Lõppvoor 2011

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

12. märts 2011 | Lõppvoor | **9. klass**

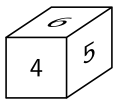
Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik positiivsed täisarvud n, mille korral n ja $n + 2011$ on mõlemad mingite täisarvude ruudud.

2. Juku leidis, et tema koolikotis olevatest asjadest pole 60 protsendil nägu ja 76 protsendil tegu. Ta viskas minema kõik asjad, millel pole nägu ega tegu, ning lisas juurde asju, millel on nii nägu kui ka tegu. Nüüd Juku koolikotis olevatest asjadest pole 25 protsendil nägu ja 45 protsendil tegu. Mitu protsenti moodustasid asjad, millel oli nii nägu kui ka tegu, Juku koolikoti sisust esialgu?

3. Kolm maiasmokka jaotasid omavahel torti, mille kujuks oli korrapärane kaheksanurk $ABCDEFGH$. Esimene maiasmokk sai endale kolmnurgad ABC, CDE, EFG ja GHA. Teine maiasmokk sai kolmnurga ACE. Kolmas maiasmokk sai kolmnurga EGA need osad, mis jäävad väljapoole nelinurka $BDFH$. Tõesta, et üks maiasmokk sai täpselt samapalju torti kui teised kaks kokku.

4. Antud on 8 ühesugust täringut, mille kolmel tahul paiknevad arvud 4, 5 ja 6 nii, nagu kujutatud kõrvaloleval joonisel, ning ülejäänud kolmel tahul arvud 1, 2 ja 3 nii, et iga vastastahkude paari arvude summa on 7.



a) Näita, et neist täringutest saab kokku panna $2 \times 2 \times 2$ kuubi nii, et mis tahes kahe naabertäringu omavahel kokkupuutuvatel tahkudel on üks ja sama arv.

b) Kas on võimalik seda teha nii, et saadava kuubi välispinnal on ainult arvud 4, 5 ja 6?

5. Kõige väiksema nimiväärtusega käibelolev euromünt on 1-sendine ja kõigi teiste käibelolevate müntide ning rahatähtede nimiväärtused on selle täisarvkordsed. Kõige väiksema nimiväärtusega käibelolnud kroonimünt oli 5-sendine ja kõigi teiste käibelolnud müntide ning rahatähtede nimiväärtused olid selle täisarvkordsed. Üks euro on 15,6466 krooni. Leia vähim positiivne rahasumma, mida on võimalik täpselt maksta mõlemas valuutas.

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Tõesta, et mis tahes positiivsete reaalarvude a, b, c korral kehtib võrratus

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant a+b+c.$$

2. Leia kõik positiivsete täisarvude nelikud (w, x, y, z), mille korral kehtib võrdus $w^x + w^y = w^z$.

3. Kumera nelinurga $ABCD$ iga külg on ühe ringjoone diameeter. Kõik neli ringjoont läbivad ühte, nelinurga tippudest erinevat punkti O ning rohkem ühiseid punkte, peale nimetatute, ühelgi kahel ringjoonel pole. Tõesta, et nelinurk $ABCD$ on romb.

4. Ühikkuubi igale tahule kirjutatakse üks arvudest -1, 0 ja 1 nii, et mis tahes kahel ühise servaga tahul on erinevad arvud. Kas sellistest ühikkuupidest on võimalik kokku panna

a) kuup mõõtmetega $2 \times 2 \times 2$;

b) kuup mõõtmetega $3 \times 3 \times 3$

nii, et selle tahkudel moodustuvates ruudustikes on mis tahes kahes ühise küljega ruudus erinevad arvud ning igal tahul olevate arvude kogusumma on 0?

5. Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurga ABC suurus on täisarv kraade. On teada, et teatava positiivse täisarvu n korral saab hüpotenuusil AB valida punktid $K_0 = A$, K_2, ..., K_{2n} ning kaatetil CB punktid $K_1 = C$, K_3, ..., $K_{2n+1} = B$ nii, et iga kolmnurk $K_{i-1}K_iK_{i+1}$, kus $i = 1, \ldots, 2n$, on võrdhaarne alusega $K_{i-1}K_{i+1}$. Leia teravnurga ABC kõik võimalikud suurused.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

12. märts 2011 | Lõppvoor | **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia kõik täisarvud, mis ei esitu ühegi täisarvuliste liikmetega mittekonstantse aritmeetilise jada vähemalt kolme järjestikuse liikme summana.

2. Leia võrrandi $x^3 - y^3 = 3xy + 1$ kõik täisarvulised lahendid.

3. Kolmnurga ABC tipust C tõmmatud mediaani aluspunkt on M. Tõesta, et kolmnurga ACM ümberringjoone raadiuse ja tipust M tõmmatud kõrguse korrutis võrdub kolmnurga BCM ümberringjoone raadiuse ja tipust M tõmmatud kõrguse korrutisega.

4. Anumas on 10 kilogrammi teatava soola 10%-list lahust. Sooritatakse järgmised operatsioonid.

(1) Kallatakse välja x kilogrammi soolalahust.

(2) Kallatakse sisse x kilogrammi soola.

(3) Kallatakse välja x kilogrammi saadud soolalahust.

(4) Kallatakse sisse x kilogrammi vett.

Leia arvu x kõik võimalikud väärtused, mille korral pärast neid operatsioone on anumas 27,5%-line soolalahus.

5. Naturaalarvude linna elanikud on naturaalarvud. Iga elanik võib olla või mitte olla sõber iga teise (st temast erineva) selle linna elanikuga. Nimetame linna *heanaaberlikuks*, kui kahel selle linna naturaalarvul leidub ühine sõber parajasti siis, kui üks naturaalarv jagub teisega. Kas linn, mille elanikud on parajasti 1, 2, …, 2011, saab olla heanaaberlik?

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

12. märts 2011 Lõppvoor **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Leia arvu

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 2011^{2011}$$

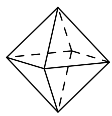
viimane number.

2. Kas leidub selline positiivne reaalarv C, et kõigi positiivsete reaalarvude x_1, x_2, x_3, x_4 korral kehtib võrratus

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \leqslant C(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)?$$

3. Ristküliku $ABCD$ külgede pikkused on $|AB| = a$ ja $|BC| = b$, kus $a \geqslant b$. Olgu E külje AB selline sisepunkt, et on täpselt üks võimalus valida punktid F, G ja H vastavalt külgedel BC, CD ja DA nii, et nelinurk $EFGH$ on samuti ristkülik. Leia ristkülikute $EFGH$ ja $ABCD$ pindalade suhe.

4. Antsul on kolm pliiatsit, kõik eri värvi. Mitmel viisil saab ta värvida korrapärase kaheksatahuka (oktaeedri) tahud nii, et ühise servaga tahud oleksid alati erinevat värvi? Värvimised, mis on saadavad üksteisest oktaeedri pööramise teel, loeme samadeks.



5. Korrapärase $2n$-nurga sees valitakse vabalt üks punkt ja ühendatakse see kõigi $2n$-nurga tippudega. Saadud kolmnurgad värvitakse vaheldumisi mustaks ja valgeks nii, et ühise küljega kolmnurgad on erinevat värvi. Tõesta, et valgete kolmnurkade pindalade summa on võrdne mustade kolmnurkade pindalade summaga.

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

12 марта 2011 г. Заключительный тур **9 класс**

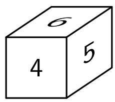
Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все положительные целые числа n, при которых оба числа n и $n + 2011$ являются квадратами некоторых целых чисел.

2. Юра обнаружил, что среди всех вещей в его школьном ранце 60 процентов вещей являются некрасивыми, а 76 процентов — бесполезными. Он выбросил оттуда все вещи, которые были одновременно и некрасивыми, и бесполезными, а вместо них положил туда вещи, которые были одновременно и красивыми, и полезными. Теперь среди всех вещей в ранце Юры только 25 процентов вещей оказались некрасивыми и 45 процентов — бесполезными. Сколько процентов составляли вещи, которые были одновременно и красивыми, и полезными, от содержимого ранца Юры изначально?

3. Трое сладкоежек поделили между собой торт в виде правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$. Первый сладкоежка взял себе треугольники ABC, CDE, EFG и GHA. Второй сладкоежка взял себе треугольник ACE. Третий сладкоежка взял себе те части треугольника EGA, которые лежат вне четырёхугольника $BDFH$. Доказать, что один из сладкоежек взял себе ровно столько же торта, сколько другие двое вместе.

4. Имеются 8 одинаковых кубиков, на трёх гранях каждого из которых записаны числа 4, 5 и 6 так, как изображено на рисунке, а на остальных гранях записаны числа 1, 2 и 3 так, чтобы сумма чисел, записанных на каждой паре противолежащих граней, была равна 7.



а) Показать, что из этих кубиков можно составить куб размером $2 \times 2 \times 2$ так, чтобы на соприкасающихся гранях любых двух соседних кубиков было записано одно и то же число.

б) Возможно ли это сделать так, чтобы на внешней поверхности такого куба были записаны только числа 4, 5 и 6?

5. Из используемых при наличном расчёте евромонет наименьшим достоинством обладает 1-центовая монета, и её достоинство в целое число раз меньше достоинства всех других используемых евромонет и еврокупюр. Из кроновых монет, которые использовались при наличном расчёте, наименьшим достоинством обладала 5-сентовая монета, и её достоинство было в целое число раз меньше достоинства всех других кроновых монет и купюр. Один евро равен 15,6466 кронам. Найти наименьшую положительную денежную сумму, которую можно точно оплатить в обеих валютах.

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

12 марта 2011 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Доказать, что при любых положительных действительных числах a, b, c выполняется неравенство

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \geqslant a+b+c.$$

2. Найти все четвёрки положительных целых чисел (w, x, y, z), при которых выполняется равенство $w^x + w^y = w^z$.

3. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника $ABCD$ является диаметром одной окружности. Все четыре окружности проходят через одну, отличную от вершин четырёхугольника точку O, и ни одна пара окружностей не имеет других общих точек, кроме названных. Доказать, что четырёхугольник $ABCD$ является ромбом.

4. На каждой грани единичного кубика записывают одно из чисел -1, 0 и 1 так, чтобы на любых двух гранях, имеющих общее ребро, были записаны различные числа. Возможно ли из таких единичных кубиков составить

а) куб размером $2 \times 2 \times 2$;

б) куб размером $3 \times 3 \times 3$

так, чтобы на клетчатых полях, образованных на его гранях, в любых двух имеющих общую сторону клетках были записаны различные числа, а сумма всех чисел на каждой грани куба была равна 0?

5. Величина острого угла ABC в прямоугольном треугольнике ABC равна целому числу градусов. Известно, что при некором положительном целом числе n можно на гипотенузе AB выбрать точки $K_0 = A, K_2, \ldots, K_{2n}$, а на катете CB точки $K_1 = C, K_3, \ldots, K_{2n+1} = B$ так, чтобы каждый треугольник $K_{i-1}K_iK_{i+1}$, где $i = 1, \ldots, 2n$, был равнобедренным с основанием $K_{i-1}K_{i+1}$. Найти все возможные величины острого угла ABC.

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

12 марта 2011 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти все целые числа, которые невозможно представить в виде суммы по меньшей мере трёх последовательных членов неконстантной арифметической прогрессии, все члены которой являются целыми числами.

2. Найти все целочисленные решения уравнения $x^3 - y^3 = 3xy + 1$.

3. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Доказать, что произведение радиуса описанной около треугольника ACM окружности и высоты, проведённой из точки M в треугольнике ACM, равняется произведению радиуса описанной около треугольника BCM окружности и высоты, проведённой из точки M в треугольнике BCM.

4. В сосуде находится 10 килограммов 10%-ного раствора некоторый соли. Производят следующие операции.

(1) Выливают x килограммов соляного раствора.

(2) Всыпают x килограммов соли.

(3) Выливают x килограммов полученного соляного раствора.

(4) Вливают x килограммов воды.

Найти все возможные значения числа x, при которых после перечисленных операций в сосуде окажется 27,5%-ный соляной раствор.

5. Жителями города натуральных чисел являются натуральные числа. Каждый житель может быть другом или недругом для каждого другого жителя этого города. Назовём город *дружелюбным*, если у двух натуральных чисел этого города найдётся общий друг тогда и только тогда, когда одно натуральное число делится на другое. Может ли город, жителями которого являются только числа 1, 2, …, 2011, быть дружелюбным?

LVIII Олимпиада Эстонии по математике

12 марта 2011 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Найти последнюю цифру числа

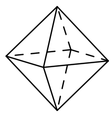
$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + 2011^{2011}.$$

2. Найдётся ли такое положительное действительное число C, чтобы для всех положительных действительных чисел x_1, x_2, x_3, x_4 выполнялось неравенство

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \leqslant C(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)?$$

3. Длины сторон прямоугольника $ABCD$ равны $|AB| = a$ и $|BC| = b$, где $a \geqslant b$. Пусть E — такая точка на отрезке AB, что существует ровно одна возможность выбрать точки F, G и H соответственно на сторонах BC, CD и DA так, чтобы четырёхугольник $EFGH$ также являлся прямоугольником. Найти отношение площадей прямоугольников $EFGH$ и $ABCD$.

4. У Саши есть три карандаша, все разных цветов. Сколькими различными способами он может раскрасить грани правильного восьмигранника (октаэдра) так, чтобы грани с общим ребром были всегда раскрашены различными цветами? Раскраски, которые получены друг из друга путём поворота октаэдра, считаем одинаковыми.



5. Внутри правильного $2n$-угольника выбирают произвольно одну точку и соединяют её со всеми вершинами $2n$-угольника. Полученные треугольники поочерёдно раскрашивают чёрным и белым цветом так, чтобы имеющие общую сторону треугольники были раскрашены различными цветами. Доказать, что сумма площадей белых треугольников равна сумме площадей чёрных треугольников.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

12. märts 2011 Lõppvoor **9. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* ainuke selline arv on 1010025.

Olgu $n = a^2$ ja $n + 2011 = b^2$, kus a ja b on positiivsed täisarvud. Siis

$$2011 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

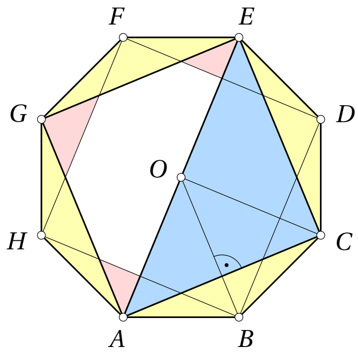
Et 2011 on algarv, siis ainsa võimalusena $b - a = 1$ ja $b + a = 2011$. Liites need võrdused, saame $2b = 2012$, kust $b = 1006$ ning $a = b - 1 = 1005$. Seega $n = a^2 = 1010025$.

2. *Vastus:* 4 protsenti.

Lahendus 1. Vaatleme asju, millel on nägu ja pole tegu, ning asju, millel on tegu ja pole nägu. Nende asjade hulk jäi pärast ümberpaigutamisi samaks. Nende asjade osakaalude vahe oli enne muudatusi $76\% - 60\% = 16\%$, pärast aga $45\% - 25\% = 20\%$. Järelikult vähenes asjade koguarv koolikotis $20 : 16 = 1{,}25$ korda. Asju, millel on nägu ja pole tegu, oli pärast muudatusi kõigist asjadest 45%, esialgu aga $45\% : 1{,}25 = 36\%$. Et esialgu oli asju, millel oli nägu, üldse $100\% - 60\% = 40\%$, siis asju, millel oli nii nägu kui ka tegu, oli $40\% - 36\% = 4\%$.

Lahendus 2. Vaatleme asju, millel on tegu ja pole nägu, ning asju, millel on nägu ja pole tegu. Nende asjade hulk jäi pärast muutusi koolikotis samaks, mistõttu nende asjade arvude suhe oli enne ja pärast muudatust sama. Arvestades, et pärast muudatust puuduvad asjad, millel pole nägu ega tegu, on vaadeldavate asjade arvude omavaheline suhe $\frac{25}{45}$ ehk $\frac{5}{9}$. Olgu asju, millel on tegu ja pole nägu, $5x$ ning asju, millel on nägu ja pole tegu, $9x$. Olgu y äravisatud asjade arv. Siis algselt oli koolikotis $5x + y$ asja, millel pole nägu, ning $9x + y$ asja, millel pole tegu. Vastavalt ülesande andmetele $\frac{5x + y}{9x + y} = \frac{60}{76} = \frac{15}{19}$, kust lihtsustades saame $y = 10x$. Siis asju, millel pole nägu, oli algselt $15x$. Et see moodustas kõigist asjadest 60%, oli kotis kokku $25x$ asja. Asju, millel oli nii nägu kui ka tegu, oli seega $25x - 5x - 9x - 10x$ ehk x, mis moodustas kõigist asjadest $\frac{x}{25x}$ ehk 4%.

3. Olgu O kaheksanurga $ABCDEFGH$ ümberringjoone keskpunkt ja ümberringjoone raadius 1 (joonis 1). Siis $|AC| = \sqrt{2}$, sest AC on võrdhaarse täisnurkse kolmnurga OAC hüpotenuus. Kolmnurga ABC tipust B tõmmatud



Joonis 1

kõrgus on ümberringjoone raadiusest BO lühem ruudu $ACEG$ poole küljepikkuse $\frac{\sqrt{2}}{2}$ võrra, seega see kõrgus on $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Kolmnurga ABC pindala on järelikult $\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Esimese maiasmoka osa koosneb neljast sellisest kolmnurgast kogupindalaga $2\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Teise maiasmoka osa, kolmnurga ACE pindala on $\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=1$.

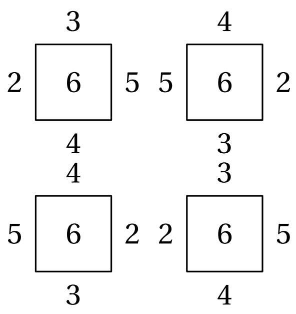
Kolmanda maiasmoka puhul vaatleme kõigepealt kolmnurka tipu G juures. See kolmnurk on sarnane kolmnurgaga AGE, kuid tema kõrgus on sama mis kolmnurgal ABC ehk $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Seega selle kolmnurga pindala on $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$. Kolmanda maiasmoka ülejäänud kaks kolmnurka annavad kokku sama suure pindala, seega kolmanda maiasmoka osa on pindalaga $2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

Et

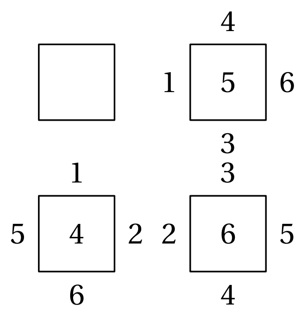
$$2\sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{2}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$
$$=2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=1,$$

siis sai teine maiasmokk sama palju torti kui esimene ja kolmas kokku.

Märkus. Ruudu diagonaali pikkuse d, kui ruudu küljepikkus on 1, saab lihtsasti tuletada ilma Pythagorase teoreemi kasutamata: ühelt poolt on sel-



Joonis 2



Joonis 3

le ruudu pindala rombi pindala valemi põhjal $\dfrac{d^2}{2}$, teiselt poolt aga 1, siit $d^2 = 2$, millest $d = \sqrt{2}$.

4. *Vastus:* b) ei.

a) Paneme neli täringut kokku nii, nagu kujutatud joonisel 2, need täringud moodustavad kuubi alumise kihi. Selle peale paigutame teise samasuguse kihi ümberpööratult. Jooniselt näeme, et sama kihi kokkupuutuvate täringute tahkudel on üks ja sama arv, teise kihi ümberpööramise tõttu on ka erinevate kihtide kokkupuutuvate täringute tahkudel üks ja sama arv.

b) Oletame, et täringutest saab koostada kuubi mõõtmetega $2 \times 2 \times 2$ nii, et kuubi välispinnal on ainult arvud 4, 5 ja 6. Et igal kuubil on nähtaval täpselt 3 tahku, peavad nendel esinema kõik kolm arvu. Orienteerime kuubi nii, et ülemise kihi kagunurgas oleks 6 (joonis 3). Arvestades, et iga kahe naabertäringu kokkupuutuvatel tahkudel on sama arv ning kuubi välispinnal on ainult arvud 4, 5 ja 6, saame ainukese võimalusena, et ülemise kihi edelanurgas on 4 ja kirdenurgas 5. Nüüd aga ei ole enam võimalik nõutaval viisil paigutada täringut ülemise kihi loodenurka, sest ta peaks ülemises kihis oma kumbagi naabrit puutuma tahuga 1. Saadud vastuolu näitab, et täringutest ei ole võimalik kokku panna selliste omadustega kuupi.

5. *Vastus:* 250 eurot (ehk 3911 krooni ja 65 senti).

Ülesande vastus eurosentides on vähim positiivne täisarv x, mille korral vastav kroonisentide arv $15{,}6466x$ on 5-ga jaguv täisarv ehk mille korral 5-kroonisendiliste arv $\dfrac{15{,}6466}{5}x$ on täisarv. Arv

$$\frac{15{,}6466}{5}x = \frac{156466}{50000}x = \frac{78233}{25000}x$$

saab olla täisarv ainult juhul, kui x jagub 25000-ga, sest 78233 ja 25000 on ühistegurita (arvu 25000 ainsad algtegurid on 2 ja 5, millega 78233 ei jagu). Seega $x = 25000$, kust saame otsitavaks rahasummaks 250 eurot.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $a \geqslant b \geqslant c$. Siis

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}=$$
$$=\frac{a^2+(b+c)c-c^2}{b+c}+\frac{b^2+(c+a)a-a^2}{c+a}+\frac{c^2+(a+b)b-b^2}{a+b}=$$
$$=\frac{a^2-c^2}{b+c}+c+\frac{b^2-a^2}{c+a}+a+\frac{c^2-b^2}{a+b}+b \geqslant a+b+c,$$

sest

$$\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2+b^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b}=$$
$$=(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}\right)+(b^2-c^2)\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+b}\right)=$$
$$=\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{(b+c)(c+a)}+\frac{(b^2-c^2)(a-c)}{(b+c)(a+b)} \geqslant 0.$$

Lahendus 2. Viime liikmed ühele poole ja teisendame:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b+\frac{c^2+ab}{a+b}-c=$$
$$=\frac{a^2+bc-ab-ac}{b+c}+\frac{b^2+ca-bc-ba}{c+a}+\frac{c^2+ab-ca-cb}{a+b}=$$
$$=\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{(b-c)(b-a)}{c+a}+\frac{(c-a)(c-b)}{a+b}=$$
$$=\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-c^2)(b^2-a^2)+(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=$$
$$=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2}{(b+c)(c+a)(a+b)}=$$
$$=\frac{(a^2-b^2)^2+(c^2-a^2)^2+(b^2-c^2)^2}{2(b+c)(c+a)(a+b)} \geqslant 0.$$

2. *Vastus:* $(w, x, y, z) = (2, n, n, n+1)$, kus n on suvaline positiivne täisarv.

Lahendus 1. Vaatleme erinevaid juhte sõltuvalt arvust w.

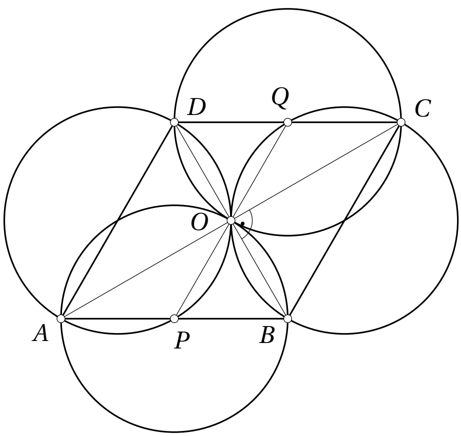
- Kui $w = 1$, siis lahendeid pole, sest sel juhul on võrduse vasaku poole väärtus 2 ning parema poole väärtus 1.
- Kui $w \geqslant 2$, siis $x < z$, $y < z$ ehk $x \leqslant z-1$ ja $y \leqslant z-1$. Seega $w^x + w^y \leqslant w^{z-1} + w^{z-1} = 2 \cdot w^{z-1} \leqslant w \cdot w^{z-1} = w^z$. Võrrandi rahuldamiseks peab mõlemas võrratuses kehtima võrdus, seega $x = y = z - 1$ ja $w = 2$. Siit saame lahendid $(w, x, y, z) = (2, n, n, n+1)$ suvalise positiivse täisarvu n korral.

Lahendus 2. Juhul $w = 1$ lahendeid ei ole, sest $1+1 = 2$ ei esitu 1 astmena. Eeldame järgnevas, et $w > 1$. Üldisust kitsendamata eeldame, et $x \leqslant y < z$. Siis teiseneb võrrand kujule $w^x(1 + w^{y-x}) = w^z$, kust

$$1 + w^{y-x} = w^{z-x}.$$

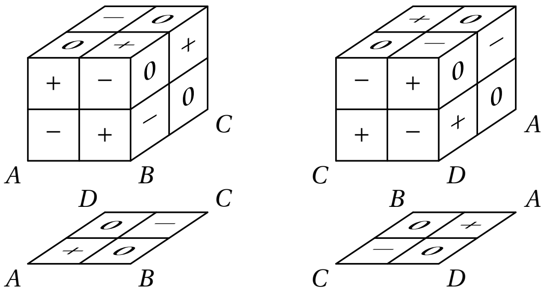
Järelikult on $1 + w^{y-x}$ arvu w positiivne aste ja jagub w-ga. Kui $y - x$ oleks positiivne, siis ka w^{y-x} jaguks w-ga, mistõttu 1 jaguks w-ga ehk oleks $w = 1$. Jääb üle $y - x = 0$, mis annab $2 = w^{z-x}$. Siit ainukese võimalusena $w = 2$ ning $z - x = 1$. Võrrandi lahendiks saame seega $(w, x, y, z) = (2, n, n, n+1)$, kus n on suvaline naturaalarv. Kontrollides näeme, et kõik sellised nelikud ka rahuldavad võrrandit.

3. Olgu O ringjoonte ainus lõikepunkt peale nelinurga tippude (joonis 4). Et AB, BC, CD ja DA on ringjoonte diameetrid, siis AOB, BOC, COD ja DOA on kõik täisnurgad. Järelikult AOC ja BOD on sirgnurgad ehk O on nelinurga diagonaalide lõikepunkt.

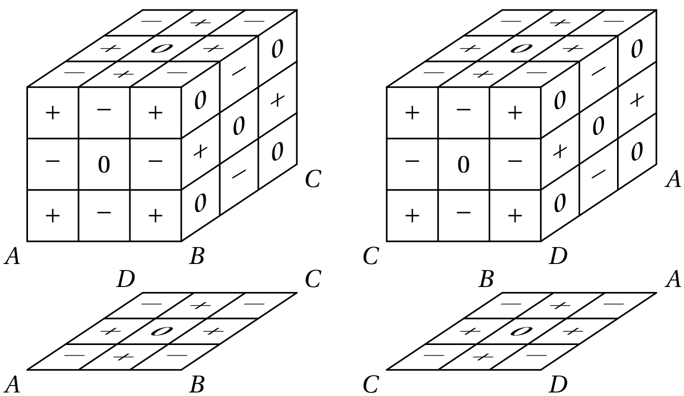


Joonis 4

Vastaskülgedele AB ja CD ehitatud ringjoontel ei saa olla teisi ühiseid punkte peale O, sest kui lisaks punktile O lõikuksid need ringjooned ka nelinurga tipus, siis sisaldaks üks ringjoon kolme ühel sirgel asuvat punkti (kaks nelinurga tippu ja punkt O), mis on võimatu. Järelikult peavad vastaskülgedele AB ja CD ehitatud ringjooned punktis O puutuma. Olgu nende ringjoonte keskpunktid vastavalt P ja Q; siis O asub lõigul PQ. Et $|AP| = |PO|$ ja $|CQ| = |QO|$, siis võrdhaarsetest kolmnurkadest $\angle BAC = \angle PAO = \angle POA = \angle QOC = \angle QCO = \angle DCA$. Seega AB ja CD on paralleelsed. Analoogselt on paralleelsed ka teine paar vastasküljgi. Järelikult on tegu rööpkülikuga, kuid rööpküliku diagonaalid ristuvad ainult siis, kui see rööpkülik on romb.



Joonis 5



Joonis 6

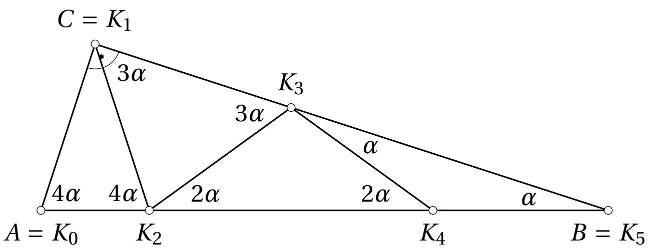
4. *Vastus:* a) jah; b) jah.

Kõigepealt paneme tähele, et arvude paigutus ühikkuubi tahkudel on kuubi pööramise täpsusega üheselt määratud. Tõepoolest, kui mingil ühikkuubi tahul on arv x, siis selle tahu naabertahkudel on vaheldumisi erinevad arvud y ja z ning vastastahul jällegi arv x. See tähendab, et igaüks arvudest -1, 0 ja 1 esineb ühel paaril vastastahkudel. Sobivad konstruktsioonid on näidatud joonistel 5 ja 6, kus $-$ ja $+$ tähistavad vastavalt arve -1 ja 1.

Märkus. Esitatud konstruktsioone saab kergesti üldistada suvalise (vastavalt paaris või paaritu) küljepikkuse n juhule.

5. *Vastus:* $2°$, $6°$, $10°$, $18°$ ja $30°$.

Tähistame lühiduse mõttes $\angle ABC = \alpha$ (joonis 7). Siis viimase võrdhaarse kolmnurga $K_{2n-1}K_{2n}K_{2n+1}$ alusnurk on α. Eelviimase võrdhaarse kolmnurga $K_{2n-2}K_{2n-1}K_{2n}$ alusnurk on $180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$. Sellele eelneva kolmnurga $K_{2n-3}K_{2n-2}K_{2n-1}$ alusnurk on $180° - (180° - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$. Üldiselt, kolmnurga $K_{2n-i}K_{2n-i+1}K_{2n-i+2}$ alusnurk on $180° - (180° - 2\cdot(i-1)\alpha) - (i-2)\alpha = i\alpha$ $(i = 3, \ldots, 2n)$. Seega kolmnurga $ACK_2 = K_0K_1K_2$ alusnurk on $2n\alpha$. Kolmnurgas ABC saame nüüd $90° = \angle BAC + \angle ABC = 2n\alpha + \alpha$, kust $\alpha = \dfrac{90°}{2n+1}$. Et vastavalt ülesande tingimustele on nurga α suurus täisarv kraade, peab $2n+1$ olema arvu 90 paarituarvuline tegur, mis on suurem kui 1 (sest kolmnurgas ei saa olla kahte $90°$ nurka). Sellised tegurid on 3, 5, 9, 15 ja 45, mis annavad nurga α võimalikeks suurusteks vastavalt $30°$, $18°$, $10°$, $6°$ ja $2°$.



Joonis 7

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

12. märts 2011 Lõppvoor **11. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* 1 ja -1.

Lahendus 1. Tõestame kõigepealt, et arvud 1 ja -1 ei esitu ühegi täisarvuliste liikmetega mittekonstantse aritmeetilise jada vähemalt kolme järjestikuse liikme summana. Olgu $a_1, a_2, \ldots, a_k$ aritmeetilise jada k järjestikust liiget, kus $k \geqslant 3$. Nende liikmete summa on $s = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k$. Kui k on paaritu, siis s jagub k-ga. Kui k on paaris, siis s jagub arvuga $\frac{k}{2} > 1$. Kummalgi juhul ei saa s olla 1 ega -1.

Tõestame nüüd, et iga muu täisarv s esitub mingi täisarvuliste liikmetega mittekonstantse aritmeetilise jada vähemalt kolme järjestikuse liikme summana. Kui $s = 0$, siis avaldub s liikmete -1, 0, 1 summana. Kui s on nullist erinev paarisarv, st avaldub kujul $s = 2t$, kus $t \neq 0$, siis arvud $-t$, 0, t, $2t$ on aritmeetilise jada liikmed vahega t ning nende summa on $2t = s$. Kui s on paaritu arv, st avaldub kujul $s = 2t + 1$, siis arvud $-t + 1, \ldots, 0, 1, \ldots, t - 1, t, t + 1$ on aritmeetilise jada liikmed vahega 1 ning nende summa on $t + (t + 1) = 2t + 1 = s$, sest liikmed $-t + 1$ kuni $t - 1$ koonduvad kahekaupa välja.

Lahendus 2. Olgu a_1 esimene aritmeetilise jada järjestikustest liikmetest ning d jada vahe. Siis n järjestikuse liikme summa on $s = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Seega peab kehtima võrdus $2s = (2a_1 + d(n-1))n$. Kui $s = 1$ või $s = -1$, siis võrdus kehtida ei saa, sest $n \geqslant 3$ ei ole arvu 2 ega -2 teguriks. Kui $s = 0$, siis valime jada järjestikusteks liikmeteks -1, 0, 1. Kui aga s on nendest arvudest erinev, siis olgu $n = 2|s|$, d suvaline paaritu arv ning $a_1 = \frac{1 - (n-1)d}{2}$, kui $s > 0$, või $a_1 = \frac{-1 - (n-1)d}{2}$, kui $s < 0$.

2. *Vastus:* $(x, y) = (n + 1, n)$, kus n on suvaline täisarv, või $(x, y) = (-1, 1)$.

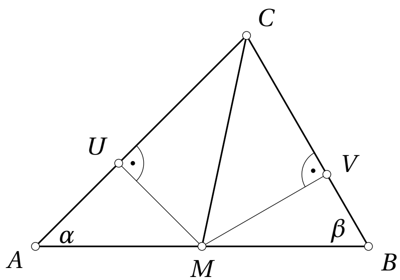
- Eeldame, et $x > y$. Siis $3xy + 1 = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \geqslant$ $\geqslant (x - y) \cdot 3xy$. Et $x > y$, siis $3xy = x^3 - y^3 - 1 \geqslant 1 - 1 = 0$. Kui $3xy > 0$, siis $3xy \geqslant 3$, mistõttu eelnevalt saadud võrratusest $3xy + 1 \geqslant (x - y) \cdot 3xy$ järeldub $x - y = 1$. Kui $3xy = 0$, siis $x = 0$ või $y = 0$ ja mõlemal juhul saame ainsa võimalusena samuti $x - y = 1$. Vahetu kontroll näitab, et kõik paarid $(x, y) = (n + 1, n)$, kus n on suvaline täisarv, rahuldavad esialgset võrrandit.

- Eeldame, et $x = y$. Siis võrrandil lahendeid pole, sest vasak pool on 0, parem pool aga teatav positiivne arv.
- Eeldame, et $x < y$. Siis võrrandi vasak pool on negatiivne, mis tähendab, et xy on negatiivne. Järelikult $x < 0$ ja $y > 0$. Tähistades $-x = z$ ning korrutades võrrandit (-1)-ga, saame võrrandi $z^3 + y^3 = 3zy - 1$. Siis $3zy - 1 = z^3 + y^3 = (z + y)(z^2 - zy + y^2) \geqslant (z + y)zy$. Järelikult $z + y < 3$. Seega ainuke võimalus on $z = y = 1$ ehk $x = -1$, $y = 1$, mis ka rahuldab võrrandit.

3. *Lahendus 1.* Tähistame $\angle CAB = \alpha$ ja $\angle CBA = \beta$ (joonis 8). Olgu r ja s vastavalt kolmnurkade ACM ja BCM ümberringjoonte raadiused. Siinusteoreemist kolmnurgas ACM saame $\frac{|CM|}{\sin\alpha} = 2r$ ehk $r = \frac{|CM|}{2\sin\alpha}$. Analoogiliselt $s = \frac{|CM|}{2\sin\beta}$. Olgu U ja V vastavalt kolmnurkade ACM ja BCM tipust M tõmmatud kõrguste aluspunktid. Siis $|MU| = |AM|\sin\alpha = \frac{|AB|}{2}\sin\alpha$. Analoogselt $|MV| = \frac{|AB|}{2}\sin\beta$. Järelikult $r\cdot|MU| = \frac{|CM|\cdot|AB|}{4} = s\cdot|MV|$.

Lahendus 2. Olgu x ja y vastavalt kolmnurkade ACM ja BCM tipust M tõmmatud kõrgused ning r ja s kolmnurkade ümberringjoonte raadiused. Kolmnurkade ACM ja BCM pindalad on võrdsed, sest $|AM| = |BM|$ ning tipust C tõmmatud kõrgus on ühine. Seetõttu $|AC|\cdot x = |BC|\cdot y$. Tähistame $\angle AMC = \gamma$. Siinusteoreemist $|AC| = 2r\sin\gamma$ ja $|BC| = 2s\sin(180^\circ - \gamma) = 2s\sin\gamma$. Seega $2r\sin\gamma\cdot x = 2s\sin\gamma\cdot y$. Et $\gamma \neq 0$, siis järeldub siit $rx = sy$.

Lahendus 3. Kasutame kolmnurga pindala valemeid $S = \frac{abc}{4R}$ ja $S = \frac{ah}{2}$, kus a, b, c on kolmnurga külgede pikkused, R ümberringjoone raadius ja h kõrgus. Nendest saame $\frac{abc}{4R} = \frac{ah}{2}$ ehk $Rh = \frac{bc}{2}$. Kolmnurga ACM ümberringjoone raadiuse ja tipust M tõmmatud kõrguse korrutis on seetõttu



Joonis 8

$\frac{|AM|\cdot|CM|}{2}$, analoogiline korrutis kolmnurgas BCM on aga $\frac{|BM|\cdot|CM|}{2}$. Need kaks korrutist on võrdsed, sest $|AM| = |BM|$.

4. *Vastus:* 5 ja $\frac{35}{9}$.

Alguses on anumas 10 kilogrammi lahust, milles on ühtekokku 1 kilogramm soola. Pärast esimest sammu jääb anumasse $\frac{10-x}{10}$ kilogrammi soola. Pärast teist sammu on anumas $\frac{10-x}{10} + x = \frac{9x+10}{10}$ kilogrammi soola ja taas 10 kilogrammi lahust. Pärast kolmandat sammu on anumas $\frac{9x+10}{10} \cdot \frac{10-x}{10} = \frac{-9x^2+80x+100}{100}$ kilogrammi soola. Pärast neljandat sammu on anumas ikka samapalju soola ja 10 kilogrammi lahust. Et lahuse lõppkontsentratsioon on 27,5%, peab kehtima võrdus

$$\frac{-9x^2+80x+100}{10\cdot 100} = 0{,}275$$

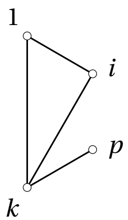
ehk $-9x^2 + 80x + 100 = 275$ ehk $-9x^2 + 80x - 175 = 0$. Selle ruutvõrrandi lahendid on $x_1 = 5$ ja $x_2 = \frac{35}{9}$. Mõlemad sobivad, sest on väiksemad kui 10.

5. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Olgu p heanaaberliku linna algarvuline elanik (joonis 9). Et p jagub 1-ga ja $p \neq 1$, siis leidub arvudel 1 ja p ühine sõber k. Et k jagub 1-ga ja $k \neq 1$, siis leidub arvudel 1 ja k ühine sõber i.

Kui $i \neq p$, siis k on i ja p ühine sõber, mis tähendab, et i jagub p-ga, sest p algarvulisus teistpidi jaguvust ei võimalda. Kui $i = p$, siis 1 on k ja p ühine sõber, mis analoogiliselt näitab, et k jagub p-ga. Mõlemal juhul niisiis leidub linnas mingi p kordne, mis on arvust p suurem.

Naturaalarvude linnas elanikega $1, \ldots, 2011$ aga ei leidu algarvul 2011 temast suuremat kordset. Seega see linn ei saa olla heanaaberlik.



Joonis 9

Lahendus 2. Oletame, et see linn on heanaaberlik. Valime mingid 12 algarvu, mis pole suuremad kui 2011 (näiteks 12 esimest algarvu). Igaühel neist algarvudest leidub arvuga 1 ühine sõber, olgu need sõbrad $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$. Saadud arvud on kõik erinevad, sest vastasel korral oleks mingi neist kahe algarvu ühine sõber. Üldisust kitsendamata eeldame, et $a_1 < a_2 < \ldots < a_{12}$. Et 1 on kõigi nende arvude ühine sõber, peab igast kahest järjestikusest arvust teine jaguma esimesega. Siit saame, et $a_{12} \geqslant 2^{12} = 2048$, vastuolu.

Märkus. Arvu 2011 algarvulisuse teadmine lahenduses 1 pole oluline, kui kasutame Tšebõševi teoreemi. Selle kohaselt asub arvude n ja $2n$ vahel alati mõni algarv. Seega saame valida p nii, et $1005 < p < 2010$ – siis p on vaadeldava linna elanik, kuid suvalise suurema kordse puhul $kp \geqslant 2p \geqslant 2012$, mistõttu need ei ole selle linna elanikud.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

12. märts 2011 Lõppvoor **12. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* 8.

Lahendus 1. Summa koosneb liidetavatest kujul $(10k+l)^{10k+l}$. See liidetav lõpeb sama numbriga nagu arv l^{10k+l}.

- Et numbriga 1, 5, 6 või 0 lõppeva arvu iga aste lõpeb sellesama numbriga, siis lõpevad $(10k+1)^{10k+1}$, $(10k+5)^{10k+5}$, $(10k+6)^{10k+6}$ ja $(10k+10)^{10k+10}$ vastavalt numbritega 1, 5, 6 ja 0.
- Et arvu 4 iga paarisaste lõpeb numbriga 6 ja iga paaritu aste numbriga 4, siis arv $(10k+4)^{10k+4}$ kui 4-ga lõppeva arvu paarisaste lõpeb numbriga 6.
- Et arvu 9 iga paarisaste lõpeb numbriga 1 ja iga paaritu aste numbriga 9, siis arv $(10k+9)^{10k+9}$ kui 9-ga lõppeva arvu paaritu aste lõpeb numbriga 9.
- Arvud 2^2 ja 8^2 lõpevad 4-ga. Arv $(10k+2)^{10k+2} = ((10k+2)^2)^{5k+1}$ on 4-ga lõppeva arvu paaris- või paaritu aste sõltuvalt sellest, kas k on paaritu või paaris, ja lõpeb seega vastavalt numbriga 6 või 4. Arv $(10k+8)^{10k+8} = ((10k+8)^2)^{5k+4}$ on 4-ga lõppeva arvu paaritu või paarisaste sõltuvalt sellest, kas k on paaritu või paaris, ja lõpeb seega vastavalt numbriga 4 või 6. Järelikult $(10k+2)^{10k+2} + (10k+8)^{10k+8}$ lõpeb iga k korral numbriga 0.
- Arvud 3^2 ja 7^2 lõpevad 9-ga. Arv $(10k+3)^{10k+3} = ((10k+3)^2)^{5k+1} \cdot$ $\cdot (10k+3)$ lõpeb sama numbriga nagu $1 \cdot 3$ või $9 \cdot 3$ ehk numbriga 3 või 7 vastavalt sellele, kas k on paaritu või paaris. Arv $(10k+7)^{10k+7} =$ $= ((10k+7)^2)^{5k+3} \cdot (10k+7)$ lõpeb sama numbriga nagu $1 \cdot 7$ või $9 \cdot 7$ ehk numbriga 7 või 3 vastavalt sellele, kas k on paaritu või paaris. Järelikult $(10k+3)^{10k+3} + (10k+7)^{10k+7}$ lõpeb iga k korral numbriga 0.

Järelikult arvude $(10k+1)^{10k+1}, (10k+2)^{10k+2}, \ldots, (10k+10)^{10k+10}$ summa lõpeb sama numbriga nagu $1+5+6+0+6+9+0+0 = 27$ ehk numbriga 7. Ülesande summa koosneb 201 sellisest 10 liidetava summast ja lisaks liidetavast 2011^{2011}, mille viimane number on 1. Seega kogu summa viimane number on võrdne arvu $201 \cdot 7 + 1$ viimase numbriga 8.

Lahendus 2. Vaatame eraldi jääke 2-ga ja 5-ga jagamisel. Teame, et paaritute arvude astmed on paaritud ja paarisarvude astmed paaris. Seega ülesande summas on paarituid arve niisama palju kui hulgas $\{1, \ldots, 2011\}$. Selles hulgas on paarituid arve paarisarv, mistõttu kogu vaadeldav summa on paarisarv.

Uurimaks jääke 5-ga jagamisel, märkame, et 0 igas astmes annab 0 ning kui $1 \leqslant a \leqslant 4$, siis a^4 annab 5-ga jagades jäägi 1. Seega iga a, $1 \leqslant a \leqslant 20$, korral

$$(a+20)^{a+20} \equiv a^{a+20} = a^a \cdot a^{20} = a^a \cdot (a^4)^5 \equiv a^a \cdot 1 = a^a \pmod 5.$$

(Kirjutis $x \equiv y \pmod m$ tähendab, et x ja y annavad m-ga jagades sama jäägi.) Näeme, et antud summa liidetavate jäägid 5-ga jagamisel korduvad perioodiliselt iga 20 liikme järel. Et selliseid tsükleid on 100 ja 100 jagub 5-ga, on antud summa viimase 2000 liidetava summa jääk 5-ga jagamisel 0. Jääb üle arvutada esimese 11 liidetava jäägid: $1^1 = 1$, $2^2 = 4$, $3^3 = 27 \equiv 2$, $4^4 \equiv 4^0 = 1$, $5^5 \equiv 0^1 = 0$, $6^6 \equiv 1^2 = 1$, $7^7 \equiv 2^3 \equiv 3$, $8^8 \equiv 3^0 = 1$, $9^9 \equiv 4^1 = 4$, $10^{10} \equiv 0^2 = 0$, $11^{11} \equiv 1^3 = 1$. Siit kogusumma jääk 5-ga jagamisel on 3.

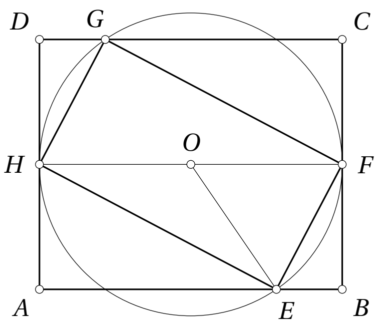
Kokkuvõttes, summa jääk 10-ga jagamisel ehk viimane number on 8.

2. *Vastus:* ei.

Lühiduse mõttes tähistame $A = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$ ja $B = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$. Valime $x_1 = x_3 = u$ ning $x_2 = x_4 = 1$. Siis $A \geqslant x_1x_3 = u^2$ ja $B = 4u$. Järelikult $\frac{A}{B} \geqslant \frac{u}{4}$. Et u võib olla kui tahes suur, siis ei leidu konstanti C, mille korral $A \leqslant CB$.

3. *Vastus:* $\frac{1}{2}$.

Ristkülikutel $ABCD$ ja $EFGH$ on ühine keskpunkt O (joonis 10). Et ristkülik on kõõlnelinurk, siis asub punkt F ringjoonel keskpunktiga O ja raadiusega $|OE|$. Üldiselt lõikab see ringjoon ristküliku külge BC kahes külje



Joonis 10

keskpunktiga sümmeetrilises punktis, kuid selleks, et ringjoonel ja küljel oleks täpselt üks ühine punkt, peab ringjoon külge BC puutuma ning F olema külje BC keskpunkt. Analoogiliselt on punkt H külje DA keskpunkt. Kolmnurga EFH aluse HF pikkus on a ja kõrgus $\frac{b}{2}$, kolmnurga pindala on $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{4}$. Kolmnurga GFH pindala on sama suur. Seega ristküliku $EFGH$ pindala on $2 \cdot \frac{ab}{4} = \frac{ab}{2}$ ehk pool ristküliku $ABCD$ pindalast ab.

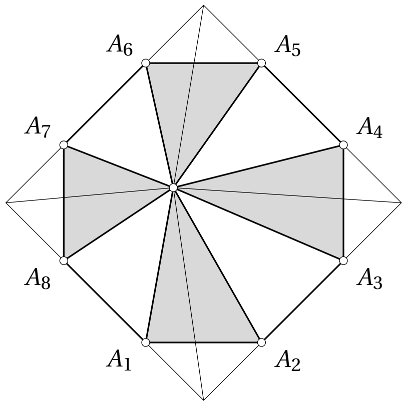
4. *Vastus:* 15.

Ühte värvi saab esineda maksimaalselt 4 korda: kummassegi vastastippu koonduvatel tahkudel maksimaalselt 2 korda. Seega võimalikud värvide arvud on kas 4, 4, 0 või 4, 3, 1 või 4, 2, 2 või 3, 3, 2.

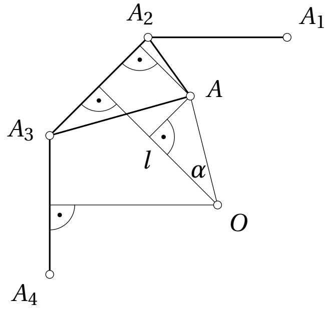
- Skeem 4, 4, 0. Kolmest värvist kahe väljavalimiseks on 3 võimalust. Oktaeedri värvimiseks kahe värviga on ainult 1 võimalus, sest ühe tahu värviga on ülejäänud tahkude värvid üheselt määratud. Seega kokku 3 võimalust.
- Skeem 4, 3, 1. Kolme värvi järjestamiseks on $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ võimalust. Kui värvide arvud on fikseeritud, siis oktaeedri tahkude värvimiseks on 1 võimalus, sest 4 korda kasutatud värvist peavad 2 asuma oktaeedri ühe tipu ja 2 tema vastastipu juures. Ülejäänud kahte värvi saab paigutada ainult 1 viisil oktaeedri pööramise täpsusega. Seega kokku 6 võimalust.
- Skeem 4, 2, 2. Kolmest värvist 4 korda kasutatava värvi väljavalimiseks on 3 võimalust. Kui värvide arvud on fikseeritud, siis oktaeedri värvimiseks on 1 võimalus, sest kui 4 korda kasutatava värvi asukohad on paika pandud, siis peavad kumbagi ülejäänud värvi tahud kohtuma sama tipu juures. Seega kokku 3 võimalust.
- Skeem 3, 3, 2. Kolmest värvist 2 korda kasutatava värvi väljavalimiseks on 3 võimalust. Kui 2 korda kasutatavat värvi tahud kohtuksid ühe tipu juures, siis peaks vastastipu juures olema vaheldumisi 2 ühte ja 2 teist värvi tahku, mistõttu vaadeldava tipu juures peaksid ülejäänud 2 tahku olema värvitud sama värviga. Siis aga tekiks kokku 4 ühte värvi tahku. Seega asub 2 korda kasutatav värv vastastahkudel ning ülejäänud värvid paiknevad vaheldumisi nendevahelisel kuuetahulisel külgpinnal. Seega kokku 3 võimalust.

Üldse on värvimisvõimalusi järelikult $3 + 6 + 3 + 3 = 15$.

5. *Lahendus 1.* Kui $n = 2$, st $2n$-nurk on ruut, siis väide kehtib, sest valgete kolmnurkade alused on ruudu vastasküljed ja kõrgused asuvad ühel sirgel, seega valgete kolmnurkade kogupindala on pool ruudu pindalast. Eeldame, et $n > 2$. Pikendame $2n$-nurga kõiki külgi, mis piirnevad valgete kolmnurkadega, kuni lõikumiseni nii, et tekib korrapärane n-nurk (joonis 11). Ühendame esialgse $2n$-nurga sees valitud punkti n-nurga tippudega. Valges kolmnurgas $2n$-nurga küljele tõmmatud kõrgus on sama mis vastavas



Joonis 11



Joonis 12

kolmnurgas n-nurga küljele tõmmatud kõrgus, nende kolmnurkade aluste suhe on aga $2n$-nurga küljepikkuse ja n-nurga küljepikkuse suhe, olgu see c. Seega on valgete kolmnurkade pindala cS_n, kus S_n on n-nurga pindala. Samuti näeme, et mustade kolmnurkade pindala on cS_n.

Lahendus 2. Ülesande väide on samaväärne väitega, et mustade kolmnurkade $2n$-nurga külgedele tõmmatud kõrguste summa on võrdne valgete kolmnurkade vastavate kõrguste summaga. Olgu O selle $2n$-nurga keskpunkt, A valitud punkt, α nurk punktist O ühele küljele tõmmatud ristsirge ja sirge OA vahel ning l keskpunkti O kaugus $2n$-nurga küljest (joonis 12). Siis vastava kolmnurga kõrgus on $l - |OA|\cos\alpha$. Järgmise sama värvi kolmnurga kõrguse saame arvutada samamoodi, ainult α asemel on nüüd $\alpha + \dfrac{360°}{n}$. Seega kõigi sama värvi kolmnurkade kõrguste summa on

$$nl - |OA| \cdot \left(\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{360°}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)360°}{n}\right)\right).$$

Näitame, et sulgudes olev koosinuste summa on võrdne nulliga. Selleks korrutame seda summat suurusega $\sin\dfrac{360°}{2n}$. Et

$$\cos\left(\alpha + \frac{k \cdot 360°}{n}\right)\sin\frac{360°}{2n} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha + \frac{(k+\frac{1}{2}) \cdot 360°}{n}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{(k-\frac{1}{2}) \cdot 360°}{n}\right)\right),$$

siis tekib teleskoopsumma, millest pärast liikmete koondamist jääb järele

$$-\sin\left(\alpha - \frac{360°}{2n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{(n-\frac{1}{2}) \cdot 360°}{n}\right) = 0.$$

Sama värvi kolmnurkade kõrguste summa on seega nl mõlema värvi jaoks.

Märkus. Žürii lahenduses 2 esinevat summat

$$\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{360^\circ}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\cdot 360^\circ}{n}\right)$$

võib leida ka järgnevalt. Tähistame $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, kus i on imaginaarühik, ning

$$z_k = \cos\frac{k\cdot 360^\circ}{n} + i\sin\frac{k\cdot 360^\circ}{n}, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Siis on uuritav summa kompleksarvu $z\cdot z_0 + z\cdot z_1 + \ldots + z\cdot z_{n-1}$ reaalosa. Saame

$$\begin{aligned} z\cdot z_0 + z\cdot z_1 + \ldots + z\cdot z_{n-1} &= z\cdot(z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1}) = \\ &= z\cdot\left(z_1^0 + z_1^1 + z_1^2 + \ldots + z_1^{n-1}\right) = z\cdot\frac{z_1^n - 1}{z_1 - 1} = z\cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

mistõttu ka uuritav summa on võrdne nulliga.

Eesti LVIII matemaatikaolümpiaad

12. märts 2011 Lõppvoor **9. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Evely Leetma)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Täislahendus arvutusvea või pisipuudusega (nt pole kirjas, et 2011 on algarv): 6 p
- Jõutud seoseni $2011 = (b-a)(b+a)$; märgitud, et 2011 on algarv: 5 p
- Vaadeldud juhtumit, kus n ja $n+2011$ on järjestikuste täisarvude ruudud; leitud õige n väärtus: 4 p
- Vaadeldud juhtumit, kus n ja $n+2011$ on järjestikuste täisarvude ruudud; n väärtuse leidmisel arvutusviga: 3 p

2. *(Oleg Košik)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Muidu õige lahendus, kuid võrrandisüsteemi lahenduskäik esitamata: 5 p
- Poolik lahendus: 3 p
- Pandud kirja mõni kasulik võrrand või seos: 1–2 p
- Õige vastuseni jõutud katsetusmeetodil: 1 p
- Ainult õige vastus: 0 p

Mitmed lahendajad eeldasid ekslikult, et äravisatuid asju on sama palju kui juurdelisatuid, kuid tekstis pole seda öeldud ning see läheb vastuollu ülesande tingimustega.

3. *(Elts Abel)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem 1. Pindalade arvutamine.

- Tehtud joonis ja arvutatud vajalikud nurgad: 1 p
- Avaldatud 1. maiasmoka tükkide kogupindala S_1 mingi (ühikuks võetud) lõigu pikkuse a kaudu: 2 p
- Avaldatud 2. maiasmoka tüki pindala S_2 lõigu pikkuse a kaudu: 1 p
- Avaldatud 3. maiasmoka tükkide kogupindala S_3 lõigu pikkuse a kaudu: 2 p
- Näidatud, et $S_1 + S_3 = S_2$: 1 p

Skeem 2. Hulknurkade tükeldamine.

- Tehtud joonis ja arvutatud vajalikud nurgad: 1 p
- Näidatud kolmnurkade ABC, CDE, EFG ja GHA võrdsus: 1 p
- Jaotatud kolmnurk ABC kaheks võrdseks kolmnurgaks ja näidatud, et kolmnurga ACE seda osa, mis asub ruudu $BDFH$ see, on võimalik jaotada kaheksaks valitud kolmnurgaks: 3 p
- Näidatud, et $S_1 + S_3 = S_2$: 2 p

Kolmnurkade võrdsuse põhjendamata jätmise korral võeti maha kuni 2 punkti.

4. *(Reimo Palm)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 3 p

  Tüüpilised lahendused a)-osas:
  - õige konstruktsioon, kuid pole selgitatud, miks ühegi kahe täringu või kihi kokkupanemisel vastuolu ei teki: *2 p*
  - sobiv konstruktsioon väiksema orientatsiooniveaga: *1 p*
  - sobiv konstruktsioon süstemaatilise orientatsiooniveaga: *0 p*
- b)-osa: 4 p

  Tüüpilised lahendused b)-osas:
  - idee õige, selgituses väiksemad puudujäägid: *3 p*
  - idee õige, selgitus puudulik (sh mõne kuubi vale orientatsioon) või põhjendus ebaselge: *1–2 p*
  - ainult esitatud põhjendamata või vääri väiteid: *0 p*

5. *(Kalle Kaarli)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Ülesanne korrektselt formaliseeritud ja naturaalarvude jaguvuse omadustele tuginedes lahendus lõpule viidud: 7 p
- Leitud üks sobiv variant (näiteks 1000 eurot) ja sellest taandamise teel saadud õige vastus; põhjendatud, et enam vähendada ei saa: 5 p
- Sama ilma viimase põhjenduseta: 4 p
- Sama, kuid taandamine lõpule viimata; näiteks vastus 500 eurot: 3 p
- Õige vastus väga ähmaste selgitustega: 1 p
- Vale vastus ebakorrektse arutlusega: 0 p

Juhul, kui vormistus või väljendamise täpsus jättis tugevasti soovida, võeti punkt maha.

Hindamisskeemid

1. *(Maksim Ivanov)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Saadud ülesandes antud võrratusega samaväärne võrratus kujul $\frac{a^2-c^2}{b+c}+\frac{b^2-a^2}{c+a}+\frac{c^2-b^2}{a+b} \geqslant 0$ (või sellega sarnane), kuid seda pole tõestatud: 3 p
- Saadud ülesandes antud võrratusega samaväärne võrratus kujul $a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2 \geqslant 0$, kuid seda pole tõestatud: 5 p

2. *(Ahto Truu)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Õige üldlahend välja toodud, aga selle ühesuse põhjendus puudulik (näiteks näidatud, et paaritu w pole võimalik, aga paaris w juht käsitlemata): 4 p
- Õige üldlahend välja toodud, aga selle ühesus põhjendamata või põhjendus väga puudulik: 2 p
- Üksiku erilahendi leidmine: 0 p
- Kasulike mittetriviaalsete arenduste eest, sõltuvalt sellest, kui kaugele oli jõutud: 1–2 p

3. *(Toomas Krips)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näitamine, et nelinurga $ABCD$ diagonaalid ristuvad: 2 p
- Näitamine, et nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed: 5 p

  Sealhulgas:
  - Näidatud, et nurk POQ on sirgnurk: *1 p*
  - Pandud tähele, et $|PA| = |PO| = |PB|$: *1 p*

4. *(Uve Nummert)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa ($2 \times 2 \times 2$ kuup): 3 p

  Sealhulgas:
  - kirjeldatud võimalikud arvude paigutused kuubi tahkudel: *1 p*
- b)-osa ($3 \times 3 \times 3$ kuup): 4 p

  Sealhulgas:

- kirjeldatud võimalikud arvude paigutused kuubi tahkudel (või piisav alamhulk neist): *1 p*

Kui joonisel oli näidatud õige arvude paigutus ainult kuubi kolmel korraga nähtaval tahul, sai selle osa eest 2 punkti.

5. *(Raul Kangro)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Teostati õige üleminek esimeselt kolmnurgalt teisele, üldistati valesti: 2 p
- Näidete läbiarvutamise teel leiti katseliselt õige valem alusnurkade (või tipunurkade) jaoks ning sellest lähtuvalt lahendati õigesti, vastava seose kehtimine üldjuhul näitamata: 5 p
- Korrektne lahendus: 7 p

Hindamisskeemid

1. *(Nikita Salnikov)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et 1 ja -1 ei saa esitada nõutud jada summana: 3 p
- Näidatud, et ülejäänud arvud on esitatavad nõutud jada summana: 4 p

2. *(Mart Abel)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Ära toodud lahend $x = -1,\ y = 1$: 1 p
- Ära toodud üks või mitu lahendit kujul $x = y + 1$: 1 p
- Näidatud, et kõik lahendid kujul $x = n + 1,\ y = n$ sobivad: 2 p
- Näidatud, et teisi lahendeid ei ole: 3 p

3. *(Härmel Nestra)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Täislahendus pisiveaga: 6 p
- Mõni oluline samm lahenduse suunas: 1–2 p
- Kasutud mõttearendused: 0 p

4. *(Hannes Jukk)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Õpilane leidis esimese operatsiooni puhul soola hulga lahuses õigesti: 1 p
- Õpilane leidis teise operatsiooni puhul soola hulga lahuses õigesti: 1 p
- Õpilane leidis kolmanda operatsiooni puhul soola hulga lahuses õigesti: 2 p
- Õpilane leidis neljanda operatsiooni puhul soola hulga lahuses õigesti: 1 p
- Õpilane koostas ruutvõrrandi õigesti: 1 p
- Õpilane lahendas ruutvõrrandi ja sai ülesande tingimusi rahuldavad lahendid: 1 p

5. *(Peeter Laud)* Žürii näidislahendusega 1 sarnaneva lahenduse osade eest anti punkte järgmiselt. Osade eest antud punktid summeeriti. Olgu k ja i defineeritud nii nagu näidislahenduses.

- Näidatud, et $i = 2011$ viib vastuoluni: 3 p
- Näidatud, et $i \neq 2011$ viib vastuoluni: 4 p

Žürii näidislahendusega 2 sarnaneva lahenduse osade eest anti punkte järgmiselt. Osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud, et igal arvul peab olema ühine sõber arvuga 1: 1 p
- Näidatud, et kui mingi arv on sõber arvudega $x_1, \ldots, x_n$, siis arvud $x_1, \ldots, x_n$ peavad kõik üksteisega jaguma: 2 p
- Näidatud, et arv 1 peab olema sõber paljude erinevate arvudega (siin „paljude“ tähendab vähemalt 11): 2 p
- Näidatud, et hulgas $\{1, \ldots, 2011\}$ ei leidu ühtteist erinevat arvu, mis kõik üksteisega jaguvad: 2 p

Hindamisskeemid

1. *(Kairi Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Lahendus, kus arvutati iga numbriga lõppevate arvude summa eraldi.

- Numbritega 1, 5, 6, 0 lõppevate arvude läbivaatus: 1 p
- Numbritega 4 ja 9 lõppevate arvude läbivaatus: 1 p
- Numbritega 2, 3, 7, 8 lõppevate arvude läbivaatus: 4 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 1 p

Lahendus, kus arvutati 20 järjestikuse liidetava summa.

- Arvude 0–9 astmete jääkide leidmine: 2 p
- Põhjendamine, et 20 järjestikuse liidetava summa tuleb alati sama: 3 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 2 p

2. *(Laur Tooming)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Analüüsitud läbi erijuht, kus $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ vms: 1 p
- Teisendatud antud võrratus „ilusale“ lühikesele kujule: 1 p
- Idee fikseerida kõigi või osade muutujate väärtused, mis võiks sihile viia, või muu kasulik, aga lõpuleviimata idee: 3 p
- Õige lahenduse idee on olemas, aga tõsiste vigadega: 4 p
- Õige lahendus, aga mõni vajalik selgitus puudu: 5 p
- Täielik lahendus väiksemate vigadega: 6 p
- Täielik lahendus: 7 p

3. *(Nikolai Voitsehhovski)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Märgitud, et ristkülikutel $ABCD$ ja $EFGH$ on ühine keskpunkt O: 1 p
- Näidatud, et ringjoon peab külge BC puutuma ning F peab olema külje BC keskpunkt; analoogiliselt peab punkt H olema külje DA keskpunkt: 3 p
- Leitud, et ristkülikude $EFGH$ ja $ABCD$ pindalade suhe on $\frac{1}{2}$: 3 p

4. *(Urve Kangro)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus esinevate värvide arvu järgi (nagu žürii lahenduses): 7 p
- Vaadeldud oktaeedri pealtvaadet, mille jaoks on 6 võimalust, ning kombineeritud seda erinevate altvaadetega. Tüüpiliselt jäi sellisel juhul tähele panemata, et 6 võimalust andsid paarikaupa sama tulemuse: 5 p

Lisaks võeti 1 punkt maha mõnede võimaluste arvestamata jätmise eest (näiteks kahe värviga värvimise võimaluste puudumise eest) ning rohkemate võimaluste topelt lugemise eest.

5. *(Indrek Zolk)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Juht $n = 2$ (või $n = 2k$, kus k on suvaline täisarv): 1 p
- Üldjuht: 6 p

Lõviosa lahendajatest leidis lahenduse juhul $n = 2k$, mille korral igas paralleelsetele vastaskülgedele toetuvate kolmnurkade paaris on mõlemad kolmnurgad sama värvi. Paraku pole sama ideega võimalik saada lahendust üldjuhul.