Lõppvoor 2010

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

20. märts 2010 Lõppvoor **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu a, b ja c sellised positiivsed täisarvud, et arv ab jagub arvuga $2c$, arv bc jagub arvuga $3a$ ja arv ca jagub arvuga $5b$. Leia korrutise abc vähim võimalik väärtus.

2. Tõesta, et

$$2010 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{2010^2+1}{2010^2-1} < 2010\,\frac{1}{2}.$$

3. Ruudu $ABCD$ külgedele BC ja CD kui alustele konstrueeritakse väljapoole ruutu võrdsed võrdhaarsed kolmnurgad BJC ja CKD. Olgu M lõigu CJ keskpunkt ja O ruudu $ABCD$ keskpunkt. Tõesta, et lõigud MO ja BK on risti.

4. Leia kõik võimalused eemaldada ruudustikust mõõtmetega 5×5 üks ühikruut nii, et järelejäänud osa saaks tükeldada ristkülikuteks mõõtmetega 1×3.

5. Juku joonestas korrapärase kuusnurga ja valis välja kolm erineva pindalaga kolmnurka, mille kõik tipud asuvad selle kuusnurga tippudes. Tõesta, et valitud kolmnurkade pindalade summa on võrdne kuusnurga pindalaga.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

20. märts 2010 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Arvutiprogramm kirjutab ekraanile arve järgmise seaduspärasuse kohaselt. Kõigepealt kirjutab ta arvud 0 ja 1, igal järgneval sammul aga arvu, mis võrdub kahe viimasena kirjutatud arvu summaga. Tõesta, et iga ekraanile kirjutatud arv, mis jagub 4-ga, jagub ka 8-ga.

2. Leia võrrandi

$$\frac{2}{a^2}+\frac{3}{b^2}+\frac{4}{c^2}=1$$

kõik naturaalarvulised lahendid.

3. Võrdkülgse kolmnurga ABC külgedel AB, BC ja CA valitakse vastavalt punktid A', B' ja C' nii, et

$$\frac{|A'B|}{|AB|}=\frac{|B'C|}{|BC|}=\frac{|C'A|}{|CA|}=k.$$

Leia kõik positiivsed reaalarvud k, mille korral kolmnurga $A'B'C'$ pindala moodustab täpselt poole kolmnurga ABC pindalast.

4. Kolm mängijat A, B, C mängivad järgmist mängu. Igal mängijal on paberileht, millele on mängu alguses kirjutatud selle mängija nimi. Mängija A valib ülejäänutest välja ühe mängija, kustutab tema paberilehelt seal oleva nime ja kirjutab selle asemele enda paberil oleva. Edasi sooritab samasugusel viisil käigu mängija B, siis mängija C ning seejärel siirdub käigujärg uuesti mängijale A. Mäng lõpeb, kui kõigi mängijate lehtedel on üks ja sama nimi ning võitja on see mängija, kelle nimi see on. Kas kellelgi mängijatest leidub võitev strateegia (strateegia, mille järgi mängides ta võidab vastaste suvalise vastumängu korral)?

5. Korrapärane 2010-nurk lõigatakse kolmnurkseteks tükkideks. Leia vähim võimalik tükkide arv.

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

20. märts 2010 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu x, y ja z positiivsed täisarvud, mille korral $\text{SÜT}(x, y, z) = 1$. Tõesta, et kui kehtib võrdus

$$(y^2 - x^2) - (z^2 - y^2) = \big((y - x) - (z - y)\big)^2,$$

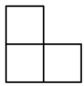
siis x ja z on täisarvude ruudud.

2. Leia kõik sellised täisarvude paarid (m, n), et suvaliste positiivsete reaalarvude x ja y korral kehtib võrratus

$$x^m + y^n \geqslant x^n y^m.$$

3. Kolmnurga ABC külje BC keskpunkt on D. Tõesta, et kolmnurkade ABD ja ACD mediaanide lõikepunktid paiknevad sirgest AD võrdsel kaugusel.

4. Tõesta, et suvalise naturaalarvu k korral on kolmest ühikruudust koosnevate nurgikutega võimalik täpselt katta nurgikutega sarnane, aga k korda suuremate küljepikkustega kujund.



5. Kuullaager koosneb kahest üksteise sees paiknevast ühise teljega silindrist, mille vahel asub n ühesuurust kuuli. Kõigi kuulide keskpunktid on ühel silindrite teljega ristuval tasandil ning iga kuul puutub mõlemat silindrit ja kahte oma naaberkuuli. Olgu r kuulide raadius ning R välimise silindri raadius. Tõesta, et

$$\frac{r}{R} < \frac{\pi}{n + \pi}.$$

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

20. märts 2010 | Lõppvoor | **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Jada (a_n) on defineeritud seostega $a_1 = 1$ ja $a_n = n \cdot (a_1 + \ldots + a_{n-1})$ iga $n > 1$ korral. Leida kõik positiivsed täisarvud n, mille korral a_n jagub arvuga $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

2. Olgu a, b ja c kolmnurga külgede pikkused ning k mingi reaalarv. Tõesta, et kui ruutvõrrandil $x^2 + (a+b+c)x + k(ab+bc+ca) = 0$ leidub reaalarvuline lahend, siis $k < 1$.

3. Nelinurga külgede pikkused on a, b, c, d ja pindala S. Tõesta, et kehtib võrratus

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4S,$$

ning tee kindlaks, milliste nelinurkade korral kehtib võrdus.

4. Koordinaatide linnas on $n \geqslant 3$ trammiliini, mis kulgevad paralleelselt x-teljega nii, et iga liin algab x-koordinaadilt 0 ning lõpeb x-koordinaadil n. Igal liinil liigub üks tramm pikkusega 1, esimesel liinil kiirusega 1, teisel kiirusega 2 jne, kuni viimasel kiirusega n. Alati, kui mõni tramm jõuab sõidusuunas oleva otsaga liini otspunkti, jätkab ta hetkeliselt ja ümber pööramata liikumist vastassuunas. Hommikul samal ajal alustavad kõik trammid sõitu algasendist, kus iga trammi tagumise otsa x-koordinaat on 0. Tõesta, et ei leidu ajahetke, mil trammide projektsioonid x-teljele katavad kogu lõigu 0-st n-ni.

5. Leia minimaalne kaugus kahe punkti vahel, millest üks asub funktsiooni $y = e^x$ ja teine funktsiooni $y = \ln x$ graafikul.

LVII Олимпиада Эстонии по математике

20 марта 2010 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть a, b и c — такие положительные целые числа, что число ab делится на число $2c$, число bc делится на число $3a$ и число ca делится на число $5b$. Найти наименьшее возможное значение произведения abc.

2. Доказать, что

$$2010 < \frac{2^2+1}{2^2-1} + \frac{3^2+1}{3^2-1} + \ldots + \frac{2010^2+1}{2010^2-1} < 2010\,\frac{1}{2}.$$

3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ как на основаниях построены вне квадрата равные равнобедренные треугольники BJC и CKD. Точка M является серединой отрезка CJ, а точка O является центром квадрата $ABCD$. Доказать, что отрезки MO и BK перпендикулярны.

4. Найти все возможности для удаления из клетчатой доски размером 5×5 одной клетки так, чтобы оставшаяся часть могла быть поделена на прямоугольники размером 1×3.

5. Юра нарисовал правильный шестиугольник и выбрал три треугольника различной площади, все вершины которых находятся в вершинах нарисованного шестиугольника. Доказать, что сумма площадей выбранных треугольников равна площади шестиугольника.

LVII Олимпиада Эстонии по математике

20 марта 2010 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Компьютерная программа записывает на экране числа по следующей закономерности. Прежде всего она записывает числа 0 и 1, после чего каждый раз она записывает число, равное сумме двух записанных последними чисел. Доказать, что каждое записанное на экране число, делящееся на 4, делится также на 8.

2. Для уравнения
$$\frac{2}{a^2}+\frac{3}{b^2}+\frac{4}{c^2}=1$$
найти все решения в натуральных числах.

3. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника ABC выбраны соответственно точки A', B' и C' так, что
$$\frac{|A'B|}{|AB|}=\frac{|B'C|}{|BC|}=\frac{|C'A|}{|CA|}=k.$$
Найти все положительные действительные числа k, при которых площадь треугольника $A'B'C'$ равна половине площади треугольника ABC.

4. Три игрока A, B и C играют в следующую игру. У каждого игрока имеется лист бумаги, на котором в начале игры записано имя этого игрока. Игрок A выбирает среди остальных одного игрока, стирает записанное на его листе бумаги имя и записывает вместо него имя, записанное на своём листе бумаги. После этого таким же образом действует игрок B, затем игрок C, после чего ход снова переходит к игроку A. Игра заканчивается, когда на листах всех игроков будет записано одно и то же имя, и победителем становится тот игрок, чьё имя и будет записано на всех листах. Найдётся ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия (т.е. стратегия, следуя которой он победит в независимости от игры соперников)?

5. Правильный 2010-угольник разрезают на треугольные части. Найти наименьшее возможное число таких частей.

LVII Олимпиада Эстонии по математике

20 марта 2010 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Пусть x, y и z — такие положительные целые числа, при которых НОД$(x, y, z) = 1$. Доказать, что если имеет место равенство

$$(y^2 - x^2) - (z^2 - y^2) = \big((y - x) - (z - y)\big)^2,$$

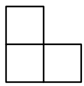
то x и z являются квадратами целых чисел.

2. Найти все такие пары целых чисел (m, n), что при любых положительных действительных числах x и y имеет место неравенство

$$x^m + y^n \geqslant x^n y^m.$$

3. Точка D является серединой стороны BC треугольника ABC. Доказать, что точки пересечения медиан треугольников ABD и ACD лежат на одном и том же расстоянии от прямой AD.

4. Доказать, что при любом натуральном числе k можно уголками из трёх клеток точно покрыть фигуру, которая подобна уголкам, но стороны которой в k раз больше сторон данных уголков.



5. Шариковый подшипник состоит из двух находящихся один в другом цилиндров с общей осью, между которыми находятся n одинаковых шариков. Центры всех шариков лежат на одной плоскости, перпендикулярной оси цилиндров, и каждый шарик касается обоих цилиндров и двух рядом стоящих шариков. Пусть r — радиус шариков, а R — радиус внешнего цилиндра. Доказать, что

$$\frac{r}{R} < \frac{\pi}{n + \pi}.$$

LVII Олимпиада Эстонии по математике

20 марта 2010 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Последовательность (a_n) определена соотношениями $a_1 = 1$ и $a_n = n \cdot (a_1 + \ldots + a_{n-1})$ для каждого $n > 1$. Найти все положительные целые числа n, при которых a_n делится на число $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

2. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, а k — некоторое действительное число. Доказать, что если квадратное уравнение $x^2 + (a + b + c)x + k(ab + bc + ca) = 0$ имеет действительный корень, то $k < 1$.

3. Пусть a, b, c и d являются длинами сторон четырёхугольника, площадь которого равна S. Доказать, что имеет место неравенство
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4S,$$
и определить, при каких четырёхугольниках имеет место равенство.

4. В городе координат имеется $n \geqslant 3$ трамвайных линий, которые проходят параллельно оси x так, что каждая линия начинается с x-координаты 0 и заканчивается на x-координате n. По каждой линии движется один трамвай длиной 1, причём по первой линии трамвай движется со скоростью 1, по второй — со скоростью 2 и т.д., по последней — со скоростью n. Всегда, когда какой-либо трамвай достигает краем, расположенным в направлении движения, конца линии, он в тот же момент без разворота продолжает движение в обратном направлении. В одно и то же время утром все трамваи начинают движение из исходного положения, в котором x-координата заднего края каждого трамвая равна 0. Доказать, что не найдётся такого момента времени, при котором проекции трамваев на ось x покроют весь отрезок от 0 до n.

5. Найти наименьшее расстояние между двумя точками, одна из которых лежит на графике функции $y = e^x$, а другая — на графике функции $y = \ln x$.

Lahendused

1. *Vastus:* 900.

Lahendus 1. Et ab jagub arvuga $2c$ ja ca jagub arvuga $5b$, siis $ab \cdot ca$ jagub arvuga $2c \cdot 5b$, millest saame, et a^2 jagub arvuga $2 \cdot 5$. Seega a^2 jagub 2-ga ja 5-ga ning järelikult ka a jagub 2-ga ja 5-ga (sest 2 ja 5 on algarvud). Analoogiliselt leiame, et b jagub 2-ga ja 3-ga ning c jagub 3-ga ja 5-ga. Järelikult abc jagub arvuga $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 900$. Teiselt poolt, valides $a = 10$, $b = 6$ ja $c = 15$, on ülesande tingimused täidetud ning korrutise abc väärtus ongi parajasti 900.

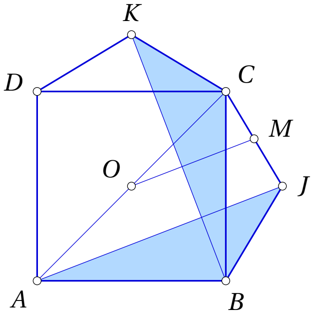
Lahendus 2. Ülesande tingimustest nähtub, et mis tahes kahe antud arvu korrutis jagub kolmandaga. Seega alati, kui üks neist arvudest jagub mingi algarvuga p, siis ka ülejäänud kahe arvu korrutis jagub selle algarvuga p. Kõigi kolme arvu korrutis jagub siis arvuga p^2. Vastavalt ülesande esimesele tingimusele jagub korrutis ab aga algarvuga 2, mistõttu üks arvudest a ja b jagub 2-ga. Analoogselt näeme teistest tingimustest, et üks arvudest b ja c jagub 3-ga ja üks arvudest c ja a jagub 5-ga. Eelmises lõigus tehtu põhjal jagub korrutis abc arvudega 2^2, 3^2 ja 5^2. Seega abc jagub ka nende vähima ühiskordsega 900.

2. Paneme tähele, et $\dfrac{n^2+1}{(n-1)(n+1)} = 1 + \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$, seega ülesandes antud summa esitub kujul

$$1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots + 1 + \frac{1}{2009} - \frac{1}{2011} = 2010 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}.$$

Et $0 < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2010} - \dfrac{1}{2011} < \dfrac{1}{2}$, siis asub vaadeldava summa väärtus tõepoolest 2010 ja $2010\,\dfrac{1}{2}$ vahel.

3. *Lahendus 1.* Lõik MO on paralleelne lõiguga AJ, sest OM on kolmnurga AJC kesklõik (joonis 1). Lõik AJ aga on risti lõiguga BK, sest kolmnurgad ABJ ja BCK on võrdsed ning nende küljed AB ja BC on risti (pöörates kolmnurka ABJ ümber punkti O nurga 90° võrra, saame kolmnurga BCK).



Joonis 1

Lahendus 2. Olgu $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$ ruudu tipud. Ruudu keskpunkt on siis $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Et kolmnurgad BJC ja CKD on võrdhaarsed ja võrdsed, siis punktide J ja K koordinaadid on $J\left(x;\frac{1}{2}\right)$ ja $K\left(\frac{1}{2};x\right)$ mingi x korral. Lõigu CJ keskpunkt on siis $M\left(\frac{1+x}{2};\frac{3}{4}\right)$. Järelikult $\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x}{2};\frac{1}{4}\right)$ ja $\overrightarrow{BK}=\left(-\frac{1}{2};x\right)$. Nüüd aga $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{BK}$, sest $\frac{x}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\cdot x=0$.

4. *Vastus:* ainus võimalus on eemaldada keskmine ruut.

Lahendus 1. Nummerdame ruudustiku ruudud kahel viisil, nagu näidatud joonisel 2. Ükskõik, kuidas nüüd lõigata ruudustikust välja ristkülik mõõtmetega 1×3, sisaldab ta kummagi nummerduse korral iga numbrit täpselt ühe korra. Kummaski nummerduses on aga numbrit 1 ühe võrra rohkem kui ülejäänuid. Seega tuleb eemaldada ruut numbriga 1, ja seda mõlema nummerduse korral. Ainuke ruut, mille number mõlema nummerduse korral on 1, on ruudustiku keskmine ruut. Kui keskmine ruut eemaldada, siis saab ülejäänud kujundi tükeldada neljaks ristkülikuks mõõtmetega 2×3 ja need omakorda ristkülikuteks mõõtmetega 1×3.

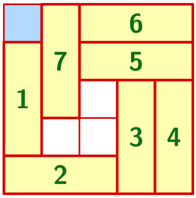
1	2	3	1	2
3	1	2	3	1
2	3	1	2	3
1	2	3	1	2
3	1	2	3	1

3	1	2	3	1
1	2	3	1	2
2	3	1	2	3
3	1	2	3	1
1	2	3	1	2

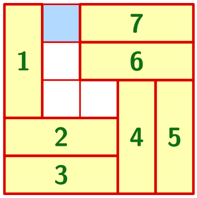
Joonis 2

A	B	C		
	D	E		
		F		

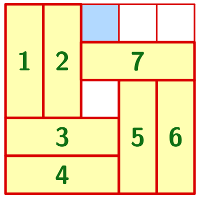
Joonis 3



Joonis 4



Joonis 5

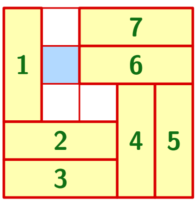


Joonis 6

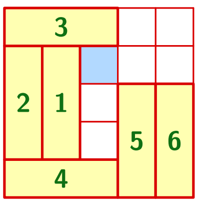
Lahendus 2. Ruudustiku sümmeetriat arvestades on olemas 6 põhimõtteliselt erinevat võimalust ühe ruudu eemaldamiseks, need võimalused on näidatud joonisel 3.

- Kui eemaldatakse ruut A, siis peab üks ristkülik 3×1 puutuma otsaga ruutu A. Sümmeetria tõttu võime eeldada, et see ristkülik on vertikaalne. Sellega aga on järgmiste ristkülikute asendid üheselt määratud (joonis 4, numbrid tähistavad ristkülikute valimise järjekorda).
- Kui eemaldatakse ruut B või C, siis on kõigi ristkülikute asend üheselt määratud (joonis 5 või 6).
- Kui eemaldatakse ruut D, siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et ülemist vasakut nurka kattev ristkülik on vertikaalne. Siis aga on ülejäänud ristkülikute asend üheselt määratud (joonis 7).
- Kui eemaldatakse ruut E, siis peab tema kõrval vasakul või paremal asuma vertikaalse 3×1 ristküliku ots (muidu ei saaks katta ruudu E kohal asuvat ruutu). Üldisust kitsendamata asugu see ristkülik vasakul. Siis aga saab vasakus veerus ristkülik paikneda ainult ühel viisil ning ka järgnevate ristkülikute asend on üheselt määratud (joonis 8).
- Kui eemaldatakse ruut F, siis saab ülejäänud ruudud katta 3×1 ristkülikutega (joonis 9).

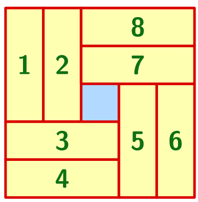
Seega kui eemaldatakse mõni muu ruut peale ruudu F, siis pole võimalik ülejäänud ruute ristkülikuteks tükeldada. Ainukesena on katmine võimalik siis, kui eemaldatakse ruut F.



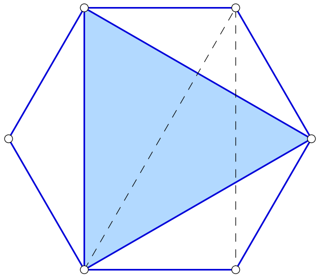
Joonis 7



Joonis 8



Joonis 9



Joonis 10

5. Iga kolmnurk, mille tipud on valitud korrapärase kuusnurga tippude hulgast, on võrdne ühega järgmistest kolmnurkadest.

- Kolmnurk Δ_1, mille tippudeks on kuusnurga kolm järjestikust tippu.
- Kolmnurk Δ_2, mille kaks tippu on kuusnurga naabertipud ja kolmas tipp ei ole kummagi naabertipp.
- Kolmnurk Δ_3, milles ükski kaks tippu ei ole kuusnurga naabertipud.

Et väljavalitud kolmnurkade pindalad on erinevad, siis need kolmnurgad on võrdsed kolmnurkadega Δ_1, Δ_2 ja Δ_3. Kuusnurga saab jaotada neljaks tükiks (joonis 10): kolmnurk Δ_3, mida ümbritseb kolm kolmnurka Δ_1. Kolmnurga Δ_2 (joonisel 10 tähistatud punktiiriga) pindala on võrdne kahe kolmnurga Δ_1 pindalaga, sest kolmnurgal Δ_2 on võrreldes kolmnurgaga Δ_1 sama alus, aga kaks korda suurem kõrgus.

Lahendused

1. Teame, et kui kaks arvu annavad arvuga m jagamisel jäägid a ja b, siis nende arvude summa annab arvuga m jagamisel sama jäägi nagu jääkide a ja b summa. Seega on iga järgneva ekraanile kirjutatud arvu jääk määratud kahe vahetult talle eelneva arvu jäägiga. Esimeste tekkivate arvude jäägid 8-ga jagamisel on 0, 1, 1, 2, 3, 5, 0, 5, 5, 2, 7, 1, 0, 1, 1, ..., seega jäägid korduvad iga 12 arvu tagant. Arv, mis jagub 4-ga, aga mitte 8-ga, annab 8-ga jagamisel jäägi 4, seda jääki aga tekkivate jääkide hulgas ei esine. Järelikult kõik 4-ga jaguvad arvud jaguvad ka 8-ga (annavad jäägi 0).

2. *Vastus:* $a = 3$, $b = 2$, $c = 12$ ja $a = 3$, $b = 3$, $c = 3$.

Et vasaku poole liidetavad on positiivsed arvud, siis peavad nad võrduse kehtimiseks olema kõik väiksemad kui 1. Seega $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$ ja $c \geqslant 3$. Vaatleme järgmisi juhte.

- Kui $a = 2$, siis saame võrrandi $\frac{3}{b^2} + \frac{4}{c^2} = \frac{1}{2}$ ehk $6c^2 + 8b^2 = b^2c^2$ ehk $(b^2 - 6)(c^2 - 8) = 48$. Siit järeldub, et $c^2 - 8 \leqslant 48$ ehk $c \leqslant 7$. Kontrollides läbi c väärtused 3, 4, ..., 7, ei leia me ühtegi väärtust, mille korral b on täisarv.
- Kui $b = 2$, siis saame võrrandi $\frac{2}{a^2} + \frac{4}{c^2} = \frac{1}{4}$ ehk $8c^2 + 16a^2 = a^2c^2$ ehk $(a^2 - 8)(c^2 - 16) = 128$. Siit saame $c^2 - 16 \leqslant 128$ ehk $c \leqslant 12$. Kontrollides läbi kõik c väärtused 3, 4, ..., 12, näeme, et a on täisarv ainult juhul $c = 12$; siis $a = 3$. Sellega oleme leidnud ühe esialgse võrrandi lahendi.
- Kui $a \geqslant 3$ ja $b \geqslant 3$, siis arvestades tingimust $c \geqslant 3$, leiame

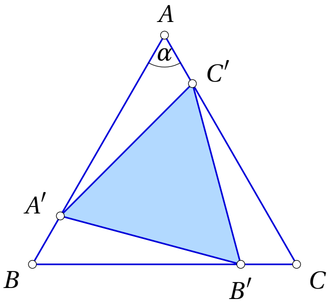
  $$\frac{2}{a^2} + \frac{3}{b^2} + \frac{4}{c^2} \leqslant \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = 1,$$

  kusjuures võrdus kehtib parajasti juhul $a = b = c = 3$. Siit saame ülesande võrrandi teise lahendi ja ühtlasi näeme, et rohkem lahendeid ei ole.

3. *Vastus:* $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Olgu α kolmnurga tipu A juures asuv nurk (joonis 11). Kolmnurga $AA'C'$ pindala on siis

$$S_{AA'C'} = \frac{1}{2} \cdot |AA'| \cdot |AC'| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot (1-k)|AB| \cdot k|AC| \cdot \sin\alpha = (1-k)k\, S_{ABC}.$$



Joonis 11

Analoogiliselt saame $S_{BB'A'} = (1-k)k\,S_{ABC}$ ja $S_{CC'B'} = (1-k)k\,S_{ABC}$. Järelikult on kolmnurgad $AA'C'$, $BB'A'$ ja $CC'B'$ võrdse pindalaga. Seetõttu moodustab kolmnurga $A'B'C'$ pindala kolmnurga ABC pindalast poole parajasti siis, kui kolmnurga $AA'C'$ pindala moodustab kolmnurga ABC pindalast ühe kuuendiku ehk kehtib seos $(1-k)k = \frac{1}{6}$. Ruutvõrrandi $k^2 - k + \frac{1}{6} = 0$ lahendid on $k_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$, nad mõlemad on positiivsed reaalarvud.

Märkus. Nagu lahendusest nähtub, kehtib ülesande väide tegelikult suvalise kolmnurga korral.

4. *Vastus:* ei.

Lahendus 1. Mängijal B ei ole võitvat strateegiat, sest mängija A võib esimesel käigul kirjutada mängija B paberile nime A, pärast seda ei ole paberitele kirjutatud nimede hulgas enam ühtegi B-d. Analoogiliselt ei ole võitvat strateegiat mängijal C.

Tõestame, et ka mängijal A ei ole võitvat strateegiat. Selleks näitame mängijate B ja C ühise strateegia, mis garanteerib, et paberile kirjutatud nimede hulgas on alati vähemalt kaks erinevat nime. Nimelt, kui A oma käigul kirjutab nime mängija B paberile, siis B kirjutab nime mängija A paberile, vastasel korral mängija C paberile. C kirjutab nime alati mängija B paberile.

Algseisus on enne A käiku nii mängija B kui mängija C paberil nimi, mis erineb A paberil olevast nimest. Seega ei saa A võita ühe käiguga. Sõltumata sellest, kas A muudab oma käiguga ühesuguseks A ja B paberitel olevad nimed või A ja C paberitel olevad nimed, on pärast B käiku mängija C paberil nimi, mis erineb A paberil olevast nimest, ja pärast C käiku taastub olukord, kus nii B kui C paberitel olevad nimed erinevad A paberil olevast nimest. Sellega kogu tsükkel kordub.

Lahendus 2. Tähistame mängijad alates mingist mängijast käimisringi järjestuses tähtedega X, Y, Z. Tõestame, et mängijad Y ja Z saavad koos alati takistada mängijat X võitmast. Tõepoolest, X saab võita ainult oma käigul, sest Y ja Z saavad alati mängida nii, et nende käik ei lõpeta mängu mängija X võiduga. Mängija X saab oma käigul võita vaid siis, kui mingi tema käigukorra ajal on tema paberil ja veel ühel paberil nimi X. Mängija Z oli eelmisel käigul võimetu seda olukorda takistama üksnes siis, kui see olukord esines juba enne tema käiku ja tema paberil oli nimi X. Sellise olukorra teket saab aga takistada mängija Y, sest tema paberil ei ole siis nime X. Järelikult ei leidu ühelgi kolmest mängijast võitvat strateegiat.

5. *Vastus:* 2008.

Kõik antud 2010-nurga sisenurgad peavad moodustuma kolmnurksete tükkide sisenurkadest. Et mis tahes kumera n-nurga sisenurkade summa on $(n-2)\cdot 180^\circ$ ja kolmnurga sisenurkade summa on 180°, siis peab kolmnurkade arv selles 2010-nurgas olema vähemalt 2008. Teiselt poolt saame mis tahes kumera 2010-nurga tükeldada 2008 kolmnurgaks, kui valime välja mingi tipu ja lõikame 2010-nurga tükkideks mööda sellest tipust lähtuvaid diagonaale.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Avame antud võrduses sulud, koondame sarnased liikmed ja jagame pooli 2-ga, sellega tekib võrdus

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + xz = 0.$$

Liites mõlemale poole xz, saame selle võrduse esitada kujul

$$(x - y + z)^2 = xz.$$

Järelikult on xz täisarvu ruut. Oletame, et arvudel x ja z on ühine tegur d. Siis xz jagub d^2-ga, ning eelneva võrduse tõttu ka $(x - y + z)^2$ jagub d^2-ga. Seega $x - y + z$ jagub d-ga. Et aga x ja z jaguvad d-ga, siis ka y jagub d-ga ehk d on arvude x, y ja z ühistegur. Järelikult $d = 1$ ehk x ja z on ühistegurita. Et xz on täisarvu ruut, siis järeldub siit, et x ja z on ka mõlemad eraldi täisarvu ruudud.

Lahendus 2. Tähistame $(y - x) - (z - y) = a$, siis antud võrdusest saame $(y^2 - x^2) - (z^2 - y^2) = a^2$. Nendest kahest võrdusest moodustame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2y - x - z = a \\ 2y^2 - x^2 - z^2 = a^2. \end{cases}$$

Avaldame esimesest võrrandist y ja asendame teise, pärast lihtsustamist saame

$$x^2 + z^2 + a^2 = 2xz + 2za + 2xa.$$

Rühmitame liikmed nii, et tekib ruutvõrrand z suhtes:

$$z^2 - 2(x + a)z + (x - a)^2 = 0,$$

selle lahendid on $z = x + a \pm 2\sqrt{xa}$. Juure all on x positiivne, järelikult ka $a \geqslant 0$. Seetõttu teiseneb lahendi avaldis kujule $z = (\sqrt{x} \pm \sqrt{a})^2$. Seega $\sqrt{z} = \sqrt{x} \pm \sqrt{a}$ ehk $\sqrt{z} - \sqrt{x} = \pm\sqrt{a}$, kust $z + x - 2\sqrt{xz} = a$. Järelikult on xz täisarvu ruut.

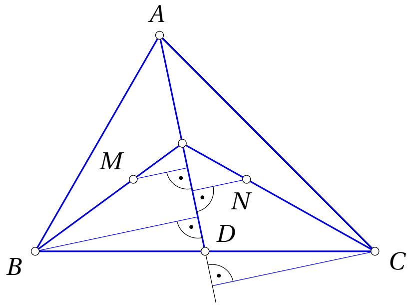
Oletame, et arvudel x ja z leidub ühine algtegur p. Siis viimase võrduse tõttu jagub a arvuga p, sest z, x ja $\sqrt{xz}$ jaguvad. Eelneva võrrandisüsteemi teisest võrrandist saame, et $2y^2$ jagub p^2-ga. Järelikult y jagub p-ga (isegi kui $p = 2$). Seega on p arvude x, y, z ühine algtegur, mis on vastuolus ülesande eeldusega. Seetõttu on x ja z ühistegurita, ja et xz on täisarvu ruut, on ka x ja z mõlemad täisarvu ruudud.

2. *Vastus:* $(0, 0)$.

Lahendus 1. Kui $m = 0$, siis omandab võrratus kuju $1 + y^n \geqslant x^n$, see võrratus kehtib kõigi positiivsete reaalarvude x ja y korral parajasti siis, kui $n = 0$. Järelikult paar $(0, 0)$ sobib. Vaatleme paare, mille mõlemad komponendid on nullist erinevad. Kui paar (m, n) rahuldab ülesande tingimusi, siis võttes x ja y asemele vastavalt $\frac{1}{x}$ ja $\frac{1}{y}$, näeme, et ka paar $(-m, -n)$ rahuldab ülesande tingimusi. Seega võime eeldada, et suurem arv paaris on positiivne. Lisaks võime üldisust kitsendamata eeldada, et $m \geqslant n$. Kui oleks $m > n$, siis võtame $x = 1$ ja saame võrratuse $1 + y^n \geqslant y^m$, mis ei kehti, kui y on piisavalt suur. Seega ainus võimalus on $m = n$. Nüüd võtame $x = y = 4$ ja saame võrratuse $2 \cdot 4^m \geqslant 4^{2m}$ ehk $2^{2m+1} \geqslant 2^{4m}$, mis ei kehti ühegi positiivse täisarvu m korral. Seega rohkem sobivaid paare ei ole.

Lahendus 2. Kui m, n on mõlemad nullid, siis võrratus ilmselt kehtib sõltumata x, y valikust. Seega $(0, 0)$ on üks sobiv arvupaar. Tõestame, et rohkem selliseid paare (m, n) ei leidu.

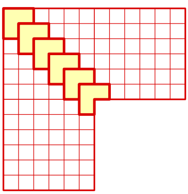
- Kui m ja n on mõlemad positiivsed, siis võtame $x = y = 3$ ja võrratus omandab kuju $3^m + 3^n \geqslant 3^n 3^m$ ehk
$$\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^m} \geqslant 1.$$
Et $3^n \geqslant 3$ ja $3^m \geqslant 3$, siis $\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^m} \leqslant \frac{2}{3}$, mistõttu nõutud võrratus ei kehti.
- Kui m ja n on mõlemad negatiivsed, siis võtame $x = y = \frac{1}{3}$, saame eelnevaga samasuguse võrratuse, kus astendajateks on positiivsed arvud $-m$ ja $-n$. Seega ka siin võrratus ei kehti.
- Ülejäänud juhtudel on kas m ja n vastandmärgilised või on üks neist null ja teine mitte. Võttes $x = \frac{1}{3}$ ja $y = 3$, saame $\frac{1}{3^m} + 3^n \geqslant \frac{3^m}{3^n}$, mis teiseneb kujule
$$\frac{1}{3^{2m-n}} + \frac{1}{3^{m-2n}} \geqslant 1;$$
võttes aga $x = 3$ ja $y = \frac{1}{3}$, jõuame sama võrratuseni, kus astendajad on asendatud vastandarvudega. Seejuures on astendajad $2m - n = m + m + (-n)$ ja $m - 2n = m + (-n) + (-n)$ (ning ka nende vastandarvud) kindlasti ühemärgilised ja nullist erinevad, sest m ja $-n$ pole vastasmärgilised ja vähemalt üks neist on nullist erinev. Seega emmalkummal juhul on mõlemad astendajad positiivsed ja me saame vastuolu samamoodi, nagu ülal vaadeldud esimeses punktis.



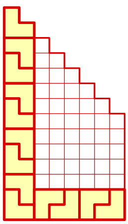
Joonis 12

3. Kolmnurkade ABD ja ACD pindalad on võrdsed, sest $|BD| = |CD|$ ja tipust A tõmmatud kõrgused ühtivad (joonis 12). Et nendel kolmnurkadel on külg AD ühine, siis on järelikult võrdsed ka vastavalt tippudest B ja C küljele AD tõmmatud kõrgused. Seega asuvad tipud B ja C sirgest AD võrdsel kaugusel. Et mediaanide lõikepunkt eraldab mediaanist osa $\frac{1}{3}$, siis on kolmnurga ABD mediaanide lõikepunktist sirgele AD tõmmatud ristlõik 3 korda lühem kui tipust B küljele AD tõmmatud kõrgus, ka kolmnurgas ACD kehtib sama seos mediaanide lõikepunktist tõmmatud ristlõigu ja tipust C tõmmatud kõrguse vahel. Järelikult on kolmnurkade ABD ja ACD mediaanide lõikepunktidest sirgele AD tõmmatud ristlõigud sama pikkusega.

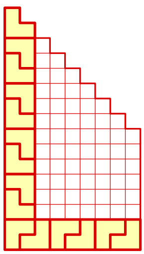
4. Eeldame, et kujund on paigutatud nii, et tema kaks pikemat külge kohtuvad üleval vasakul. Ülalt vasakult alustades paigutame kujundile diagonaalis k nurgikut samas orientatsioonis nagu terve kujund (joonis 13). Ülejääv ala jaguneb kaheks ühesuguseks trepikujuliseks osaks; piisab näidata ühe, näiteks alumise osa kaetavus. Trepil on k astet, alumine kõrgusel $k-1$ ja ülemine kõrgusel $2k-2$.



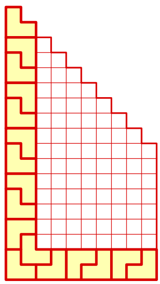
Joonis 13



Joonis 14



Joonis 15



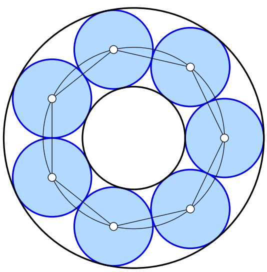
Joonis 16

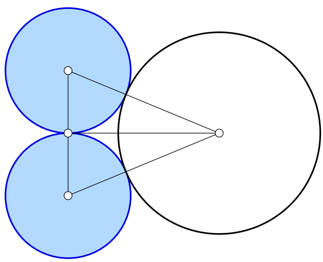
Juhul $k = 1$ on trepp tühi ja kaetav triviaalselt, juhul $k = 2$ on ta kaetav ühe nurgikuga. Eeldame, et väide kehtib k-astmelise trepi korral, ja vaatleme $k+2$ astmega treppi. Eraldame vasakust ja alumisest äärest kahe ruudu laiuse riba. Ülejääva osa saame katta induktsiooni eelduse põhjal. Riba ülemise otsa, kus asuvad astmed, katame ühe nurgikuga. Sellega jääb veel katta L-kujuline osa, mille alumises ääres on $k + 2$ ruutu ja vasakus ääres $2k$ ruutu.

- Kui k jagub 3-ga, siis tükeldame järelejäänud osa kaheks ribaks mõõtmetega $2 \times 2k$ ja $k \times 2$ ning katame mõlemad kahest nurgikust kokku pandud 2×3 ristkülikutega (joonis 14). Sellega on kogu kujund kaetud.
- Kui k annab 3-ga jagamisel jäägi 1, siis tükeldame järelejäänud osa kaheks ribaks mõõtmetega $2 \times (2k-2)$ ja $(k+2) \times 2$ ning katame mõlemad 2×3 ristkülikutega (joonis 15). See on võimalik, sest ribade küljepikkused $2k - 2$ ja $k + 2$ jaguvad 3-ga.
- Kui k annab 3-ga jagamisel jäägi 2, siis tükeldame järelejäänud osa kaheks ribaks mõõtmetega $2 \times (2k - 4)$ ja $(k - 2) \times 2$ ning nurgaosaks, mis on ülesande tingimustele vastav kujund juhul $k = 2$. Mõlemad ribad on kaetavad 2×3 ristkülikutega, sest $2k - 4$ ja $k - 2$ jaguvad 3-ga (joonis 16), nurgaosa kujutab endast ülesande nurgikut juhul $k = 2$, tema katmine on aga juba lahendatud induktsiooni baasis.

5. *Lahendus 1.* Vaatleme korrapärast n-nurka, mille tippudeks on kuulide keskpunktid (joonis 17). Selle n-nurga küljepikkus on $2r$ ja ümbermõõt seega $n \cdot 2r$. Edasi, selle n-nurga ümberringjoone raadius on $R - r$ ja ümberringjoone pikkus $2\pi(R - r)$. Et ringjoone kõõl on lühem vastavast ringjoone kaarest, siis $n \cdot 2r < 2\pi(R - r)$ ehk $nr + \pi r < \pi R$, millest $\dfrac{r}{R} < \dfrac{\pi}{n + \pi}$.

Lahendus 2. Vaatleme võrdhaarset kolmnurka, mille tippudeks on kahe naaberkuuli keskpunktid ja neile lähim punkt silindrite ühisel teljel (joonis 18). Selle kolmnurga haarade pikkus on $R - r$, aluse pikkus $2r$ ja tipunurga suurus $\dfrac{2\pi}{n}$. Alusele tõmmatud kõrgus jaotab kolmnurga kaheks


Joonis 17


Joonis 18

võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks, mille ühe kaateti pikkus on r, selle vastas asuva teravnurga suurus $\frac{\pi}{n}$ ja hüpotenuusi pikkus $R-r$. Seega $\frac{r}{R-r} = \sin\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n}$, kust saame $nr < \pi R - \pi r$, millest $\frac{r}{R} < \frac{\pi}{n+\pi}$.

Lahendused

1. *Vastus:* 1 ja kõik positiivsed paarisarvud.

Kasutame traditsioonilist tähistust $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Tähistame iga $n \geqslant 2$ korral $S_n = a_1 + \ldots + a_{n-1}$. Siis $a_n = S_n \cdot n$. Samal ajal iga $n > 2$ korral $S_n = S_{n-1} + a_{n-1} = S_{n-1} + S_{n-1} \cdot (n-1) = S_{n-1} \cdot n$. Asendades seoses $S_n = S_{n-1} \cdot n$ omakorda $S_{n-1} = S_{n-2} \cdot (n-1)$ jne järjest väiksemate indeksite jaoks, saame $S_n = S_2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \frac{n!}{2}$, sest $S_2 = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Järelikult $a_n = S_n \cdot n = n! \cdot \frac{n}{2}$ iga $n \geqslant 2$ korral. Seega kui $n \geqslant 2$, siis a_n jagub $n!$-ga parajasti paaris n korral, neile lisandub ka juht $n = 1$.

2. Eeldame, et antud ruutvõrrandi lahendid on reaalarvulised. Siis on ruutvõrrandi diskriminant mittenegatiivne, st $(a+b+c)^2 - 4k(ab+bc+ca) \geqslant 0$ ehk $k \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ca)}$. Et a, b, c on kolmnurga külgede pikkused, siis kehtivad võrratused $|a-b| < c$, $|b-c| < a$, $|c-a| < b$, mis pärast ruutu tõstmist ja sulgude avamist omandavad kuju $a^2 - 2ab + b^2 < c^2$, $b^2 - 2bc + c^2 < a^2$, $c^2 - 2ca + a^2 < b^2$. Liidame need võrratused kokku ja koondame sarnased liikmed, saame võrratuse $a^2+b^2+c^2 < 2ab+2bc+2ca$. Seega

$$k \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ca)} = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{4ab+4bc+4ca} < \frac{2ab+2bc+2ca+2ab+2bc+2ca}{4ab+4bc+4ca} = 1.$$

3. *Vastus.* Võrdus kehtib parajasti ruutude korral.

Eeldame üldisust kitsendamata, et a, b, c, d on nelinurga järjestikuste külgede pikkused. Vaadeldes diagonaali, millest ühele poole jäävad a, b ja teisele c, d, saame võrratuse $\frac{ab}{2} + \frac{cd}{2} \geqslant S$, kust $ab + cd \geqslant 2S$. Analoogiliselt saame teise diagonaali puhul $\frac{bc}{2} + \frac{da}{2} \geqslant S$, kust $bc + da \geqslant 2S$. Seega $ab + bc + cd + da \geqslant 4S$.

Teisest küljest, aritmeetilise ja geomeetrilise keskmise vaheline võrratus annab seosed $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, $b^2 + c^2 \geqslant 2bc$, $c^2 + d^2 \geqslant 2cd$, $d^2 + a^2 \geqslant 2da$, mida kokku liites saame $2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geqslant 2(ab + bc + cd + da)$. Seega $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant ab+bc+cd+da$. Kokkuvõttes saamegi nõutud võrratuse.

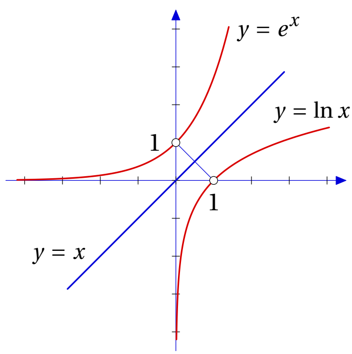
Võrdus saab kehtida ainult juhul, kui mõlemas hinnangus leiab aset võrdus. Esimeses hinnangus kehtib võrdus parajasti siis, kui kõik nurgad on suurusega 90°. Teises hinnangus kehtib võrdus parajasti siis, kui kõik küljed on võrdse pikkusega.

4. Trammide projektsioonid katavad kogu lõigu ainult siis, kui mingi ühe trammi projektsioon katab lõigu $[0; 1]$, teise projektsioon lõigu $[1; 2]$ jne kuni viimase trammi projektsioon lõigu $[n - 1; n]$. Vaatleme ajahetki, kus kõige aeglasema trammi projektsioon katab ühe neist lõikudest. Kui kõige aeglasem tramm liigub edasi 1 ühiku võrra, siis kõige kiirem ja kiiruselt kolmas tramm liiguvad edasi vastavalt n ja $n - 2$ ühiku võrra. Ühtekokku liiguvad need kaks trammi edasi $2n - 2$ ühiku võrra ehk parajasti ühe edasi-tagasi teekonna jagu.

Olles kokku liikunud edasi-tagasi teekonna jagu, kohtuvad nende trammide projektsioonid ühes ja samas ühiklõigus, kusjuures liikumissuunad on vastupidised. Pärast järgmist ringi (kahe peale kokku) kohtuvad nende projektsioonid jällegi ühes ja samas ühiklõigus vastupidiste liikumissuundadega jne. Seega iga kord, kui kõige aeglasema trammi projektsioon katab täisarvuliste otspunktidega lõigu, langevad kahe trammi projektsioonid kokku, mistõttu vähemalt üks täisarvuliste otspunktidega ühiklõik piirkonnast $[0; n]$ jääb katmata.

5. *Vastus:* $\sqrt{2}$.

Lahendus 1. Funktsioonide $y = e^x$ ja $y = \ln x$ graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes (joonis 19). Järelikult on vaadeldavate punktide vaheline kaugus minimaalne siis, kui mõlemad asuvad vastava graafiku sirgele



Joonis 19

$y = x$ lähimas punktis. Minimaalne kaugus funktsiooni $y = e^x$ graafiku ja sirge $y = x$ vahel saavutatakse graafiku selles punktis, kus puutuja on paralleelne sirgega $y = x$. Sel juhul kehtib funktsiooni $y = e^x$ korral tingimus $y' = 1$ ehk $e^x = 1$, millest $x = 0$ ja $y = 1$. Minimaalse kauguse annavad seega punktid $(0;1)$ ja $(1;0)$, nende kaugus on $\sqrt{2}$.

Lahendus 2. Iga x korral kehtib võrratus $e^x \geqslant x + 1$, sest reaalteljel nõgusa funktsiooni $y = e^x$ graafik paikneb igast oma puutujast ülalpool, sirge $y = x + 1$ aga on selle funktsiooni graafiku puutuja punktis $(0;1)$. Analoogiliselt kehtib iga x korral võrratus $\ln x \leqslant x - 1$. Seega on vaadeldavate funktsioonide graafikutel asuvate punktide kaugus alati vähemalt niisama suur kui sirgete $y = x + 1$ ja $y = x - 1$ vaheline kaugus, mis on $\sqrt{2}$. See kaugus on saavutatav punktide $(0;1)$ ja $(1;0)$ korral, mis tõesti asuvad vastavatel graafikutel.