Hindamisskeemid

1. *(Ahti Peder)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Näidatud, et $a = 10$, $b = 6$ ja $c = 15$ rahuldab ülesandes esitatud tingimusi, ning kontrollitud, et $abc = 900$: 2 p
   - Näidatud, et $abc \geqslant 900$: 5 p

2. *(Mart Abel)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Tähelepanek, et $\frac{n^2+1}{n^2-1} = 1 + \frac{2}{n^2-1}$: 1 p
   - Tõestus, et summa on suurem kui 2010: 3 p

     Sellest
     - näitamine, et $\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \frac{2}{4^2-1} > 1$ või et $\frac{2}{2^2-1} + \frac{2}{3^2-1} + \frac{2}{5^2-1} = 1$: *1 p*
     - eelmise punkti abil näitamine, et summa on suurem kui 2010: *2 p*
   - Tõestus, et summa on väiksem kui $2010\,\frac{1}{2}$: 3 p

3. *(Oleg Košik)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Näidatud sirgete AJ ja OM paralleelsus: 3 p
   - Näidatud, et $AJ \perp BK$: 3 p
   - Lõppjärelduse tegemine: 1 p

   Osades 7 punkti saanud töödes esinesid väikesed puudujäägid, mille eest otsustati punkte siiski mitte maha võtta.

4. *(Reimo Palm)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.
   - Täislahendus: 7 p
   - Muidu korrektne lahendus, aga variantide läbivaatamises esineb üksikuid puudujääke: 5–6 p
   - Esitatud õige vastus koos sobiva näitega, ülejäänud variantide mittesobivuse tõestamine algusjärgus: 3–4 p
   - Ainult õige vastus koos sobiva näitega, ülejäänud variantide mittesobivus tõestamata: 2 p

- Ainult õige vastus: 1 p

Lahenduse vormistamise puudujääkide eest võis kaotada 2 punkti.

5. *(Indrek Zolk)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täielik lahendus 7 p

Ülesanne osutus lahendajatele äärmiselt lihtsaks.

Üldjoontes võib lahendused jagada kaheks: algebralised ja geomeetrilised. Algebralistes lahendustes tähistati mõned lõigud kuusnurgas (näiteks külg, siseringjoone raadius jms) ning avaldati kuusnurga enda ja kolme eri pindalaga kolmnurkade pindalad nende lõikude pikkuste kaudu. Geomeetriliste lahenduste korral tükeldati kuusnurk sobivalt (kolmeks võrdseks rombiks, kuueks või kaheteistkümneks võrdseks kolmnurgaks vms) ning näidati, et tükkidest (neid vajadusel veel tükeldades) saab parajasti kokku panna küsitud kolm eri pindalaga kolmnurka.

Hindamisskeemid

1. *(Toomas Krips)*

Lahendus 1. Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Täheldamise eest, et arve on võimalik vaadata mooduli 8 järgi: 1 p

Vea eest täislahenduses võeti 1 punkt maha

Lahendus 2. Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähelepanek, et jada liikmetest on paarisarvud parajasti need, mille indeksid esituvad kujul $3k + 1$: 1 p
- Väide, et jada liikmed, mille indeksid on kujul $6k + 1$, jaguvad 8-ga
  - põhjenduseta: *1 p*
  - põhjendusega: *3 p*
- Väide, et jada liikmed, mille indeksid on kujul $6k + 4$, ei jagu 4-ga:
  - põhjenduseta: *1 p*
  - põhjendusega: *3 p*

2. *(Fjodor Gainullin)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähelepanek, et $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$: 1 p
- Analüüsitud juhtum $a = 2$: 2 p
- Analüüsitud juhtum $b = 2$: 2 p
- Analüüsitud juhtum $a \geqslant 3$, $b \geqslant 3$: 2 p

Ainult õige vastuse eest punkte ei antud.

3. *(Evely Leetma)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Kolmnurkade $AA'C'$, $BB'A'$ ja $CC'B'$ võrdsuse põhjendamine: 1 p
- Kolmnurga $A'B'C'$ küljepikkuse avaldamine kolmnurga ABC küljepikkuse kaudu ja/või võrdkülgse kolmnurga pindala avaldamine tema küljepikkuse kaudu: 2 p

- ∘ Koosinusteoreemi kirjapanek ning selle abil võrrandi koostamine või kolmnurga pindala avaldamine kahe külje ja nendevahelise nurga kaudu ning kolmnurga pindalade põhjal võrrandi koostamine: 1+2 p
- ∘ Tekkinud võrrandi lahendamine: 1 p

4. *(Aleksei Lissitsin)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- ∘ Näidatud, et mängijatel B ja C puudub võitev strateegia: 1 p
- ∘ Näidatud, et kui pärast A esimest käiku on mänguseis ABA, siis mängijal A ei ole võitvat strateegiat: 2 p
- ∘ Näidatud, et kui pärast A esimest käiku on mänguseis AAC, siis mängijal A ei ole võitvat strateegiat: 3 p
- ∘ Eelneva alusel õige vastuseni jõudmine: 1 p

Kui ühe juhu ABA või AAC tõestamisel oli saadud täielik võimalike käikude graaf, kuid teine juht ei olnud täielikult tehtud, siis anti mõlema rea eest kokku 4 punkti.

Žürii teises lahenduses olev märkus, et mängija võiduks tema käigul peab tema paberil ning ka mõne teise mängija paberil olema selle mängija nimi, sai mittetäieliku lahenduse puhul lisaks 1 punkti.

Kommentaar. Selle ülesande lahendamiseks oli kaks võimalust. Esimene: näidata, et mängijatel B ja C ei ole võitvat strateegiat, ning seejärel näidata, et nende mängijate koostegutsemisel ei ole mängijal A võitvat strateegiat, mis on piisavalt lihtne ülesanne. Kõik, kes proovisid seda teha, jõudsid õige lahenduseni. Teine: näidata, et selle mängu suvalisel hetkel ei ole ühtegi mängijal võitvat strateegiat, mis on võrdlemisi raske. Suurem osa sedamoodi lahendajatest ei suutnud ülesannet lõpuni viia. Üks võimalus niimodi lahendada on koostada täielik mängugraaf. Selline lahendus esines vaid kahes töös.

5. *(Uve Nummert)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- ∘ Esitatud näide tükelduse kohta 2008 kolmnurgaks (või üldjuhul n-nurga tükelduse kohta $n-2$ kolmnurgaks): 3 p
- ∘ Põhjendatud, miks vähem kui 2008 kolmnurgaks (või üldjuhul vähem kui $n-2$ kolmnurgaks) tükeldada ei saa: 4 p

  Sealhulgas:

  - mainitud, et n-nurga sisenurkade summa on $(n-2)\cdot 180^\circ$: *1 p*

Eesti LVII matemaatikaolümpiaad

20. märts 2010 Lõppvoor **11. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Kalle Kaarli)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et xz on täisarvu ruut: 4 p
- Põhjendatud, et x ja z on ühistegurita: 2 p
- Eelnevast järeldatud, et x ja z on täisarvude ruudud: 1 p

Kõige rohkem oli töid, kus esimene ja kolmas punkt olid kenasti olemas, kuid teine punkt puudus, st eeldusest $\text{SÜT}(x, y, z) = 1$ tehti väär järeldus $\text{SÜT}(x, z) = 1$. Neid lahendusi hinnati 5 punktiga.

2. *(Juhan Aru)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Juhu $m = n$ läbivaatamine: 2 p
- Juhu $m \neq n$ läbivaatamine: 5 p

  Sealhulgas:
  - m, n erimärgilised: *2 p*
  - m, n samamärgilised: *3 p*

3. *(Maksim Ivanov)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Täislahendus: 7 p
- Muidu korrektne lahendus, kus puudub ainult põhjendus, et mediaani AD keskpunkt asub küljega BC paralleelsel kesklõigul: 6 p
- Muidu korrektne lahendus, kus on ainult mitu korda valesti kasutatud kas mõisteid või teoreeme: 6 p
- Ainult põhjendatud, et nt kolmnurkade ABD ja ACD pindalad on võrdsed: 1 p
- Lahendus, kus lisaks viimasele on näidatud, et nt kolmnurga ABD mediaanide lõikepunkti kaugust sirgest BC on 3 korda lühem tipu B kaugusest sirgest BC: 3 p

4. *(Härmel Nestra)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Induktsiooni baas ehk kaks järjestikust väikest juhtu ($k = 1$, $k = 2$ või $k = 2$, $k = 3$): 1 p

- Induktsiooni samm ehk üleminek $k \to k + 2$ vastavalt jäägile mooduli 3 järgi: á 2 p

Baasi eest ei antud punkte, kui oli vaid üks juht (nt $k = 2$).

Oli ka teistsuguse ülesehitusega induktsiooniga lähenemisi nagu induktsioon sammuga 6 ja kordarvulise k juhu taandamine k teguritele, kuid need olid kas lõpule viidud või polnud peaaegu üldse progressi tehtud, mistõttu skeeme pole vaja anda.

Väheste punktidega võistlejatele anti 1 p juurde, kui oli konstruktsioon leitud lisaks induktsiooni baasjuhtudele veel vähemalt kahe suurema k jaoks, mis andsid 3-ga jagades erineva jäägi, ja oli aimata süsteemi väiksematelt nurgikutelt suurematele üleminekul.

Ülesande väite taandamise eest trepikujulise ala katmisele, mida kasutas žürii lahendus, anti samuti 1 p.

Mõtisklused ruutude arvu teemal punkte ei andnud.

5. *(Eno Tõnisson)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Muidu õige lahendus, aga pole tabatud, et kuulide keskpunkte läbiv ringjoon ongi sobiv ümberringjoon: 5 p
- Muidu õige lahendus, aga probleemid seoses sellega, et kuulide keskpunkte läbiv ringjoon ei läbi kuulide puutepunkte: 4 p
- Hulk asjassepuutuvaid seosesid, aga ilma õiget lahendusideed näitamata: 3 p
- Üksikud asjassepuutuvad seosed: 1 p

Hindamisskeemid

1. *(Jevgeni Marjušev)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Leitud seos a_n ja a_{n-1} vahel või S_n ja S_{n-1} vahel: 1 p
   - Eelneva fakti korrektne põhjendus: 2 p
   - Leitud, et $a = \dfrac{n! \cdot n}{2}$: 1 p
   - Eelneva fakti korrektne põhjendus: 2 p
   - Õige vastus: 1 p

   Tihti unustati, et $n = 1$ kuulub ka õige vastuse hulka.

2. *(Kairi Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Välja kirjutatud võrrandi diskriminant ja öeldud, et kuna on olemas reaalarvuline lahend, peab see olema mittenegatiivne: 1 p
   - Näidatud, et ülesande lahendamiseks piisaks, kui kehtiks võrratus $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$: 2 p

     Sealhulgas:
     - Teisendatud võrratus kujule $k \leqslant \dfrac{(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ac)}$ või kujule $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(2k-1)(ab + bc + ac)$: *1 p*
   - Tõestatud võrratus $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$: 4 p

   Ülesannet lahendati ka koosinusteoreemi abil või kasutades fakti, et kolmnurga küljepikkusi on võimalik esitada kujul $a = x+y$, $b = y+z$ ja $c = x+z$, kus x, y, $x > 0$. Sellised lahendused said enamasti täispunktid.

   Üks punkt võeti maha neilt, kes kirjutasid, et võrratusest $a > b - c$ järeldub $a^2 > (b-c)^2$, hoolimata sellest, et $b - c$ võib olla ka negatiivne.

3. *(Nikolai Voitsehhovski)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.
   - Korrektne tõestus: 5 p
   - Leitud, et võrdus kehtib ruutude korral: 1 p
   - Põhjendatud, et võrdus kehtib parajasti ruutude korral: 1 p

4. *(Raul Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tähelepanek, et piisab vaadelda ainult täisarvulisi ajahetki: 1 p
- Eelneva tähelepaneku korrektne põhjendus: 1 p
- Tähelepanek, et kiirustega n ja $n-2$ trammid on alati kohakuti: 2 p
- Eelneva tähelepaneku korrektne tõestus: 3 p

Osalisi punkte oli võimalik ka saada selle eest, kui näidati, et kattumine ei ole võimalik paaris/paarituarvuliste ajahetkede korral (2 punkti), ning selle eest, kui avaldati asukoht läbitud teepikkuse ja $2n-2$ jäägi kaudu (2 punkti). Tüüpiliseks veaks oli ainult täisarvuliste ajamomentide vaatlemine ilma põhjenduseta, miks muudel juhtudel ei ole kogu lõigu katmine võimalik.

5. *(Urve Kangro)* Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Pandud tähele, et graafikud on sümmeetrilised sirge $y = x$ suhtes: 1 p
- Järeldatud, et minimaalne kaugus on kahekordne ühe graafiku kaugus selle sirgeni: 2 p
- Leitud ükskõik kumma graafiku puutuja tõus ning võrdsustatud see ühega: 2 p
- Kaugus sirgeni välja arvutatud: 2 p

Alternatiivne lahendusskeem.

- Põhjendatud, et graafikutele tõmmatud puutujad peavad olema paralleelsed: 1 p
- Avaldatud graafikute vaheline kaugus ühe muutuja kaudu: 1 p
- Võetud sellest kaugusest tuletis ja võrdsustatud see nulliga: 1 p
- Võrrandi ühe lahendi leidmine: 1 p
- Näidatud, et rohkem lahendeid pole: 3 p