанной вокруг треугольника ABC окружности находится на меньшей дуге $B'C'$ окружности c. Доказать, что окружность, описанная вокруг треугольника ABC, и окружность c пересекаются в двух точках.

4. На клетчатое поле с квадратными клетками помещается некоторое количество карт размером 1×2 так, что края карт совпадают с линиями поля, ни одна карта не вылезает за границы поля, и каждую клетку покрывают ровно две карты. Доказать, что можно удалить часть карт так, что каждую клетку останется покрывать ровно одна карта.

5. В квадрате с длиной стороны равной 11 отметили 2012 точек. Доказать, что можно найти равносторонний треугольник с длиной стороны равной 12, который будет покрывать по крайней мере 671 точку.

LIX Олимпиада Эстонии по математике

14 апреля 2012 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все такие пары положительных целых чисел (x, y), при которых

$$\frac{1}{x^2} + \frac{249}{xy} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2012}.$$

2. а) Доказать, что при любом действительном числе x среднее арифметическое чисел $\sqrt{1+\sin x}$ и $\sqrt{1-\sin x}$ равно одному из следующих чисел: $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $-\sin\frac{x}{2}$, $-\cos\frac{x}{2}$.

б) Возможно ли в части а) убрать одно из перечисленных в конце четырёх чисел так, чтобы утверждение осталось верным?

3. Внутри остроугольного треугольника ABC выбирают такую точку P, что все точки, симметричные ей относительно сторон треугольника ABC, находятся на окружности, описанной вокруг этого треугольника. Доказать, что P – это точка пересечения высот треугольника ABC.

4. В шеренге стоят 2^n солдат, где n – положительное целое число. При каждом перестроении в начало новой шеренги встают солдаты, до этого стоявшие на нечётных местах (в том же порядке), а за ними – солдаты, до этого стоявшие на чётных местах (в том же порядке). Доказать, что по прошествии n перестроений солдаты окажутся в таком же порядке, с которого начали.

5. а) Найдётся ли не равная тождественно нулю функция, заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, при отражении графика которой относительно оси y получают график производной этой функции?

б) Найдётся ли не равная тождественно нулю функция, заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, при сдвиге графика которой на 1 единицу в положительном направлении вдоль оси x получают график производной этой функции?

Lahendused

1. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Kuna arvude a, b, c summa jagub 6-ga ja on seetõttu paaris, on nende arvude seas kas 0 või 2 paaritut. Paarisarvu ruut annab 4-ga jagades alati jäägi 0, paaritu arvu ruut aga jäägi 1. Seega kui oleks 2 paaritut arvu, tekiks ruutude summa $a^2 + b^2 + c^2$ jagamisel 4-ga jääk $0 + 1 + 1$ ehk 2. See aga pole võimalik, sest summa jagub eelduse kohaselt 36-ga, niisiis ka 4-ga. Järelikult a, b, c on kõik paaris. Kuid siis a^3, b^3, c^3 jaguvad kõik 8-ga ja nii ka nende summa.

b) Kui $a = 8$, $b = c = 2$, siis eeldused on täidetud: $8 + 2 + 2$ ehk 12 jagub 6-ga ning $8^2 + 2^2 + 2^2$ ehk 72 jagub 36-ga. Paraku $8^3 + 2^3 + 2^3$ ehk 528 ei jagu 9-ga, seetõttu ka mitte 27-ga.

Märkus. Ülesande a)-osa lahenduses kasutatud tuntud arvuteooriafaktid jääkide kohta on lihtsasti tõestatavad. Paarisarvu ruut jagub 4-ga ja kuup jagub 8-ga, sest $(2k)^2 = 4 \cdot k^2$ ja $(2k)^3 = 8 \cdot k^3$; paaritu arvu ruut annab 4-ga jagades jäägi 1, sest $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1$. Kuna seejuures $k^2 + k$ ehk $k(k + 1)$ on paarisarv, annab paaritu arvu ruut alati jäägiks 1 isegi 8-ga jagades (seda fakti küll antud ülesandes vaja ei lähe).

2. *Vastus:* $x = 2, y = 0$; $x = 0, y = \sqrt{2}$; $x = 0, y = -\sqrt{2}$.

Lahendus 1. Esimesest võrrandist saame $x(1 - y^2) = 2 - y^2$. Kuna $1 - y^2$ ja $2 - y^2$ ei saa olla mõlemad nullid (nad erinevad teineteisest 1 võrra), siis juht $1 - y^2 = 0$ lahendeid ei anna. Järelikult on esimene võrrand samaväärne võrdusega $x = \dfrac{2 - y^2}{1 - y^2}$. Analoogiliselt tekib teisest võrrandist $x^2 = \dfrac{4 - y^4}{1 - y^4}$. Esimesest võrdusest teise asendades saame

$$\left(\frac{2 - y^2}{1 - y^2}\right)^2 = \frac{4 - y^4}{1 - y^4},$$

mis antud juhul on samaväärne seosega

$$(2 - y^2)(2 - y^2)(1 - y^2)(1 + y^2) = (2 - y^2)(2 + y^2)(1 - y^2)(1 - y^2).$$

Kui $2 - y^2 = 0$, siis $x = \dfrac{2-y^2}{1-y^2} = 0$ ja $y = \pm\sqrt{2}$, mis sobivad lahenditeks. Vastasel korral saame suurusega $(2-y^2)(1-y^2)$ läbi jagades seose $(2-y^2)(1+y^2) = (2+y^2)(1-y^2)$, kust lahtikorrutamine ja sarnaste liikmete koondamine annab $y^2 = -y^2$ ehk $y = 0$. Sel juhul $x = 2$.

Lahendus 2. Tõstame esimese võrrandi pooled ruutu ja lahutame teise võrrandi. Saame seose

$$2x^2y^4 - 2x^2y^2 - 2xy^4 + 2xy^2 = 0,$$

mille vasaku poole tegurdamisel tekib võrrand

$$2xy^2(x-1)(y^2-1) = 0.$$

Seega võimalikud juhud on $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ ja $y^2 = 1$. Esimesel juhul $y^2 = 2$, kust $y = \pm\sqrt{2}$, teisel juhul $x = 2$. Need lahendid rahuldavad mõlemat võrrandit. Juhud $x = 1$ ja $y^2 = 1$ annavad esimesest võrrandist $0 = 2$, seega ei sobi.

Lahendus 3. Lahutades esimese võrrandi pooltest 1, saame vasaku poole tegurdamise järel samaväärse seose $(x-1)(1-y^2) = 1$. Analoogselt saame teise võrrandiga samaväärse seose $(x^2-1)(1-y^4) = 3$, mis annab $(x-1)(x+1)(1-y^2)(1+y^2) = 3$. Kokkuvõttes $(x+1)(1+y^2) = 3$. Selle võib kirjutada samaväärselt kujul $((x-1)+2)(2-(1-y^2)) = 3$, kust pärast poolte vahetamist ja lahtikorrutamist saame

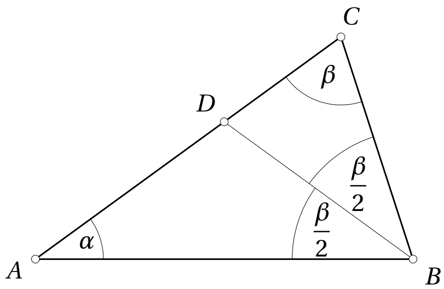
$$3 = 2(x-1) - 2(1-y^2) + 4 - (x-1)(1-y^2) = 2((x-1)-(1-y^2)) + 3.$$

Seega $2((x-1)-(1-y^2)) = 0$ ehk $x - 1 = 1 - y^2$. Kuna $(x-1)(1-y^2) = 1$, on ainsad võimalused $x - 1 = 1 - y^2 = 1$ ja $x - 1 = 1 - y^2 = -1$. Esimene annab lahendi $x = 2$, $y = 0$ ning teine lahendid $x = 0$, $y = \pm\sqrt{2}$.

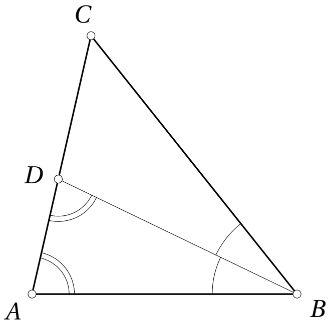
Märkus. Lahendusega 1 sarnaselt võib sihile jõuda ka, alustades y^2 avaldamisest.

3. *Vastus:* a) jah; b) ei.

a) Tähistame $\alpha = \angle BAC$ ja $\beta = \angle ABC = \angle ACB$. Eeldame, et BCD on võrdhaarne. Kui selles kolmnurgas oleks külg BD alus, oleks alusnurga ja tipunurga suurused vastavalt $\dfrac{\beta}{2}$ ja β, kust $2 \cdot \dfrac{\beta}{2} + \beta = 180^\circ$ ehk $\beta = 90^\circ$. See on võimatu, kuna β on võrdhaarse kolmnurga ABC alusnurk. Kui kolmnurgas BCD oleks külg BC alus, peaks alusnurkade võrdsuse põhjal kehtima $\dfrac{\beta}{2} = \beta$, mis on samuti võimatu. Järelikult alus on CD (joonis 1). Siis kolmnurgad ABC ja BCD on tunnuse NNN põhjal sarnased. Seega $\angle DBA = \angle DBC = \angle BAC = \angle BAD$ ehk kolmnurk ABD on võrdhaarne alusega AB.



Joonis 1



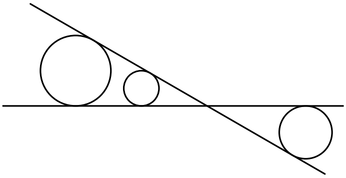
Joonis 2

b) Kui kolmnurga ABC nurgad on $\frac{3}{7}\cdot 180^\circ$, $\frac{2}{7}\cdot 180^\circ$, $\frac{2}{7}\cdot 180^\circ$, siis

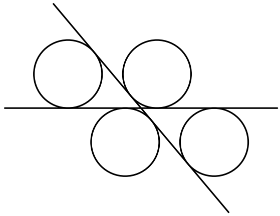
$$\begin{aligned}\angle ADB &= 180^\circ - \angle BAD - \angle ABD \\ &= 180^\circ - \frac{3}{7}\cdot 180^\circ - \frac{1}{7}\cdot 180^\circ \\ &= \frac{3}{7}\cdot 180^\circ \\ &= \angle BAD,\end{aligned}$$

mistõttu ABD on võrdhaarne alusega AD (joonis 2). Samas kolmnurga BCD nurkade suurused $\frac{1}{7}\cdot 180^\circ$, $\frac{2}{7}\cdot 180^\circ$, $\frac{4}{7}\cdot 180^\circ$ on paarikaupa erinevad, mistõttu kolmnurk BCD ei ole võrdhaarne.

4. Kolmnurgas, mille ühes tipus asub 10, on summa vähemalt 13. Kui 10 ei asu suure kolmnurga tipus, siis on selliseid kolmnurki vähemalt 3 ja ülesanne on lahendatud. Kui 10 asub suure kolmnurga tipus, siis vaatame, kus asub 9. Kui 9 ei asu suure kolmnurga tipus, siis ta asub vähemalt 3 väikese kolmnurga tipus, neis kõigis on summa vähemalt 12 ja ülesanne on lahendatud. Kui 9 asub suure kolmnurga tipus, siis vaatame, kus asub 8. Kui 8 ei asu suure kolmnurga tipus, siis ta asub veel vähemalt 3 väikese kolmnurga tipus. Neist vähemalt kahes on summa vähemalt 12, kusjuures ülimalt üks neist saab kokku langeda mõne juba varem leitud kolmnurgaga, seega ülesanne on lahendatud. Kui 8 asub suure kolmnurga tipus, siis on kas vastavas väikeses kolmnurgas summa vähemalt 12, mispuhul ülesanne on lahendatud, või on selle kolmnurga ülejäänud tippudes 1 ja 2. Viimasel juhul on 3, 4, 5 vähimad arvud, mille asukohta pole veel määratud, kuid need annavad summaks 12. Seega saab viimaseks otsitavaks kolmnurgaks võtta suvalise sellise, mille ühtki tippu pole veel vaadeldud (selliseid kolmnurki on kolm).



Joonis 3



Joonis 4

5. *Vastus:* a) jah; b) $n \leqslant 4$.

a) Jüri võib tõmmata kaks lõikuvat sirget ja paigutada tekkinud nurkadesse ükskõik mitu ringjoont, mis puutuvad kaht haara (joonis 3). Iga kahe ringjoone jaoks on need kaks sirget ühispuutujateks.

b) Eeldame, et Jüril on ülesanne lahendatud mingi n jaoks, kus $n > 1$. Olgu kõigi sirgete ühine lõikepunkt O ning vaatleme suvalist ringjoont c. Ülesande tingimustest järeldub, et ringjoonel c leidub Jüri joonistatud kimbus kaks puutujat k ja l. Ent üht ringjoont saab puutuda vaid kaks samast punktist lähtuvat sirget. Seega ringjoonel c rohkem puutujaid kimbus pole. Kui nüüd c' on suvaline muu Jüri joonistatud ringjoon, siis ringjoonte c ja c' ühispuutujateks saavad olla vaid k ja l. Järelikult on k ja l kõigi ringjoonte ühised puutujad. Kaks lõikuvat sirget jaotavad tasandi neljaks sektoriks, millest igaühes saab haaru puutudes paikneda vaid üks kindla raadiusega ringjoon (joonis 4). Seega $n > 4$ korral pole ülesanne lahendatav, iga $n \leqslant 4$ korral aga ilmselt on.

Lahendused

1. *Vastus:* $(32, 98)$, $(98, 32)$.

Olgu nõutud arvude aritmeetiline keskmine $10a+b$, kus a ja b on ühekohalised naturaalarvud, ning nõutud arvud ise $10a+b+x$ ja $10a+b-x$. Siis otsitavate arvude geomeetriline keskmine on $\sqrt{(10a+b+x)(10a+b-x)}$ ehk $\sqrt{(10a+b)^2-x^2}$. Vastavalt ülesande tingimustele

$$\sqrt{(10a+b)^2-x^2} = 10b+a,$$

mis pärast ruutu tõstmist ja lihtsustamist annab $x^2 = 99(a^2-b^2)$. Seega x^2 jagub 99-ga, millest järeldub x^2 jaguvus 3- ja 11-ga. Et 3 ja 11 on algarvud, siis ka x ise jagub 3- ja 11-ga ning kokkuvõttes 33-ga. Tähistades $x = 33z$, saame

$$11z^2 = \frac{99 \cdot 11z^2}{99} = \frac{x^2}{99} = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

kust näeme, et korrutis $(a+b)(a-b)$ jagub 11-ga. Et 11 on algarv, siis kas $a+b$ või $a-b$ jagub 11-ga. Kuna $a-b \neq 0$ ja a, b on ühekohalised, siis ainsa võimalusena $a+b=11$. Järelikult $a-b=z^2$. Kuna $a-b$ ja $a+b$ on sama paarsusega, siis z peab olema paaritu. Seega $z=1$, sest $z \geqslant 3$ korral $x \geqslant 99$, aga $10a+b-x$ peab olema positiivne. Seega $a=6$, $b=5$, $x=33$ ning vastav arvude paar on $(98, 32)$.

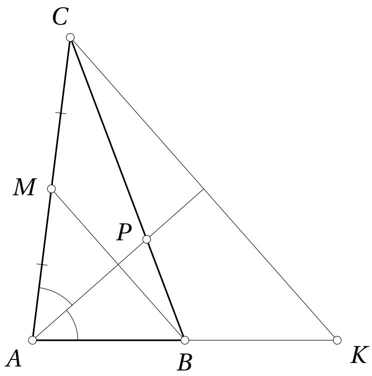
2. Vastavalt tingimustele $|x_1-x_2| = 10^u$ ja $|y_1-y_2| = |(ax_1+b)-(ax_2+b)| = 10^v$ mingite täisarvude u, v korral. Seega

$$10^v = |(ax_1+b)-(ax_2+b)| = |a(x_1-x_2)| = |a| \cdot |x_1-x_2| = |a| \cdot 10^u,$$

kust $|a| = \dfrac{10^v}{10^u} = 10^{v-u}$. Kui nüüd x'_1, x'_2 on mistahes lähedased reaalarvud — olgu $|x'_1 - x'_2| = 10^w$ — siis saame

$$\begin{aligned}
|y'_1 - y'_2| &= |(ax'_1+b)-(ax'_2+b)| \\
&= |a(x'_1-x'_2)| = |a| \cdot |x'_1-x'_2| = 10^{v-u} \cdot 10^w = 10^{w+v-u}.
\end{aligned}$$

Et u, v, w on täisarvud, siis ka $w+v-u$ on täisarv, millega on näidatud, et y'_1, y'_2 on lähedased.



Joonis 5

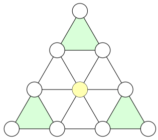
3. *Lahendus 1.* Olgu K' selline punkt kiirel AB, et B poolitab lõigu AK' (joonis 5). Siis CB on kolmnurga ACK' mediaan. Et punkt P jaotab selle lõigu suhtes $2 : 1$, on P kolmnurga ACK' mediaanide lõikepunkt. Seega $K'M$, mis on samuti kolmnurga ACK' mediaan, läbib punkti P. Järelikult $K = K'$. Niisiis B on lõigu AK keskpunkt. Et AP läbib punkti P, on ka tema kolmnurga ACK mediaan. Ülesande tingimuste kohaselt on ta samas nurgapoolitaja. Järelikult ACK on võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga A ja AP on ühtlasi tema kõrgus. Seega $AP \perp CK$.

Lahendus 2. Nagu eelmises lahenduses näitame, et B on lõigu AK keskpunkt. Järelikult BM on kolmnurga ACK kesklõik ja $BM \parallel CK$. Nurgapoolitaja jaotab vastaskülje alati samas suhtes ülejäänud külgedega, seega $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{|PC|}{|BP|} = 2$. Et M on AC keskpunkt, siis $|AB| = |AM|$. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja on ühtlasi kõrgus, seega $AP \perp BM$. Siit ka $AP \perp CK$.

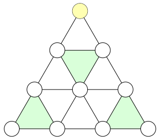
Märkus. Lahenduses 2 kasutatud tuntud nurgapoolitaja omadus on lihtsasti tõestatav. Punktist P kolmnurkadele ABP ja ACP tõmmatud kõrgused on võrdsed, sest nurgapoolitaja punktid paiknevad nurga haaradest ühekaugusel. Järelikult kolmnurkade ABP ja ACP pindalad suhtuvad nagu vastavad alused AB ja AC. Samas on kolmnurkadel ABP ja ACP ühine tipust A tõmmatud kõrgus. Järelikult nende pindalad suhtuvad ka nagu alused BP ja PC. Kokkuvõttes $|BP| : |PC| = |AB| : |AC|$.

4. *Lahendus 1.* Suvalised kolm väikest kolmnurka, millest ühelgi kahel pole ühiseid tippe, hõlmavad väikeste kolmnurkade tippudesse kirjutatud kümnest arvust üheksa. Seega neisse kolmnurkadesse kirjutatud arvude summa on $55 - a$, kus a on arv hõlmamata jäänud tipus.

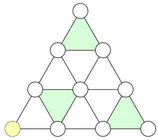
Jääb üle märgata, et kolme väikest kolmnurka, millest ühelgi kahel pole ühiseid tippe, on võimalik valida neljal erineval viisil, jättes iga kord hõl-



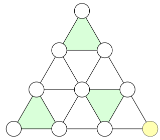
Joonis 6



Joonis 7



Joonis 8



Joonis 9

mamata erineva arvu. Siis vähemalt ühel juhul on hõlmamata arv ülimalt 7 ja kolme valitud kolmnurga arvude summa vähemalt $55 - 7$ ehk 48.

Tõepoolest, kolm nurgakolmnurka jätavad hõlmamata parajasti keskmise arvu (joonis 6) ning kaks suvalist nurgakolmnurka koos ühe kolmnurgaga, mille üks tipp asub suure kolmnurga keskel ja kaks ülejäänud tippu ei ühti valitud kahe kolmnurga tippudega, jätavad hõlmamata parajasti suure kolmnurga kolmandas nurgas oleva arvu (joonised 7, 8, 9).

Lahendus 2. Olgu suure kolmnurga keskel olev arv m. Siis kolme nurgas asuva kolmnurga summade kokkuliitmisel saame kõik arvud ühest kümneni peale m, seega on kolme nurgakolmnurkadesse kirjutatud arvu summa $55 - m$. Kui $m \leqslant 7$, siis see summa on vähemalt 48.

Ülejäänud juhtudel vaatame ümber keskpunkti asuvaid kolmnurki üle ühe. Summade kokkuliitmisel saame kõik arvud, välja arvatud kolm arvu suure kolmnurga nurkades, kuid keskmist arvu on kolmekordselt. Seega on neisse kolme kolmnurka kirjutatud arvude summa vähemalt $21 + 3m$. Kui $m \geqslant 9$, siis see on vähemalt 48.

Jääb üle juht $m = 8$. Nurkades olevatesse kolmnurkadesse kirjutatud arvude summa on $55-8$ ehk 47, seega vähemalt ühes neist on arv vähemalt 16. Seejuures kui üheski neist kolmest ei ole arv 17 või suurem, peab 16 esinema kahes kolmnurgas. Ümber keskpunkti paikneva kuue kolmnurga sisse kirjutatud arvud annavad üle ühe (kolmekaupa) summadeks vähemalt $21+3\cdot 8$ ehk 45. Seega kummaski kolmikus on vähemalt üks kolmnurk summaga vähemalt 15 ning et kõrvuti paiknevates kolmnurkades ei saa olla sama summa (nad erinevad täpselt ühe liidetava poolest), on vähemalt ühes neist kuuest kolmnurgast arv vähemalt 16. Nüüd kui ühes nurgakolmnurgas esineb 17, on leitud kolm nõutud kolmnurka summadega 17, 16, 15. Kui aga kahes nurgakolmnurgas esineb 16, sobivad kolmnurgad summadega 16, 16, 16.

5. *Vastus:* $(2, 1, 3)$ ja $(n, n + 1, n + 2)$ iga positiivse täisarvu n korral.

Et vasak pool on suurem nii arvust $x!$ kui ka arvust $y!$, siis ilmselt $z > x$, $z > y$. Seega võrduse pooled jaguvad arvudega $x!$ ja $y!$. Sellest tulenevalt $x \cdot y!$ jagub $x!$-ga, mistõttu $y!$ jagub $(x - 1)!$-ga ehk $y \geqslant x - 1$. Analoogiliselt $2y \cdot x!$ jagub $y!$-ga, mistõttu $2 \cdot x!$ jagub $(y - 1)!$-ga. Variant $x = 1, y = 3$ ei anna lahendit, $x > 1$ korral aga $2 \cdot x! < (x + 1)!$, mistõttu kehtib $x \geqslant y - 1$. Seega sõelale on jäänud võimalused, kus $-1 \leqslant y - x \leqslant 1$.

- Kui $y = x - 1$, siis võrrand taandub kujule $(2x - 1) \cdot x! = z!$. Et $(x + 1)(x + 2) > 2x - 1$, siis $2x - 1 = x + 1$ ja $z = x + 1$. Saame lahendi $x = 2, y = 1, z = 3$.
- Kui $y = x$, siis võrrand taandub kujule $3x \cdot x! = z!$. Et $(x+1)(x+2) > 3x$, siis $3x = x + 1$, kuid see ei anna täisarvulisi lahendeid.
- Kui $y = x + 1$, siis võrrand taandub kujule $(x^2 + 3x + 2) \cdot x! = z!$ ehk $(x + 2)! = z!$. Siit saame lahendite pere $x = n, y = n + 1, z = n + 2$.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

14. aprill 2012 Lõppvoor **11. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* jah.

Olgu k korrutise $a_1 \ldots a_n$ suvaline 1-st suurem tegur. Siis leidub arvul k mingi algtegur p, mis on ühtlasi korrutise $a_1 \ldots a_n$ tegur. Algarvulisuse tõttu leidub i, nii et p on a_i tegur. Et a_i kõik 1-st suuremad tegurid on P omadusega, siis ka p on P omadusega. Eelduse põhjal on kõik p kordsed P omadusega, muuhulgas ka k.

2. *Vastus:* a) 1; b) kõik positiivsed täisarvud.

Lahendus 1.

a) Ilmselt kahe esimese positiivse täisarvu summa esitub ka ühe positiivse täisarvu summana. Olgu nüüd $n \geqslant 2$ ja näitame, et $n+1$ esimese positiivse täisarvu summa ei esitu n järjestikuse täisarvu summana. Tõepoolest, võrratuste ahel

$$\begin{aligned} 2+3+\ldots+n+(n+1) &< 1+2+3+\ldots+n+(n+1) \\ &< 1+2+3+\ldots+n+(n+1)+1 \\ &= 3+\ldots+n+(n+1)+2+2 \\ &\leqslant 3+\ldots+n+(n+1)+(n+2) \end{aligned}$$

näitab, et $n+1$ esimese positiivse täisarvu summa $1+\ldots+(n+1)$ jääb suuruselt arvude $2+\ldots+(n+1)$ ja $3+\ldots+(n+2)$ vahele, mis on järjestikused n järjestikuse täisarvu summad. Seega arv $1+\ldots+(n+1)$ ise ei ole n järjestikuse täisarvu summa.

b) Olgu n suvaline positiivne täisarv. Ülesande lahendamiseks piisab tähele panna, et

$$\begin{aligned} n^2+(n^2+1)+\ldots+(n^2+n) &= (n+1)\cdot n^2+(1+\ldots+n) \\ &= (n^2+n)\cdot n+(1+\ldots+n) \\ &= (n^2+n+1)+\ldots+(n^2+n+n). \end{aligned}$$

Lahendus 2. Kasutame aritmeetilise jada summa valemit.

a) Kui n on paaritu, siis n järjestikuse täisarvu summa jagub n-ga. Seega kui arv $1+2+\ldots+(n+1)$ ehk $\dfrac{(n+1)}{2}\cdot(n+2)$ oleks ühtlasi n järjestikuse täisarvu summa, jaguks ta arvudega $\dfrac{n+1}{2}$ ja n. Et $n+1$ ja n on ühistegurita, on seda ammugi $\frac{n+1}{2}$ ja n. Seega $\frac{n+1}{2} \cdot (n+2)$ peaks jaguma arvuga $\frac{n+1}{2} \cdot n$ ehk $n+2$ jaguma n-ga.

Kui n on paaris, siis n järjestikuse täisarvu summa jagub $\frac{n}{2}$-ga. Seega kui arv $1+2+\ldots+(n+1)$ ehk $(n+1) \cdot \frac{n+2}{2}$ oleks ühtlasi n järjestikuse täisarvu summa, jaguks ta arvudega $n+1$ ja $\frac{n}{2}$. Et $n+1$ ja n on ühistegurita, on seda ammugi $n+1$ ja $\frac{n}{2}$. Seega $(n+1) \cdot \frac{n+2}{2}$ peaks jaguma arvuga $(n+1) \cdot \frac{n}{2}$, millest samuti järeldub $n+2$ jagumine n-ga.

Seega kõigil juhtudel $n+2$ jagub n-ga, mis on samaväärne tingimusega, et 2 jagub n-ga. Seega $n = 1$ või $n = 2$. Muidugi $1+2$ esitub ühe täisarvu summana, kuid $1+2+3$ ehk 6 paarisarvuna kahe järjestikuse täisarvu summana ei esitu.

b) Kui a on vaadeldavatest järjestikustest täisarvudest esimene, siis ülesande tingimus avaldub kujul

$$\frac{a+a+n}{2} \cdot (n+1) = \frac{a+n+1+a+2n}{2} \cdot n.$$

Lahti korrutades ja lihtsustades leiame, et see on samaväärne tingimusega

$$a = n^2.$$

See tähendab, et $n+1$ järjestikust täisarvu, millest esimene on n^2, annavad summaks neile järgneva n järjestikuse täisarvu summa. Järelikult küsitud arvud leiduvad iga n jaoks.

3. Tähistagu r kolmnurga ABC ümberringjoone raadiust, s ringjoone c raadiust ning olgu $\alpha = \angle BAC$ (joonis 10).

Piirdenurga ja puutuja omadustest ringjoones c saame

$$\angle B'OC' = \angle BB'C' = 180^\circ - \angle AB'C'.$$

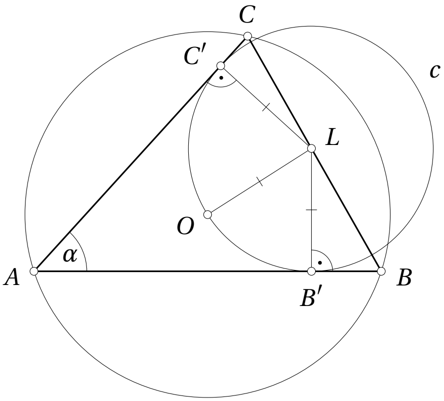
Et puutujalõigud AB' ja AC' on võrdse pikkusega, siis

$$\angle AB'C' = \angle AC'B' = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Kokkuvõttes

$$\angle B'OC' = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Samas ilmselt $\angle B'OC' > \angle BOC = 2\alpha$, mistõttu $90^\circ + \frac{\alpha}{2} > 2\alpha$. Siit $\alpha < 60^\circ$.

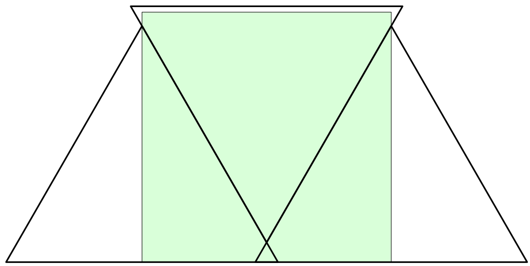


Joonis 10

Olgu K külje BC keskpunkt. Täisnurksest kolmnurgast KOC saame võrdused $|KO| = |OC| \cos \angle KOC = r \cos \alpha$. Teiselt poolt aga $|KO| \leqslant |LO| = s$. Et $\cos \alpha > \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, siis kokkuvõttes $\frac{1}{2} r < r \cos \alpha = |KO| \leqslant s$ ehk $r < 2s$. Kuna ringjoon c läbib kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti, siis need ringjooned lõikuvad.

4. Valime suvalise kahekordselt kaetud ruudu ning ühe seda katvatest kaartidest. Liigume seda kaarti mööda naaberruutu ning valime seda katvatest kaartidest teise kaardi. Liigume seda mööda järgmisse ruutu jne, kuni jõuame tagasi esimesse valitud ruutu. Kuna kaarte on lõplik arv, siis on lõpliku arvu sammude järel peame juba läbitud ruutu tagasi jõudma ning mõnda teise valitud ruutu me ei saa tagasi jõuda, sest kõigis ruutudes peale esimese on mõlemad seda katvad kaardid juba valitud. Kui ristkülik värvida malekorras, siis paaritu arvu käikude järel jõuame vastasvärvi ruutu ja paarisarvu käikude järel sama värvi ruutu. Järelikult on valitud kaarte paarisarv. Seega saab valitud kaardid üle ühe eemaldada. Kõik läbitud ruudud jäävad pärast seda ühekordselt kaetuks. Kui on veel järel kahekordselt kaetud ruute, siis kordame seda protsessi uue suvalise kahekordselt kaetud ruuduga. Me ei saa kunagi liikuda kahekordselt kaetud ruudult ühekordselt kaetud ruudule, sest kõik ühekordselt kaetud ruudud olid enne seotud kahe praegu ühekordselt kaetud ruuduga. Seega saame lõpliku arvu sammude järel uue tsükli, millest võime jälle kaardid üle ühe eemaldada. Nii jätkame, kuni kõik ruudud on ühekordselt kaetud.

5. Paigutame kaks võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega 12 nii, et kummagi üks külg langeb osaliselt kokku ruudu mingi ühe ja sama küljega, nende kolmnurkade vaadeldud külgede vastastipud paiknevad aga ruudu erine-



Joonis 11

vatel külgedel (joonis 11). Ala, mida katavad mõlemad kolmnurgad, kujutab endast võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega 1. Kolmanda võrdkülgse kolmnurga küljepikkusega 12 paigutame 180° pööratult kahe olemasoleva kolmnurga vahele, nii et tipp langeb kokku väikese kolmnurga tipuga. Veendume, et ruut on nende kolmnurkadega täielikult kaetud; selleks on vaja näidata, et suure ja väikese kolmnurga kõrguste summa on vähemalt 11, ehk $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (12 + 1) > 11$. Tõepoolest, see on samaväärne tingimustega $13\sqrt{3} > 22$ ja $3 \cdot 169 > 484$, millest viimane ilmselt kehtib. Järelikult asub vähemalt kolmandik 2012 punktist ehk vähemalt 671 punkti ühes valitud kolmest võrdkülgsest kolmnurgast.

Lahendused

1. *Vastus:* $(503, 1006)$, $(1006, 503)$.

Lahendus 1. Olgu SÜT $(x, y) = d$ ning $x = ad$, $y = bd$. Siis võrrand teisendub kujule $\dfrac{a^2 + 249ab + b^2}{a^2b^2d^2} = \dfrac{1}{2012}$ ehk

$$a^2b^2d^2 = 2012(a^2 + 249ab + b^2). \tag{1}$$

Kuna a ja b on ühistegurita, siis a^2 ja b^2 on kumbki ühistegurita arvuga $a^2 + 249ab + b^2$ ja nad peavad järelikult olema arvu 2012 tegurid. Et $2012 = 2^2 \cdot 503$ ja 503 on algarv, on võimalikud variandid $(a, b) = (1, 1)$, $(a, b) = (1, 2)$, $(a, b) = (2, 1)$, kuid $(a, b) = (1, 1)$ annaks võrdusse (1) asendades $d^2 = 2012 \cdot 251$, mis täisarvudes pole võimalik. Teised kaks varianti annavad $4d^2 = 2012 \cdot 503$, kust $d = 503$. Siit saame vastuseks $(x, y) = (503, 1006)$ ja $(x, y) = (1006, 503)$.

Lahendus 2. Korrutades võrrandi mõlemad pooled arvuga $2012x^2y^2$, saame

$$2012x^2 + 249 \cdot 2012xy + 2012y^2 = x^2y^2. \tag{2}$$

Seose (2) vasakust poolest näeme, et võrduse pooled peavad jaguma 503-ga. Et 503 on algarv, siis parema poole põhjal peab üks arvudest x ja y jaguma 503-ga. Seega x^2 või y^2 jagub 503^2-ga ehk võrduse (2) pooled jaguvad 503^2-ga. Kui x jagub 503-ga, siis vasaku poole liidetavad $2012x^2$ ja $249 \cdot 2012xy$ jaguvad 503^2-ga, mistõttu ka $2012y^2$ jagub 503^2-ga. Järelikult y jagub 503-ga. Analoogiliselt saame, et kui y jagub 503-ga, siis ka x jagub 503-ga. Kokkuvõttes peavad nii x kui ka y jaguma 503-ga. Tähistame $x = 503a$, $y = 503b$. Seos (2) teisendub pärast jagamist 503^3-ga kujule

$$4a^2 + 996ab + 4b^2 = 503a^2b^2.$$

Vaatleme juhtu $a \geqslant b$. Kui $b \geqslant 2$, siis

$$503a^2b^2 \geqslant 503a^2 \cdot 2b = 1006a^2b = 4a^2b + 4a^2b + 998a^2b > 4a^2 + 4b^2 + 996ab,$$

seega nõutud võrdus ei saaks kehtida. Seega $b = 1$. Siis aga saame a suhtes ruutvõrrandi $499a^2 - 996a - 4 = 0$, mille ainus positiivne lahend on $a = 2$. Siit saame algse võrrandi lahendi $(1006, 503)$. Juht $b \geqslant a$ on sümmeetriline ja annab lahendi $(503, 1006)$.

2. *Vastus:* b) ei.

Lahendus 1.

a) Tähistame vaadeldava aritmeetilise keskmise $A(x)$. Paneme tähele, et $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$ ja kahekordse nurga siinuse valemi rakendamine laseb kirjutada $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, mistõttu

$$1 + \sin x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2,$$
$$1 - \sin x = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2.$$

Järelikult

$$A(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{2} = \frac{|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}| + |\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}|}{2}.$$

Vastavalt sellele, millise märgiga on arvud $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ ja $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$, koondub lugejas üks trigonomeetriline funktsioon välja ja teine jääb mingi märgiga kahekordselt. Seega $A(x)$ võrdub ühega arvudest $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $-\sin\frac{x}{2}$, $-\cos\frac{x}{2}$.

b) Et $\sin 0 = \sin\pi = \sin 2\pi = \sin 3\pi = 0$, siis alati, kui x on üks arvudest 0, π, 2π, 3π, on

$$A(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Samas on juhtudel $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$, $x = 3\pi$ iga kord erinev arv loetelust $\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $-\sin\frac{x}{2}$, $-\cos\frac{x}{2}$ võrdne 1-ga (vt tabel). Järelikult ei saa ühtki neist neljast alternatiivist ära jätta.

x	$\sin\frac{x}{2}$	$\cos\frac{x}{2}$	$-\sin\frac{x}{2}$	$-\cos\frac{x}{2}$
0	0	1	0	-1
π	1	0	-1	0
2π	0	-1	0	1
3π	-1	0	1	0

Lahendus 2. Ülesande a)-osa väite saab tõestada ka järgmiselt. Tähistame $A(x)$ samamoodi nagu eelmises lahenduses. Et

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{2}\right)^2\\
&\quad=\frac{1+\sin x+1-\sin x+2\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)}}{4}\\
&\quad=\frac{2+2\sqrt{1-\sin^2 x}}{4}=\frac{2+2\sqrt{\cos^2 x}}{4}=\frac{2+2|\cos x|}{4}=\frac{1+|\cos x|}{2},
\end{aligned}$$

siis

$$A(x)=\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{2}=\sqrt{\frac{1+|\cos x|}{2}}.$$

Poolnurga valemite põhjal $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ ja $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$. Seega:

- kui $\cos x \geqslant 0$, siis $A(x)=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\pm\cos\frac{x}{2}$;
- kui $\cos x < 0$, siis $A(x)=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=\pm\sin\frac{x}{2}$.

Märkus. Lahenduses 2 kasutatud poolnurgavalemid on lihtsasti tuletatavad kahekordse nurga koosinuse valemist. Näiteks $\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ nähtub sellest, et

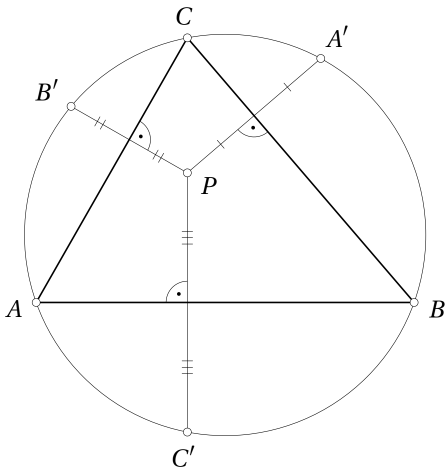
$$\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{2}=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2}=\cos^2\frac{x}{2}.$$

Teine valem saadakse analoogiliselt.

3. Olgu A', B', C' punktiga P sümmeetrilised punktid vastavalt sirgete BC, CA, AB suhtes (joonis 12). Siis $|C'A|=|PA|=|B'A|$, mistõttu kolmnurga ABC ümberringjoone kaared AC' ja AB' on võrdsed. Et A ja C' paiknevad sirgest BB' ühel ja C teisel pool, siis järelikult

$$\angle C'CA=\angle B'CA=\angle PCA.$$

Et P ja C' paiknevad sirgest AC samal pool, asuvad punktid P, C, C' ühel sirgel. Kuna $PC'\perp AB$, siis ka $PC\perp AB$, st P asub kolmnurga ABC tipust C tõmmatud kõrgusel. Analoogselt näeme, et P asub ka ülejäänud kahel kõrgusel, st on kõrguste lõikepunkt.



Joonis 12

Märkus 1. Kehtib ka pöördväide: kolmnurga kõrguste lõikepunktiga kolmnurga külgede suhtes sümmeetrilised punktid paiknevad kolmnurga ümberringjoonel. Tegu on tuntud geomeetriafaktiga, mida saab ära kasutada ülesandes antud väite tõestamiseks. Nimelt asub ülesande tingimust rahuldav punkt P ümberringjoone kaarte AB, BC, CA peegeldustel vastavalt sirgetest AB, BC, CA. Mainitud fakti põhjal asub ka kõrguste lõikepunkt samadel kaartel. Kuid ringjooned, mille kaarteks need peegeldused on, lõikuvad paarikaupa erinevates punktides A, B, C. Järelikult neil ei saa olla kaht erinevat kõigile ühist punkti.

Märkus 2. Nii nagu märkuses 1 vaadeldud pöördväide, kehtib ka ülesande väide kõigi, mitte ainult teravnurksete kolmnurkade jaoks.

4. *Lahendus 1.* Viimane sõdur ümberrivistustel oma asukohta ei muuda. Ülejäänud sõdurid paigutuvad ümber samamoodi nagu siis, kui viimast sõdurit poleks ja sõdurite arv oleks $2^n - 1$. Seega piisab ülesande väide tõestada $2^n - 1$ sõduri jaoks, mida järgnevalt teemegi.

Näitame, et pärast i sammu tekkiva rivi liikmed on algses $2^n - 1$ sõdurist koosnevas rivis leitavad, liikudes esimesest sõdurist alates hüpetega pikkusega 2^i ja käsitledes rivi tsüklilisena (pärast viimast sõdurit järgneb uuesti esimene). Tõepoolest, pärast 0 sammu see väide ilmselt kehtib (hüpe 2^0 ehk 1 tähendab järjest lugemist), iga ümberrivistus aga muudab hüppe kaks korda pikemaks, sest sõdureid valitakse üle ühe (viimase järel valitakse algusest teine, mis tsüklilises käsitluses on samuti üle ühe), kusjuures esimene sõdur jääb samaks.

Seega pärast n sammu tekkiva rivi liikmed on algses 2^n-1 sõdurist koosneva rivis leitavad hüpetega pikkusega 2^n. Et jääk arvu 2^n jagamisel arvuga

$2^n - 1$ on 1, on see samaväärne järjest lugemisega. Järelikult ongi n sammu järel tagasi algne rivi.

Lahendus 2. Nummerdame sõdurid algses rivis alates 0-st ja kujutame kõiki järjekorranumbreid n-kohalise kahendarvuna (mis võib alata ka nullidega; näiteks $n = 3$ korral on järjekorranumbriteks 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111). Pärast ümberrivistust asetsevad sõdurid nii, et lugedes kahendarvudes algset üheliste numbrit kõige kõrgema numbrina (jättes teiste numbrite järjestuse muutmata), on sõdurid jällegi nummerdatud alates 0-st järjestikuste arvudega. Pärast n-kordset ümberrivistust on kahendkoodi numbrite rollidele ring peale tehtud ja iga number vastab jälle oma algsele positsioonile kahendarvus.

5. *Vastus:* a) jah; b) jah.

a) Paneme tähele, et ülesande tingimus graafikutest on samaväärne nõudega, et iga reaalarvu x korral $f'(x) = f(-x)$. See on nii näiteks funktsiooni $f(x) = \sin x + \cos x$ korral, sest

$$f'(x) = \cos x - \sin x = \cos(-x) + \sin(-x) = f(-x).$$

b) Ülesande tingimus graafikutest on samaväärne nõudega, et iga reaalarvu x korral $f'(x) = f(x-1)$. Oletame, et a on selline 1-st suurem arv, et $\ln a = a^{-1}$. Siis defineerides $f(x) = a^x$, saame

$$f'(x) = a^x \ln a = a^x \cdot a^{-1} = a^{x-1} = f(x-1).$$

Jääb üle veenduda, et selline 1-st suurem arv a, et $\ln a = a^{-1}$, tõesti leidub. Kuna $\ln 1 = 0 < 1 = 1^{-1}$ ja $\ln \mathrm{e} = 1 > \mathrm{e}^{-1}$, siis pidevate funktsioonide $g(x) = \ln x$ ja $h(x) = x^{-1}$ graafikud lõikuvad mingil kohal $a > 1$. See ongi meie vajalik arv.

Märkus. On võimalik tõestada, et a)-osas sobivad vastusteks parajasti kõik funktsioonid kujul $f(x) = c \cdot (\sin x + \cos x)$, kus $c \neq 0$. Vastustel leidub teisi kujusid, nt $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin x + \cos x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Eesti LIX matemaatikaolümpiaad

14. aprill 2012 | Lõppvoor | **9. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Erik Paemurru)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 4 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et on 0 või 2 paaritut arvu: *1 p*
  - Näidatud või väidetud, et paaritu arvu ruut annab 4-ga jagades jäägi 1 ja sealt järeldatud, et kõik arvud on paaris: *2 p*
  - Näidatud, et kui 2 jagab arvu x, siis ka 2^3 jagab arvu x^3: *1 p*
- b)-osa: 3 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:
  - Leitud ainult näide, kus $a + b + c$ jagub 3-ga, $a^2 + b^2 + c^2$ jagub 9-ga, aga $a^3 + b^3 + c^3$ ei jagu 27-ga: *1 p*
  - Leitud korralik vastunäide: *3 p*

Leidus lahendusi, kus näidati, et kõik arvud on paaris, lahutades võrrandi $a + b + c = 6n$ ruudust võrrand $a^2 + b^2 + c^2 = 36m$. Seal anti üks punkt näitamise eest, et $ab + bc + ca$ jagub 18-ga ja 1 punkt järeldamise eest, et kõik arvud on paaris.

Vastuse eest punkte ei antud.

Väite eest, et kui $a + b + c$ jagub 6-ga ja $a^2 + b^2 + c^2$ jagub 6^2-ga, siis ka ilmselt $a^3 + b^3 + c^3$ jagub 6^3-ga, punkte ei antud.

Mõnes töös esines b)-osa vastunäiteid mustandis, millel olid küll nii ruutude kui ka kuupide summa välja arvutatud ja jaguvused näidatud, aga polnud kokku pandud, et sellega on b)-osa tehtud. Selle eest anti 2 punkti. Näite eest ainult 3 astmete kohta (skeemi b)-osa esimene lahendus) anti 1 punkt, sest selle saab lihtsalt muuta sobivaks näiteks, näiteks korrutades kõik arvud kahega.

Tüüpiline viga oli, et arvude summa jaguvusest arvuga d järeldati, et iga arv jagub arvuga d.

2. *(Elts Abel)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud teisenduste abil üks võrrand: 3 p

- Saadud sellest võrrandist kõik sobivad muutujate väärtused: 3 p
- Vormistatud lahendid: 1 p

3. *(Aleksei Lissitsin)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 4 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et juhul $|BD| = |BC|$ on ABD võrdhaarne: *2 p*
  - Näidatud, et juht $|BD| = |CD|$ ei ole võimalik: *1 p*
  - Näidatud, et juht $|BC| = |CD|$ ei ole võimalik: *1 p*
- b)-osa: 3 p
  - Näidatud, et juhul $|AB| = |BD|$ pole BCD võrdhaarne: *2 p*
  - Näidatud, et juht $|AB| = |BD|$ on võimalik (näiteks ilmutatud kujul on arvutatud nurkade väärtused sellel juhul): *1 p*

4. *(Reimo Palm)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Eesmärgiga leida arvude paigutust, kus poleks ülesandes nimetatud kolme kolmnurka või kus selliste kolmnurkade arv on vähim, tõestatud, et arvud 9 ja 10 peavad sel juhul kindlasti asuma suure kolmnurga tippudes: 2 p
- Tõestatud, et 8 peab asuma samuti suure kolmnurga tipus ning tema naabriteks peavad olema arvud 1 ja 2: 1 p
- Tõestatud, et leidub kolmas kolmnurk, mille arvude summa on suurem kui 11: 4 p

Põhjendamata väidete eest võeti 1–2 punkti maha.

5. *(Toomas Krips)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 2 p
- b)-osa: 5 p
- *Sealhulgas:*
  - Õige n väärtus: *1 p*
  - Pandud tähele, et ühest punktist saab tõmmata ühele ringjoonele vaid 2 sirget: *2 p*
  - Järeldatud, et ringjooni saavad puutuda vaid 2 sirget: *1 p*
  - Näidatud, et üle 4 ringjoone pole võmalik joonistada: *1 p*

Hindamisskeemid

1. *(Maksim Ivanov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti (skeemiridades on kasutatud žürii lahenduse tähistusi).

- Koostatud võrrand, millest saab avaldada kas arvu m või n ainult numbrite a ja b kaudu, ning avaldatud vastav arv: 2 p
- Tõestatud, et $a^2 + b^2 = 11z^2$ mingi täisarvu z korral: 2 p
- Tõestatud, et $a + b = 11$ ja $a - b = 1$: 2 p
- Arvutatud arvude m ja n võimalikud väärtused: 1 p

Ainult õige vastuse eest anti 1 punkt.

2. *(Evely Leetma)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Leitud, et $|a| = 10^k$, kus k on mingi täisarv, kuid lõpus vaadeldud vaid juhtumit $|x_1' - x_2'| = 10^u = |x_1 - x_2|$, kus u on täisarv. Üldiselt on lähedaste reaalarvude mõistest aru saadud: 6 p
- Leitud, et $a = 10^k$, kus k on mingi täisarv, st vaadeldud vaid positiivseid kordajaid a. Edasine analüüs korrektne: 5 p
- Lähedaste reaalarvude mõistet vaadeldud mittesümmeetrilisena, st r ja s on lähedased, kui $r - s = 10^u$ mingi täisarvu u korral. Sellest tulenevalt jõutud positiivse a väärtuseni $a = 10^k$, kus k on täisarv. Edasine analüüs korrektne: 4 p
- Vaadeldud juhtumit $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = 10^u$, kus u on täisarv, millest järeldatud, et $a = 1$: 1 p

Pisivigade eest võeti maha 1 punkt. Kui esitati lähedaste reaalarvude x_1 ja x_2 vaheline seos kujul $|x_1 - x_2| = 10^u$, aga ei pandud kirja, et u on täisarv, siis selle eest eraldi punkte maha ei võetud.

3. *(Oleg Košik)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et CB on kolmnurga ACK mediaan: 4 p
- *Sealhulgas:*
  - On olemas vaid idee, et kuna KM on mediaan, mis jaotab CB suhtes $2 : 1$, siis ka CB ise on mediaan: *1 p*

    - Arvatud, et CB on mediaan vaid selle tõttu, et üks punkt jaotab ta suhtes $2 : 1$: *0 p*
- Lahenduse lõpuleviimine: 3 p
- *Sealhulgas:*
    - Tähele pandud, et ka AP on mediaan: *1 p*
    - Tähele pandud, et kuna AP on nii nurgapoolitaja kui mediaan, siis kolmnurk ACK on võrdhaarne: *1 p*
    - Mainitud, et võrdhaarses kolmnurgas on nurgapoolitaja ka kõrgus: *1 p*

4. *(Uve Nummert)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täielik lahendus: 7 p
- On läbi vaadatud kaks erijuhtu: kus arvud 8, 9 ja 10 on suure kolmnurga tippudes, ning kus 9 või 10 on keskel: 3 p
- On läbi vaadatud üks neist kahest erijuhust: 2 p
- On läbi vaadatud üks neist kahest erijuhust, kuid pole selget põhjendust, miks siis mingi kolme kolmnurga arvude summa on vähemalt 48: 1 p

5. *(Heiki Niglas)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Õige vastus: 1 p
- Täielik lahendus mõnede ebatäpsustega: 5 p
- Täielik lahendus: 7 p

Paljud õpilased olid lihtsalt leidnud õige vastuse ning ei olnud põhjendanud, miks rohkem lahendeid ei ole.

Hindamisskeemid

1. *(Kalle Kaarli)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Korrektne täielik lahendus: 7 p
- Lahendus, mis oleks korrektne, kui oleks öeldud, et teguriteks lahutuses on tegurid algarvud: 5 p

Oluliste eksimuste eest arutlustes või terminite kasutamisel võeti 1 punkt maha.

2. *(Jevgeni Martjušev)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 4 p

  Sealhulgas:
  - Leitud sõltuvus n ja m vahel: *2 p*
  - Korrektne vastus: *1 p*
  - Tõestus, miks rohkem vastuseid ei ole: *1 p*
- b)-osa: 3 p

  Sealhulgas:
  - Leitud, et $a = n^2$: *2 p*
  - Korrektne vastus: *1 p*

a)-osa lahendati enamasti žürii lahendustest erineval viisil ja ülaltoodud skeem vastab just tüüpilistele lahendustele töödes. Lahendus seisnes mõlema jada summade võrdlemises, mille kaudu leiti sõltuvus m ja n vahel (kus m on teise jada esimene element), ning sealt saadi nii õige vastus kui ka põhjendus, miks rohkem lahendeid ei ole.

Kui lahenduses oli õige mõte ilma tõestuseta, siis selle eest anti 1 punkt.

3. *(Härmel Nestra)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Jõutud järeldusele, et piisab näidata, et väikese ringjoone diameeter on suurem kui suure ringjoone raadius: 1 p
- Näidatud, et selleks piisab tingimusest $\angle BAC < 60^\circ$: 2 p
- Tõestatud, et $\angle BAC < 60^\circ$: 4 p

Osalised lahendused võisid edasiviivate teisenduste eest teenida 1 lisapunkti.

Mitmed lahendajad väitsid, et kolmnurk ABC peab olema võrdhaarne ja L peab olema külje BC keskpunkt, O kaare $B'C'$ keskpunkt vms. Sellised väited ei kehti ja sellistele toetumine seega mingit kasu ei too.

4. *(Urve Kangro)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et kaartidest tekib tsükkel: 5 p
- Näidatud, et tsüklis on paarisarv kaarte: 2 p

Kui midagi muud polnud tehtud, siis anti 2 punkti tõestuse eest, et ruudustikus on paarisarv ruute (malelauana värvimise kaudu).

Punkti võis kaotada, kui tsükli tekkimise tõestamisel oli ignoreeritud juhtu, kus 2 kaarti võivad asuda täpselt üksteise peal, või kui polnud näidatud, et kõik kaardid kindlasti asuvad mingis tsüklis.

Paljud õpilased olid eeldanud, et ruudustikku saab ühekordselt katta ja sellest järeldanud, et ruute on paarisarv, selle eest punkte ei saanud. Samuti olid paljud õpilased näidanud, et ruudustikku saab niimoodi kahekordselt katta, et on võimalik pooled kaardid eemaldada, selle eest samuti punkte ei saanud.

5. *(Raul Kangro)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Lahendused, mis tuginesid pindalade arvutamisele: 0 p
- Kolmnurkadega katmise idee, vale konstruktsioon: 1 p
- Kolmnurkadega katmise sobiv idee, katmise võimalikkus täielikult tõestamata: 2 p
- Kolmnurkadega katmise sobiv idee, mõned sammud tõestuse suunas korrektsed: 4 p
- Kolmnurkadega katmise sobiv idee, tõestuse idee olemas, kuid olulised vead sees: 5 p
- Kolmnurkadega katmise sobiv idee, tõestuse idee olemas, mõningad puudused põhjendustes: 6 p
- Korrektne lahendus: 7 p

Väga massiliselt püüti lahendada kolmnurgaga kaetava pindala suurust vaadeldes ning eeldati, et punktide nn ühtlane paiknemine on mingis mõttes halvim juht. Sellised argumendid lubaks ka “tõestada”, et võrdkülgse kolmnurgaga küljepikkusega 10 saaks katta kolmandiku punktidest (ilmselt vale, kui punkte paigutada võrdselt ruudu tippudesse) ning et vaadeldaval juhul saaks katta üle poole punktidest (samuti selgelt vale, nt kui paigutada punktid ühtlaselt ruudu külgedele). Kuna tegemist on korrektse lahenduse seisukohalt täiesti kasutu ideega, siis pindalasid kasutanud lahenduskatsed punkte ei saanud.

Hindamisskeemid

1. *(Aleksandr Šved)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et xy jagub 503-ga: 0 p
- Tõestatud, et x või y jagub 503-ga: 2 p
- Tõestatud, et x ja y mõlemad jaguvad 503-ga: 2 p
- Kahe vastuse leidmine: 1 p
- Tõestatud, et teisi lahendeid ei ole: 2 p

Suuremate vigade korral võeti 1 punkt maha.

2. *(Ahti Peder)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti ($A(x)$ tähistab ülesandes antud aritmeetilist keskmist).

- a)-osa: 4 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:

  - saadud $(A(x))^2 = \dfrac{2+2\sqrt{\cos^2 x}}{4}$: *1 p*
  - saadud $A(x) = \sqrt{\dfrac{1+|\cos x|}{2}}$: *2 p*
  - saadud $A(x) = \sqrt{\dfrac{1 \pm \cos x}{2}}$ koos näitamisega, millistel juhtudel kumb märk kehtib, kuid ei ole osatud poolnurga valemit rakendada: *3 p*
- b)-osa: 3 p

3. *(Juhan Aru)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Täislahendus: 7 p
- Tõestatud, et kõrguste lõikepunkti peegeldused külgedest asuvad ümberringjoonel: 3 p
- Tõestatud, et leidub maksimaalselt üks ülesande tingimusi rahuldav punkt: 3 p
- Näidatud, et $|PA| = |B'A| = |C'A|$ või midagi analoogset: 2 p
- Mõni huvitav tähelepanek: 1 p

4. *(Laur Tooming)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgnevalt.

- Jagatud rivi pärast esimest ümberjärjestust kaheks osaks, pärast teist neljaks osaks jne: 1 p
- Vaadeldud hilisemat ümberjärjestust esialgsest tsükliliste sammude abil saaduna, nagu lahenduses 1: 1 p
- Tähistatud sõdurite järjekorranumbreid kahendarvudega, nagu lahenduses 2: 1 p
- Idee kasutada induktsiooni: 1 p
- Puudulik lahendus, aga on olemas olulised ideed selle edukaks lõpuleviimiseks: 4 p
- Lahendus väiksemate puudustega: 6 p
- Täislahendus: 7 p

5. *(Mart Abel)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 3 p

  Sealhulgas:
  - Pandud kirja, et otsitav funktsioon peab rahuldama tingimust $f'(x) = f(-x)$: *1 p*
  - Leitud sellist tingimust rahuldav funktsioon: *2 p*
- b)-osa: 4 p

  Sealhulgas:
  - Pandud kirja, et otsitav funktsioon peab rahuldama tingimust $f'(x) = f(x-1)$: *1 p*
  - Leitud sellist tingimust rahuldava funktsiooni kuju: *2 p*
  - Näidatud, et funktsiooni defineerimisel kasutatav suurus a ka tegelikult eksisteerib: *1 p*

Tüüpvigadeks olid, et a)-osas otsiti funktsioone, mille korral $f'(x) = -f(x)$ või $f'(x) = -f(-x)$, b)-osas aga funktsioone, mille korral $f'(x) = f(x+1)$. Lisaks püüti mõnes töös hakata "ühiku suurust", mille võrra funktsiooni graafikut nihutati, ise valima.