Lõppvoor 2009

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **9. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Oskar selgitas välja, et ümbruskonnas on haukuvaid koeri, kes ei hammusta, kolm korda rohkem kui hammustavaid koeri, kes ei haugu, ning haukuvate koerte osakaal hammustavate koerte hulgas on kaks korda suurem hammustavate koerte osakaalust haukuvate koerte hulgas. Veel leidis Oskar, et selliste koerte arv, kes nii hauguvad kui ka hammustavad, on 40% võrra väiksem nende koerte arvust, kes ei haugu ega hammusta.

Mitu protsenti Oskari ümbruskonna koertest hauguvad, kuid ei hammusta?

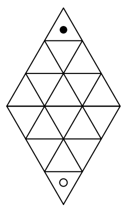
2. Kolmnurga ABC külgedel AC ja BC valitakse vastavalt punktid F ja E nii, et $2|CF| = |FA|$ ja $2|CE| = |EB|$. Kiirtel AE ja BF valitakse vastavalt punktid K ja L väljaspool kolmnurka ABC nii, et $2|KE| = |EA|$ ja $2|LF| = |FB|$. Tõesta, et nelinurk $ABKL$ on rööpkülik.

3. Nimetame naturaalarvu m *maagiliseks*, kui arvu m numbrite summa on võrdne tema numbrite korrutisega.

a) Näita, et iga $n = 1, 2, \ldots, 10$ korral leidub täpselt n-kohaline maagiline naturaalarv.

b) Tõesta, et iga naturaalarvu n korral leidub maagiline naturaalarv, mis on vähemalt n-kohaline.

4. Kahest võrdkülgsest kolmnurgast koosnev romb küljepikkusega n on jaotatud võrdkülgse kolmnurga kujulisteks mänguväljadeks küljepikkusega 1 (joonisel $n = 3$). Jukul ja Mikul on kummalgi üks nupp, mis mängu algul paiknevad üks ülemisel ja teine alumisel äärmisel väljal. Igal käigul liigutab mängija oma nupu väljalt, kus ta parajasti on, mõnele sellega ühist külge omavale väljale. Kui sellel väljal on vastase nupp, võtab mängija selle laualt ära ja on võitnud. Kui seda ei juhtu, siis võidab mängija, kes esimesena jõuab oma nupuga väljale, kus algul oli tema vastase nupp. Käiakse kordamööda, alustab Juku. Kas kellelgi mängijatest leidub võitev strateegia (st see mängija saab võita vastase suvalise vastumängu korral) ning kui jah, siis kellel?



5. Leia kõik positiivsete täisarvude paarid (m, n), mille korral ruudustikus mõõtmetega $m \times n$ on ühikruute, mis piirnevad vähemalt ühe äärega, täpselt sama palju kui ülejäänud ühikruute.

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **10. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Olgu kolmnurga nurkade suurused x, y, z kraadi.

a) Tõesta, et kui $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ on kõik ratsionaalarvud, siis x, y, z on kõik ratsionaalarvud.

b) Tõesta, et kui arvudest $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ täpselt üks on ratsionaalarv, siis x, y, z on kõik irratsionaalarvud.

2. Leia kõik positiivsete täisarvude kolmikud (x, y, z), mille korral

$$99x + 100y + 101z = 2009.$$

3. Teravnurkse kolmnurga ABC küljele AB tõmmatakse punktis B ristsirge y ning küljele AC punktis C ristsirge z. Tõesta, et sirgete y ja z lõikepunkt asub tipust A küljele BC tõmmatud ristsirgel parajasti siis, kui $|AB| = |AC|$.

4. On antud ruudustik mõõtmetega $n \times 2$, kus $n > 1$. Küljed pikkusega 2 kleebitakse kokku, nii et tekib silindri külgpind. Mari ja Jüri mängivad mängu, milles kumbki lõikab oma käigul sellest pinnast ühe algse ühikruudu välja. Käiakse kordamööda, alustab Mari. Mängija, kelle käigu tagajärjel pinna ringühendus katkeb, kaotab (ruutude kokkupuutumist ainult tippupidi ei loeta ühenduseks). Kummal mängijatest leidub võitev strateegia (st see mängija saab võita vastase suvalise vastumängu korral)?

5. Õpetaja andis Arnole ülesande valida arvu 2009^{10} positiivsete tegurite seast mõned välja nii, et ükski valitud arv ühegi teise valitud arvuga ei jaguks. Mitu tegurit saab Arno maksimaalselt välja valida?

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **11. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Positiivne täisarv n on selline, et nii $n-1$ kui ka $n+1$ on algarvud, kusjuures $n > 18$. Tõesta, et arv n jagub vähemalt 8 erineva positiivse täisarvuga.

2. Leia kõik reaalarvud k, mille korral kehtib järgmine väide: alati, kui reaalarvud a ja b rahuldavad tingimusi $0 \leqslant a \leqslant 1$ ja $0 \leqslant b \leqslant 1$, siis

$$0 \leqslant a + b - kab \leqslant 1.$$

3. Olgu $ABCD$ selline kumer nelinurk, et nurk BAC on kaks korda suurem nurgast ACD ning nurk DAC on kaks korda suurem nurgast ACB. Tõesta, et kui $|AB| = |AD|$, siis ka $|BC| = |DC|$.

4. Ruut mõõtmetega $n \times n$ jaotatakse ühikruutudeks, mis nummerdatakse mingis järjekorras arvudega 1 kuni n^2, kirjutades järjekorranumbrid vastavatesse ruutudesse. Osutub, et igas neist ühikruutudest koosnevas ristkülikus on ühe vastasnurkade paari juures nurgaruutudes olevate arvude summa võrdne teise vastasnurkade paari juures olevate arvude summaga. Leia kõik võimalused, milline saab olla $n \times n$ ruudu ühe diagonaali poolt läbitavatesse ühikruutudesse kirjutatud arvude summa.

5. Nimetame koordinaattasandi punkti *ratsionaalseks*, kui tema mõlemad koordinaadid on ratsionaalarvud, ning *irratsionaalseks*, kui tema mõlemad koordinaadid on irratsionaalarvud.

a) Kas tasandi iga punkt asub mingi kahe ratsionaalse punkti poolt määratud sirgel?

b) Kas tasandi iga punkt asub mingi kahe irratsionaalse punkti poolt määratud sirgel?

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 | Lõppvoor | **12. klass**

Lahendamisaega on 5 tundi.
Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.
Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. Suure kera sisse paigutatakse neli ühesuurust väikest kera nii, et igaüks neist puutub kolme ülejäänut ja suurt kera. Kas väikeste kerade koguruumala on võrdne neist ülejääva osaga suure kera ruumalast, sellest suurem või väiksem?

2. Olgu n mittenegatiivne täisarv, mille korral

$$3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n}$$

on täisarvu ruut. Tõesta, et n jagub 4-ga.

3. Leia kõik sellised reaalarvud a, mille korral võrrandil

$$x^3 + ax - 2(a+4) = 0$$

on täpselt kaks erinevat reaalarvulist lahendit.

4. Tõesta, et rööpküliku diagonaalide pikkuste suhe on võrdne külgede pikkuste suhtega parajasti siis, kui diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad on võrdsed rööpküliku sisenurkadega.

5. Ristkülikukujulisest ruudustikust lõigatakse välja mõned ruudud nii, et koos iga väljalõigatava ruuduga lõigatakse välja ka kõik ruudud, mis asuvad temast ülalpool samas või mõnes parempoolses veerus ning temast paremal samas reas. Seejärel kirjutatakse igasse järelejäänud ruutu arv, mis näitab, mitu järelejäänud ruutu on kokku temast ülalpool samas veerus ja temast paremal samas reas. Tõesta, et ruute, kuhu kirjutatakse paarisarv, on vähemalt sama palju kui ruute, kuhu kirjutatakse paaritu arv.

LVI Олимпиада Эстонии по математике

28 марта 2009 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Оскар выяснил, что в его окружении тех собак, которые лают, но не кусают, в три раза больше, чем тех собак, которые кусают, но не лают, а также доля лающих собак среди кусающих в два раза больше доли кусающих собак среди лающих. Ещё Оскар обнаружил, что число тех собак, которые как лают, так и кусают, на 40% меньше числа тех собак, которые не лают и не кусают. Сколько процентов собак из окружения Оскара лают, но не кусают?

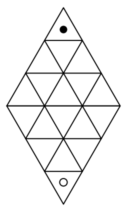
2. На сторонах AC и BC треугольника ABC выберем соответственно точки F и E так, что $2|CF| = |FA|$ и $2|CE| = |EB|$. На лучах AE и BF выберем вне треугольника ABC соответственно точки K и L так, что $2|KE| = |EA|$ и $2|LF| = |FB|$. Доказать, что четырёхугольник $ABKL$ является параллелограммом.

3. Натуральное число m назовём *магическим*, если сумма цифр числа m равна произведению его цифр.

а) Для каждого $n = 1, 2, \ldots, 10$ показать, что найдётся ровно n-значное магическое натуральное число.

б) Доказать, что для любого натурального числа n найдётся по меньшей мере n-значное магическое натуральное число.

4. Состоящий из двух равносторонних треугольников ромб с длиной стороны n поделён на игровые поля в форме равносторонних треугольников с длиной стороны 1 (на рисунке $n = 3$). У Юры и Миши по одной фишке, одна из которых в начале игры расположена на крайнем верхнем, а другая – на крайнем нижнем поле. При каждом ходе игрок передвигает свою фишку с того поля, где она находится, на имеющее общую с ним сторону другое поле. Если на этом поле оказывается фишка противника, то игрок её забирает и выигрывает. Если же этого не происходит, то выигрывает тот игрок, чья фишка первой доберётся до поля, где в начале игры была фишка противника. Ходят по очереди, начинает Юра. Найдётся ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия (т.е. этот игрок может победить при любой игре соперника) и если да, то у кого?



5. Найти все пары положительных целых чисел (m, n), при которых на квадратной доске размером $m \times n$ тех клеток, которые граничат по крайней мере с одним краем доски, ровно столько же, сколько и остальных клеток.

LVI Олимпиада Эстонии по математике

28 марта 2009 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Величины углов треугольника равны x, y, z градусов.

а) Доказать, что если все числа $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ являются рациональными, то все числа x, y, z также являются рациональными.

б) Доказать, что если ровно одно из чисел $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ является рациональным, то все числа x, y, z являются иррациональными.

2. Найти все тройки (x, y, z) положительных целых чисел, при которых

$$99x + 100y + 101z = 2009.$$

3. К стороне AB остроугольного треугольника ABC через точку B проведена перпендикулярная прямая y, а к стороне AC через точку C проведена перпендикулярная прямая z. Доказать, что точка пересечения прямых y и z лежит на перпендикулярной прямой, проведённой из вершины A к стороне BC, тогда и только тогда, когда $|AB| = |AC|$.

4. Дана клетчатая доска размером $n \times 2$, где $n > 1$. Стороны длиной 2 склеивают между собой, при этом образуется цилиндрическая поверхность. Маша и Юра начинают игру, в которой каждый игрок при своём ходе вырезает из этой поверхности одну клетку. Ходят по очереди, начинает Маша. Проигрывает тот игрок, после хода которого прерывается круговое соединение поверхности (касание клеток только в вершинах не считается соединением). У кого из игроков существует выигрышная стратегия (т.е. этот игрок может победить при любой игре соперника)?

5. Учитель дал Артёму задание выбрать среди положительных делителей числа 2009^{10} такие, чтобы никакое из выбранных чисел не делилось ни на одно другое выбранное число. Какое наибольшее количество делителей Артём может выбрать?

LVI Олимпиада Эстонии по математике

28 марта 2009 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Положительное целое число n таково, что как $n-1$, так и $n+1$ являются простыми числами, причём $n > 18$. Доказать, что число n делится по меньшей мере на 8 различных положительных целых чисел.

2. Найти все действительные числа k, для которых верно следующее утверждение: если действительные числа a и b удовлетворяют условиям $0 \leqslant a \leqslant 1$ и $0 \leqslant b \leqslant 1$, то всегда
$$0 \leqslant a + b - kab \leqslant 1.$$

3. Пусть $ABCD$ такой выпуклый четырёхугольник, что угол BAC в два раза больше угла ACD, а угол DAC в два раза больше угла ACB. Доказать, что если $|AB| = |AD|$, то и $|BC| = |DC|$.

4. Клетки квадрата $n \times n$ пронумерованы числами от 1 до n^2 в некотором порядке, причём все порядковые номера записаны в соответствующие клетки. Оказалось, что в каждом прямоугольнике, образованном из этих клеток, сумма чисел, расположенных в угловых клетках одной пары противоположных углов, равна сумме чисел, расположенных в угловых клетках другой пары противоположных углов. Найти все возможности, чему может равняться сумма чисел, записанных в клетках, лежащих на одной диагонали квадрата $n \times n$.

5. Назовём точку координатной плоскости *рациональной*, если обе её координаты являются рациональными числами, и *иррациональной*, если обе её координаты являются иррациональными числами.
   а) Лежит ли каждая точка плоскости на некоторой прямой, определённой двумя рациональными точками?
   б) Лежит ли каждая точка плоскости на некоторой прямой, определённой двумя иррациональными точками?

LVI Олимпиада Эстонии по математике

28 марта 2009 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В большой шар помещают четыре одинаковых маленьких шара так, что каждый из них касается трёх остальных и большого шара. Будет ли общий объём маленьких шаров равен объёму остальной части большого шара, больше него или меньше него?

2. Пусть n – неотрицательное целое число, при котором

$$3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n}$$

является квадратом целого числа. Доказать, что n делится на 4.

3. Найти все действительные числа a, при которых у уравнения

$$x^3 + ax - 2(a + 4) = 0$$

имеется ровно два различных действительных корня.

4. Доказать, что отношение длин диагоналей параллелограмма равно отношению длин сторон тогда и только тогда, когда углы, возникающие при пересечении диагоналей, равны внутренним углам параллелограмма.

5. Из прямоугольного клетчатого поля вырезают некоторые клетки так, что вместе с каждой вырезаемой клеткой вырезают также и все клетки, которые расположены кверху от неё в том же или более правом столбце, а также справа от неё в той же строке. После этого в каждую оставшуюся клетку записывают число, которое показывает, сколько всего оставшихся клеток находится выше неё в том же столбце и правее неё в той же строке. Доказать, что клеток, в которые записано чётное число не меньше, чем клеток, в которые записано нечётное число.

Lahendused

1. *Vastus:* 45%.

Lahendus 1. Olgu koerte koguarv k, haukuvate koerte arv a ja hammustavate koerte arv b ning olgu c nende koerte arv, kes nii hauguvad kui ka hammustavad. Siis vastavalt ülesande tingimustele $a - c = 3 \cdot (b - c)$ ning $\frac{c}{b} = 2 \cdot \frac{c}{a}$, ehk $\frac{a}{c} = 2 \cdot \frac{b}{c}$, kust $a = 2b$. Asendades selle esimesse võrdusse, saame $2b - c = 3b - 3c$, ehk $b = 2c$ ning $a = 2b = 4c$.

Ülesande viimasest tingimusest saame, et $c = \frac{3}{5} \cdot \big(k - (a + b - c)\big)$. Asendades siia eespool saadud võrdused $a = 4c$ ja $b = 2c$ saame, et $c = \frac{3}{5} \cdot (k - 5c)$, kust $c = \frac{3}{20} \cdot k$ ning $a - c = 3c = \frac{9}{20} \cdot k$. Haukuvaid koeri, kes ei hammusta, on niisiis $\frac{9}{20} \cdot 100 = 45$ protsenti kõigist Oskari ümbruskonna koertest.

Lahendus 2. Olgu hammustavate, aga mitte haukuvate koerte arv x, siis haukuvate, aga mitte hammustavate koerte arv on $3x$. Tähistame haukuvate ja hammustavate koerte arvu tähega z, siis annab ülesande teine tingimus, et $2 \cdot \frac{z}{3x + z} = \frac{z}{x + z}$. Siit järeldub, et $2x + 2z = 3x + z$, millest $z = x$. Niisiis on haukuvate ja hammustavate koerte arv samuti x.

Olgu nüüd koerte arv, kes ei hammusta ega haugu, y. Ülesande viimase tingimuse põhjal on hammustavate ja haukuvate koerte arv $0{,}6y$, millest saame $x = 0{,}6y$ ehk $3x = 1{,}8y$. Koeri on kokku

$$1{,}8y + 0{,}6y + 0{,}6y + y = 4y,$$

millest haukuvaid koeri, kes ei hammusta, on

$$\frac{1{,}8y}{4y} \cdot 100\% = 45\%.$$

2. *Lahendus 1.* Paneme tähele, et $\triangle ABF \sim \triangle CLF$ ja $\triangle ABE \sim \triangle KCE$ sarnasusteguriga 2 (joonis 1). Tõepoolest, $\angle BFA = \angle LFC$ ja $\angle BEA = \angle CEK$ (tippnurgad) ning ülesande tingimuste põhjal $|AF| = 2|CF|$, $|BE| = 2|CE|$, $|BF| = 2|LF|$ ja $|AE| = 2|KE|$. Saadud sarnasustest järeldub, et LC ja CK on paralleelsed lõiguga AB ning $2|LC| = 2|CK| = |AB|$. Seega asuvad punktid L, C ja K ühel sirgel, kusjuures $|LK| = |AB|$ ja $LK \parallel AB$. Järelikult on nelinurk $ABKL$ rööpkülik.

Lahendus 2. Vahetult ülesande tingimustest järelduvad järgmised sarnasused:

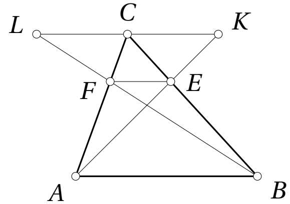
- $\triangle ABC \sim \triangle FEC$ sarnasusteguriga 3;
- $\triangle AKC \sim \triangle AEF$ sarnasusteguriga $\frac{3}{2}$;
- $\triangle BCL \sim \triangle BEF$ sarnasusteguriga $\frac{3}{2}$.

Siit järeldub, et $3|EF| = |AB|$, $\frac{3}{2}|EF| = |KC|$ ning $\frac{3}{2}|EF| = |CL|$, kusjuures lõik EF, aga siis ka lõigud KC ning CL on paralleelsed lõiguga AB. Kokkuvõttes asuvad punktid K, C ja L ühel sirgel, $KL \parallel AB$, kusjuures $|KL| = |KC| + |CK| = 3|EF| = |AB|$. Järelikult on nelinurk $ABKL$ rööpkülik.

Lahendus 3. Olgu N sirgete BC ja AL lõikepunkt, M sirgete AC ja BK lõikepunkt. Kuna $\frac{BF}{FL} = \frac{AF}{FC} = 2$, on BL ja AC kolmnurga ABN mediaanideks ning LC on küljele AB vastav kesklõik: $LC \parallel AB$ ning $|AB| = 2|LC|$. Sarnaselt on BC ja AK kolmnurga ABM mediaanideks ning CK küljele AB vasavaks kesklõiguks: $CK \parallel AB$ ning $|AB| = 2|CK|$. Seega L, C ja K asuvad ühel sirgel, $LK \parallel AB$ ning $|LK| = |AB|$. Järelikult on nelinurk $ABKL$ rööpkülik.

3. *Lahendus 1.* a) Sobivad maagilised arvud on näiteks 1, 22, 123, 1124, 11125, 111126, 1111127, 11111128, 111111129 ja 1111111144.

b) Paneme tähele, et mistahes naturaalarvust, mille numbrite korrutis on numbrite summast suurem, saame maagilise arvu, lisades sellele sobiva arvu numbreid 1. Tõepoolest, iga numbri 1 lisamine suurendab arvu numbrite summat 1 võrra, jättes numbrite korrutise muutmata. Nüüd piisab tähele panna, et mistahes naturaalarvu n korral arvu $\underbrace{22\ldots2}_{n}$ numbrite korrutis 2^n on kas võrdne numbrite summaga $2n$ (kui $n = 1$ või $n = 2$) või sellest suurem (kui $n > 2$), st sobiva arvu numbrite 1 lisamisel saame sellest vähemalt n-kohalise maagilise arvu.



Joonis 1

Lahendus 2. b) Piisab näidata, et iga maagilise naturaalarvu $m > 1$ korral leidub sellest suurema kümnendkohtade arvuga maagiline naturaalarv m'. Tõepoolest, lisame arvule m lõppu esmalt numbri 2 (sellega suureneb numbrite summa 2 võrra ja numbrite korrutis 2 korda, st vähemalt 2 võrra) ning seejärel sobiva arvu numbreid 1, nii et saame jällegi maagilise arvu.

4. *Vastus:* Jah, Jukul.

Lahendus. Paneme tähele, et teisel mängijal ei ole võimalik alustaja nuppu laualt ära võtta. Selleks värvime mängulaua väljad kahe värviga nii, et „tipuga üles" väljad on üht ja „tipuga alla" väljad teist värvi. Siis mistahes kaks ühise küljega välja on eri värvi, st igal käigul liigutatakse nupp üht värvi väljalt teist värvi väljale, ning ka mängulaua ülemine ja alumine väli, kus nupud paiknevad mängu algul, on eri värvi. Seega alustaja käigu järel on nupud sama värvi väljadel, tema vastase käigu järel aga eri värvi väljadel ning sama kordub järgnevatel käikudel. Järelikult alustaja vastane ei saa ühelgi oma käigul alustaja nuppu lüüa.

Niisiis piisab alustajal liikuda oma nupuga lühimat teed pidi mängulaua vastastippu, pööramata tähelepanu vastase käikudele. Kuna see lühim tee on mõlema mängija jaoks ühepikkune, siis jõuab alustaja oma nupuga sihile kindlasti enne kui tema vastane.

5. *Vastus:* $(5, 12)$, $(6, 8)$, $(8, 6)$, $(12, 5)$.

Kui $m = 1$ või $n = 1$, siis ruudustiku kõik ruudud piirnevad äärega, seega nõutud tingimus ei kehti.

Eeldame nüüd, et $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Ristküliku äärtega puutub kokku $2m + 2n - 4$ ruutu, ülejäänud ruutusid on aga $(m - 2)(n - 2) = mn - 2m - 2n + 4$. Ülesande tingimuse põhjal

$$2m + 2n - 4 = mn - 2m - 2n + 4,$$

mis on samaväärne võrrandiga $mn-4m-4n+8 = 0$. Liites mõlemale poole 8 ja tegurdades vasaku poole, saame võrrandi

$$(m - 4)(n - 4) = 8.$$

Seega $m - 4$ ja $n - 4$ on arvu 8 tegurid (võib-olla ka negatiivsed). Kuna $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, siis $m - 4 \geqslant -2$ ja $n - 4 \geqslant -2$. Kuid kui üks teguritest $m - 4$ ja $n - 4$ oleks -2 või -1, peaks teine olema vastavalt -4 ja -8, mis pole võimalik. Seega on $m - 4$ ja $n - 4$ siiski mõlemad positiivsed. Tekivad järgmised võimalused.

$m - 4$	$n - 4$	(m, n)
1	8	$(5, 12)$
2	4	$(6, 8)$
4	2	$(8, 6)$
8	1	$(12, 5)$

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **10. klass**

Lahendused

1. Märkame, et

$$\frac{180}{x} = \frac{x+y+z}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}. \qquad (1)$$

a) Ülesande tingimuste kohaselt $\frac{y}{x}$ ehk $\frac{1}{\frac{x}{y}}$ ja $\frac{z}{x}$ on ratsionaalarvud. Seose (1) põhjal niisiis on $\frac{180}{x}$ ratsionaalarvude summana ratsionaalarv. Järelikult x esitub kahe ratsionaalarvu suhtena ja on seega samuti ratsionaalarv. Ratsionaalarvulistest suhetest $\frac{x}{y}$ ja $\frac{z}{x}$ järeldub nüüd, et ka y ja z on ratsionaalarvud.

b) Olgu üldisust kitsendamata $\frac{x}{y}$ (seega ka $\frac{y}{x}$) ratsionaalarv ja $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ (seega ka $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$) irratsionaalarvud. Seos (1) esitab arvu $\frac{180}{x}$ kahe ratsionaalarvu ja irratsionaalarvu summana. Järelikult $\frac{180}{x}$ on irratsionaalarv, kust x on samuti irratsionaalarv. Et $\frac{x}{y}$ on ratsionaalarv, siis ka y on irratsionaalarv.

Oletame, et z on ratsionaalarv. Siis ka $x+y$ on ratsionaalarv, sest $x+y = 180-z$. Aga nüüd $\frac{x+y}{y}$ on ühelt poolt ratsionaalarvu ja irratsionaalarvu suhtena irratsionaalarv, teisalt aga esitub summana $\frac{x}{y}+1$, kus liidetavad on ratsionaalarvud, mistõttu on hoopis ratsionaalarv. Vastuolu näitab, et z peab olema irratsionaalarv.

2. *Vastus:* $(1,9,10)$, $(2,7,11)$, $(3,5,12)$, $(4,3,13)$ ning $(5,1,14)$.

Kõigepealt hindame lähtevõrrandi vasakut poolt:

$$\begin{aligned} 2009 = 99x + 100y + 101z &\leqslant 101(x+y+z), \\ 2009 = 99x + 100y + 101z &\geqslant 99(x+y+z). \end{aligned}$$

Saadud võrratused annavad, et

$$\frac{2009}{101} \leqslant x+y+z \leqslant \frac{2009}{99}.$$

Kuna $\dfrac{2009}{101} > 19$ ja $\dfrac{2009}{99} < 21$ ning $x + y + z$ on täisarv, siis $x + y + z = 20$. Kirjutame lähtevõrrandi kujul $100(x + y + z) + z - x = 2009$, siis saame, et eeldusel $x + y + z = 20$ on lähtevõrrand samaväärne tingimusega $z - x = 9$ ehk $z = x + 9$, st lähtevõrrand on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} x + y + z = 20, \\ z = x + 9. \end{cases}$$

Asetades saadud z avaldise võrdusse $x+y+z = 20$, saame $x+y+x+9 = 20$, millest $2x + y = 11$ ehk $y = 11 - 2x$. See tähendab, et lähtevõrrand on samaväärne süsteemiga

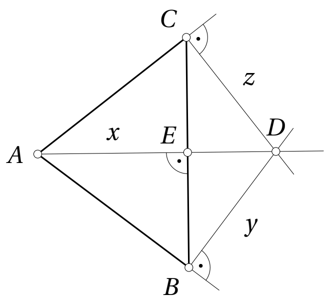
$$\begin{cases} y = 11 - 2x, \\ z = x + 9. \end{cases}$$

Kuna x ja y on positiivsed täisarvud, siis $0 < x \leqslant 5$. Vaatame läbi võimalikud variandid:

- kui $x = 1$, siis $(x, y, z) = (1, 9, 10)$;
- kui $x = 2$, siis $(x, y, z) = (2, 7, 11)$;
- kui $x = 3$, siis $(x, y, z) = (3, 5, 12)$;
- kui $x = 4$, siis $(x, y, z) = (4, 3, 13)$;
- kui $x = 5$, siis $(x, y, z) = (5, 1, 14)$.

3. *Lahendus 1.* Olgu tipust A küljele BC tõmmatud ristsirge x ning olgu E sirgete x ja BC lõikepunkt (joonis 2). Lõikugu sirged x, y ja z punktis D. Eukleidese teoreemist $|AB|^2 = |AD| \cdot |AE| = |AC|^2$, mistõttu $|AB| = |AC|$.

Vastupidi, kui $|AB| = |AC|$, siis kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A. Kõrgus AE on tipunurga poolitaja, mistõttu lõigud AB ja AC asetsevad tema suhtes sümmeetriliselt. Järelikult ka punktides B ja C tõmmatud ristsirged y ja z asetsevad sirge x suhtes sümmeetriliselt. Seega nende lõikepunktid sirgega x langevad kokku.



Joonis 2

Lahendus 2. Kehtigu eelmise lahenduse tähistused. Et AB ja BD ristuvad ja samuti AC ja CD, asuvad punktid A, B, C, D ühel ringjoonel, mille diameeter on AD. Lõik BC on selle ringjoone kõõl ja eelduse kohaselt ristub diameetriga AD; seega lõikepunkt E poolitab lõigu BC. Järelikult AE on kolmnurgas ABC nii kõrgus kui mediaan, seega $|AB| = |AC|$.

Vastupidi, kui $|AB| = |AC|$, siis $\angle ACB = \angle ABC$ ja kolmnurgas ABC langevad tipust A tõmmatud kõrgus ja nurgapoolitaja kokku. Olgu sirgete y ja z lõikepunkt F. Kuna

$$\angle BAF = \angle FCB = \frac{\pi}{2} - \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \angle CBF = \angle CAF,$$

siis AF on samuti kolmnurga ABC nurgapoolitaja. Seega sirged AF ja x ühtivad, mis tähendab, et x, y ja z lõikuvad punktis F.

4. *Vastus:* Mari, kui n on paaritu, Jüri, kui n on paaris.

Lahendus 1. Valigu kumbki mängija, kuni võimalik, alati ruute, mille väljalõikamisest ringühendus ei katke. Teistsugused strateegiad, mis tähendaksid vabatahtlikku kaotust, ilmselt paremad ei ole.

Uurime seisu enne mängu viimast käiku, s.o võitja viimase käigu järel. Vaatleme plokke 1-st või enamast järjestikusest kadunud ruudust (õigupoolest nende asukohtadest enne väljalõikamist) samas servas. Ilmselt ei saa erinevate servade äärsed plokid ulatuda üksteisega kohakuti, muidu oleks ring katkenud.

Kui ühes servas ulatub üks plokk üle terve silindri, siis teises servas on kõik ruudud alles. Sel juhul seni tehtud käikude arv on n. See tähendab, et võitja on alustaja paaritu n korral ja tema vastane paaris n korral.

Eeldame nüüd, et ükski plokk ei ulatu üle terve silindri. Paneme tähele, et plokile järgneva ruuduga kohakuti teises servas asuv ruut on alles, muidu oleks ring sellest kohast katkenud. Seega naaberplokkide vahel on vähemalt üks terve tulp. Kui terveid tulpi naaberplokkide vahel oleks rohkem, saaks teha veel ühe käigu – eemaldada ploki kõrvalt ruut nii, et see pikendaks plokki. Kui naaberplokid asuksid samas servas, saaks samuti teha veel ühe käigu – eemaldada ruut nende vahelt.

Järelikult naaberplokid on alati vastasservades, mistõttu on neid kokku paarisarv. Et nende vahel on alati üks terve tulp, on tervete tulpade arv seesama paarisarv. Eemaldatud ruutude arv on selle paarisarvu võrra n-st väiksem, st n-ga sama paarsusega. Seega siingi on viimati käinu alustaja paaritu n korral ja tema vastane paaris n korral.

Lahendus 2. Vaatleme silindri sümmeetriatasandeid, mis läbivad silindri põhjade keskpunkte; neist saab valida sellise sümmeetriatasandi p, mis läbib silindri külgpinda vähemalt ühes kohas piki ruutude piire.

Kui n on paaris, siis silindri külgpinna kummastki ruudureast jääb kummalegi poole tasandit p täisarv ruute, st tasand p läbib silindri külgpinda kahel pool piki ruutude piire. Peegeldamine tasandi p suhtes jagab seega kõik ruudud paaridesse. Olgu Jüri strateegia lõigata iga Mari käigu järel välja Mari valitud ruuduga tasandi p suhtes sümmeetriline ruut. Kui siis enne mingit Mari käiku jagunevad kõik allesolevad ruudud sümmeetrilistesse paaridesse, siis Mari käigu järel on tema valitud ruudu paariline alles, mistõttu Jüri saab strateegiat jätkata. Et Mari ja Jüri käikude tulemusel eemaldatakse parajasti üks sümmeetriline paar, siis ka enne järgmist Mari käiku jagunevad kõik allesolevad ruudud sümmeetrilistesse paaridesse. Järelikult Jüri saab oma strateegiat kasutada mängu lõpuni.

Veendume nüüd, et kui Mari mingi käik ringühendust ei katkesta, siis seda ei tee ka järgnev Jüri käik. Tõepoolest, kui Mari eemaldab ruudu, mis pole otse sümmeetriatasandi p kõrval, siis tema käigu järel on Jüri valitava ruudu ümbrus peegelpilt Mari valitud ruudu ümbrusest enne tema käiku, seega Jüri käigu mõju ei erine Mari omast. Kui aga Mari eemaldab ruudu tasandi p kõrvalt, siis sellega on Jüri valitava ruudu üks naaberruutudest äsja eemaldatud, muus osas on aga Jüri käigu ümbrus peegelpilt Mari valitud ruudu ümbrusest enne tema käiku. Seega kui ühendus katkeks, siis peaks see toimuma Mari ja Jüri eemaldatud ruutude vahelt; et aga need on eemaldatud samast reast ja teises reas on ruudud alles (muidu oleks Mari oma käiguga kaotanud), siis ühendus ei katke ka sealt.

Järelikult ringühendus katkeb Jüri sellise strateegia korral just Mari käigu järel ehk Jüri strateegia viib võiduni.

Kui n on paaritu, siis tasand p läbib silindri külgpinda ühel pool piki ruutude piire, teisel pool aga ruutude keskelt. Peegeldamine tasandi p suhtes jagab paaridesse kõik ruudud peale nende kahe, mida tasand p läbib; need on kumbki paaris iseendaga. Olgu Mari strateegia valida alguses üks neist kahest ruudust ja edasi valida Jüri viimativalitud ruuduga sümmeetriline ruut. Kui siis Jüri oma ühelgi käigul ei vali teist neist kahest ruudust, millel paariline puudub, siis analoogiliselt paaris n juhuga saab nüüd Mari oma strateegiat kasutada mängu lõpuni; kui aga Jüri valib mingil käigul paariliseta ruudu, siis ta katkestab ühenduse ja kaotab, nii et ka siis on Mari oma strateegiat lõpuni kasutanud. Analoogiliselt paaris n juhuga võidab mängu sümmeetrilisi ruute valiv mängija ehk Mari.

5. *Vastus:* 11.

Kuna $2009 = 7^2 \cdot 41$, kus 7 ja 41 on algarvud, siis on arvu 2009^{10} kõik tegurid kujul $7^n \cdot 41^m$, kus $0 \leqslant n \leqslant 20$ ja $0 \leqslant m \leqslant 10$. Et m võimalikke väärtusi on 11, siis ei saa Arno rohkem kui 11 arvu välja valida – vastasel korral oleks kahel valitud teguril arvu 41 astendaja sama (Dirichlet’ printsiip) ning neist kahest tegurist see, milles 7 astendaja on kõrgem, jaguks teisega.

Teiselt poolt näitame, et 11 teguri seas, mis on kujul $7^{20-m} \cdot 41^m$, kus $m = 0, 1, \ldots, 10$, ükski ühegi teisega ei jagu. Oletame väitevastaselt, et leiduvad erinevad m_1 ja m_2 nii, et arv $7^{20-m_1} \cdot 41^{m_1}$ jagub arvuga $7^{20-m_2} \cdot 41^{m_2}$. Siis $20 - m_1 \geqslant 20 - m_2$ ja $m_1 \geqslant m_2$. Nendest kahest võrratusest järeldub aga, et $m_1 = m_2$, vastuolu.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Näitame kõigepealt, et arv n jagub 6-ga. Kuna $n+1$ on algarv, siis $n+1$ ei jagu 2-ga ega 3-ga. Seega n jagub 2-ga. Analoogiliselt ka $n-1$ ei jagu 3-ga; et aga kolmest järjestikusest täisarvust üks jagub 3-ga, siis n jagub 3-ga. Kuna 2 ja 3 on ühistegurita, siis see annabki, et n jagub 6-ga.

   Sellest tulenevalt kuuluvad n jagajate hulka arvud 1, 2, 3, 6. Ülesande tingimuste põhjal $n > 18 = 3 \cdot 6$. Juhul $n = 5 \cdot 6 = 30$ on arvul n lisaks ülalloetletutele jagajad 5, 10, 15, 30, kokku 8 nagu tarvis. Juhud $n = 4 \cdot 6 = 24$ ja $n = 6 \cdot 6 = 36$ ei vasta ülesande tingimustele, sest $24 + 1$ ja $36 - 1$ jaguvad 5-ga. Kui $n > 6 \cdot 6$, siis $6 < \frac{n}{6}$, mistõttu arvu n jagajad $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{6}$ on senileitutest suuremad ja seega kokku leidub vähemalt 8 jagajat.

   Lahendus 2. Lähtudes n jaguvusest 6-ga, võib lahenduse lõpule viia ka järgmisel viisil, kasutades tuntud valemit, mille kohaselt n jagajate arv võrdub algarvude astendajatest kanoonilises esituses 1 võrra suuremate arvude korrutisega. Ülal saime, et n algtegurite hulka kuuluvad vähemalt 2 ja 3. Kui arvul n on veel mõni algtegur, siis on kanoonilises esituses vähemalt 3 algtegurit astendajaga vähemalt 1, mistõttu jagajate arv tuleb vähemalt $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1)$ ehk 8. Oletame nüüd, et arvul n on vaid algtegurid 2 ja 3. Arvud, kus üks neist esineb astmel 2 ja teine astmel 1, on 12 ja 18, millest n ülesande tingimuste põhjal on suurem. Järelikult peab kas üks arvudest 2 ja 3 olema astendajaga vähemalt 3 või mõlemad esinema astendajaga vähemalt 2. Esimesel juhul on jagajate arv vähemalt $(1 + 1) \cdot (3 + 1)$ ehk 8, teisel juhul vähemalt $(2 + 1) \cdot (2 + 1)$ ehk 9.

2. *Vastus:* $1 \leqslant k \leqslant 2$.

   Veendume kõigepealt, et kui arv k rahuldab tingimust $1 \leqslant k \leqslant 2$, siis ülesandes toodud väide kehtib. Olgu $0 \leqslant a, b \leqslant 1$, siis $a^2 \leqslant a$ ja $b^2 \leqslant b$. Me saame, et

$$0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \leqslant a + b - kab \leqslant$$
$$\leqslant a + b - ab = 1 - (1-a)(1-b) \leqslant 1.$$

   Veendume nüüd, et kui $k < 1$ või $k > 2$, siis ülesandes toodud väide ei kehti. Valime $a = b = 1$, siis $a + b - kab = 2 - k$, seega juhul $k < 1$ leiab aset võrratus $a - b - kab = 2 - k > 1$ ja juhul $k > 2$ leiab aset võrratus $a - b - kab = 2 - k < 0$.

3. *Lahendus 1.* Tõmbame ringjoone ω keskpunktiga A ja raadiusega AB ning pikendame lõiku AC üle punkti A kuni teistkordse lõikumiseni ringjoonega ω (joonis 3). Olgu AC ja ω lõikepunkt E. Piirde- ja kesknurga vahelisest seosest saame, et $2\angle ACD = \angle BAC = 2\angle BEC$ ning $2\angle ACB = \angle DAC = 2\angle DEC$. Oleme saanud, et $\angle ACD = \angle AEB$ ja $\angle ACB = \angle DEC$, mis tähendab, et nelinurga $BCDE$ vastasküljed on paralleelsed ehk ta on rööpkülik. Olgu selle rööpküliku diagonaalide BD ja EC lõikepunkt F.

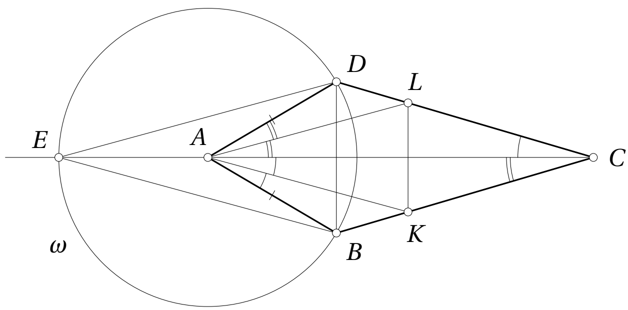
Kuna rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, on AF kolmnurga ABD mediaan. Tingimuse $|AB| = |AD|$ tõttu on AF kolmnurgas ABD seega ka nurgapoolitaja. Nüüd $\angle BAC = \angle DAC$, mistõttu ka $\angle ACD = \angle ACB$. Oleme saanud, et kolmnurgas BCD on lõik CF samal ajal mediaan ja nurgapoolitaja, järelikult $|BC| = |DC|$.

Lahendus 2. Olgu K ja L vastavalt nurga BAC poolitaja lõikepunkt küljega BC ja nurga DAC poolitaja lõikepunkt küljega DC. Et $\angle KAC = \angle LCA$, siis $AK \parallel LC$; et $\angle LAC = \angle KCA$, siis $AL \parallel KC$. Seega $AKCL$ on rööpkülik. Lõigud AC ja KL rööpküliku diagonaalidena poolitavad teineteist.

Nurgapoolitaja omadusest $\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ ja $\frac{|DL|}{|LC|} = \frac{|AD|}{|AC|}$. Et $|AB| = |AD|$, siis need suhted on võrdsed, st $\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|DL|}{|LC|}$. Seega kolmnurgad CBD ja CKL on sarnased ning $KL \parallel BD$. Kuna AC poolitab KL, siis sarnasuse tõttu ta poolitab ka BD. Edasi jätkame nagu lahenduses 1.

Lahendus 3. Olgu U sirgete BA ja CD lõikepunkt ning V sirgete DA ja CB lõikepunkt. Kuna nurk BAC on kolmnurga ACU välisnurk, siis $\angle AUC = \angle ACD$. Analoogiliselt saame, et $\angle AVC = \angle ACB$. Seega kolmnurgad CAU ja CAV on võrdhaarsed, kusjuures $|AU| = |AC| = |AV|$.

Nüüd on kolmnurgad AUD ja AVB võrdsed tunnuse KNK põhjal, niisiis on nurgad AVB ja AUD võrdsed. Lõpuks saame, et ka kolmnurgad ADC ja ABC on võrdsed tunnuse NKN põhjal, millest järeldubki tulemus $|DC| = |BC|$.



Joonis 3

4. *Vastus:* $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Lahendus 1. Tähistame $n \times n$ ruudustiku i. reas j. veerus olevat ruutu (i,j) ning sellel olevat arvu t_{ij}. Tähistame $D = t_{11} + t_{22} + \ldots + t_{nn}$ (diagonaalil asuvate arvude summa). Iga $i, j = 1, 2, \ldots, n$ korral kehtib võrdus $t_{ii} + t_{jj} = t_{ij} + t_{ji}$. Liites kokku kõik sellised võrdused, mis tekivad i ja j sõltumatust muutumisest üle arvude $1, 2, \ldots, n$ (selliseid võrdusi saame n^2 tükki), tekib vasakule $2n$-kordne diagonaali arvude summa (kummagi liidetavana esineb diagonaali iga arv täpselt n võrduses, mis teeb kokku $2n$ korda seda liidetavat), paremale aga kahekordne kõigi arvude summa (kuna iga arvu t_{kl} loetakse summasse nii $(k,l) = (i,j)$ kui ka $(k,l) = (j,i)$ juures). Kokkuvõttes

$$2nD = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n^2) = 2 \cdot \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

millest

$$D = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Lahendus 2. Kõigepealt kopeerime ruudustikust paremale täpselt samasuguse (samade arvudega) ruudustiku ning saame seega $n \times 2n$ ristküliku. Ülesandes kirjeldatud omadus kehtib kogu laiendatud pinna jaoks, sest vahetades suvalise ristküliku nurgaruudud, mis jäävad uude pinnaossa, nende originaalruutude vastu, määravad nurgaruudud algsel pinnaosal samuti ristküliku.

Tähistame laiendatud pinna i. reas j. veerus olevat ruutu (i,j) ning veendume järgnevalt, et diagonaali $\big((1,1),(2,2),\ldots,(n,n)\big)$ k-*nihetel*

$$\big((1,1+k),(2,2+k),\ldots,(n,n+k)\big)$$

(kus $k = 0, 1, \ldots, n-1$) olevate arvude summad on võrdsed.

Olgu k selline täisarv, et $0 \leqslant k < n-1$. Näitame, et diagonaali k-nihkel ja $(k+1)$-nihkel olevate arvude summad on võrdsed. Asugu k-nihke ruutudel arvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ning $(k+1)$-nihke ruutudel arvud $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Asugu ruutudel $(1, 1+k)$, $(2, 1+k)$, $(3, 1+k)$, …, $(n, 1+k)$ arvud $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$. Siis $c_1 = a_1$ ja $c_n = b_n$. Vastavalt ruudustikus kehtivale omadusele saame võrdused

$$\begin{aligned} c_1 + a_2 &= b_1 + c_2, \\ c_2 + a_3 &= b_2 + c_3, \\ c_3 + a_4 &= b_3 + c_4, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ c_{n-1} + a_n &= b_{n-1} + c_n, \end{aligned}$$

mille liitmisel ja sarnaste liikmete koondamisel selgub, et

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

On jäänud märgata, et diagonaali k-nihetel, kus $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on parajasti kõik esialgse $n \times n$ ruudustiku arvud, mille summa on

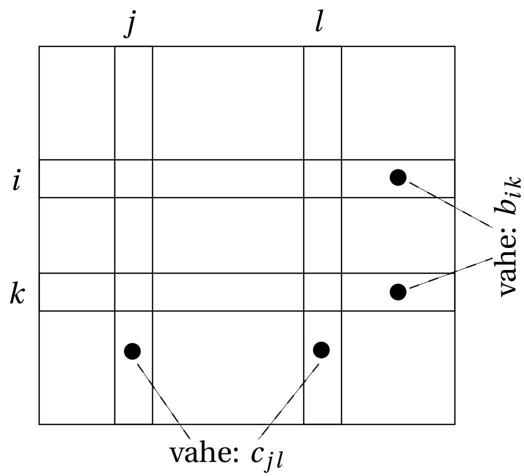
$$1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Järelikult on diagonaali igal k-nihkel, seega ka 0-nihkel ehk diagonaalil endal olevate arvude summa

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Lahendus 3. Olgu i-ndas reas ja j-ndas veerus asuvasse ruutu kirjutatud arv t_{ij}. Vastavalt ülesande tingimustele kehtib siis iga i, j, k, l jaoks $(1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n)$ $t_{ij} + t_{kl} = t_{il} + t_{kj}$ ehk $t_{ij} - t_{kj} = t_{il} - t_{kl}$. Teisisõnu, kui me võtame mingi ruudu i-ndas reas ning temaga samas veerus asuva ruudu k-ndas reas, siis nendes ruutudes asuvate arvude vahe ei sõltu sellest, millises veerus nad asuvad. Olgu $b_{ik} = t_{ij} - t_{kj}$; eelmise lause kohaselt ei sõltu see avaldis suurusest j.

Kui vahetame omavahel read ja veerud, siis võime arutada täpselt samamoodi: ülesande tingimustes antud võrdus $t_{ij} + t_{kl} = t_{il} + t_{kj}$ on samaväärne võrdusega $t_{ij} - t_{il} = t_{kj} - t_{kl}$ ehk suurus $c_{jl} = t_{ij} - t_{il}$ ei sõltu suurusest i. Arve b_{ik} ja c_{jl} illustreerib joonis 4.



Joonis 4

Olgu $A = t_{11}$, $B_i = b_{i1}$ ja $C_i = c_{i1}$. Suurused A, B_i ja C_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ määravad ära kõigi ruutude väärtused: $t_{ij} = A + B_i + C_j$. Muuhulgas võime nende suuruste kaudu avaldada ruudustiku kõigi ruutude summa S:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A + B_i + C_j) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_j\right) = \\ &= n^2 \cdot A + n \cdot \sum_{i=1}^{n} B_i + n \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i. \end{aligned}$$

Samuti võime avaldada ruudustiku peadiagonaalil olevate arvude summa d:

$$d = \sum_{i=1}^{n} t_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A + B_i + C_i) = n \cdot A + \sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{i=1}^{n} C_i \ .$$

Näeme, et $d = \dfrac{S}{n}$. Kuna $S = \sum_{i=1}^{n^2} i = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$, siis $d = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

5. *Vastus:* a) ei; b) jah.

a) Erinevad ratsionaalsed punktid $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ määravad sirge, mille võrrand on

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1),$$

millest $ax + by + c = 0$, kus $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ ja $c = y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)$ on kõik ratsionaalarvud.

Tõestame, et punkt $(x, y) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ ei rahulda võrdust $ax + by + c = 0$ ühegi ratsionaalarvukolmiku (a, b, c) korral. Tõepoolest, kui kehtiks $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c = 0$, siis saaksime, et $a\sqrt{2} = -b\sqrt{3} - c$, millest $2a^2 = 3b^2 + 2bc\sqrt{3} + c^2$, seega oleks $2bc\sqrt{3} = 2a^2 - 3b^2 - c^2$ ratsionaalarv. Järelikult $b = 0$ või $c = 0$.

Kui $b = 0$, siis $a\sqrt{2} = -c$ on ratsionaalarv. Siit on ainus võimalus, et $a = c = 0$, misjuhul punktid A ja B langeksid kokku.

Kui aga $c = 0$, siis $a\sqrt{2} = -b\sqrt{3}$. Kui $a = 0$, siis ka $b = 0$ ja vastupidi; see aga tähendaks punktide A ja B kokkulangevust. Järelikult $a, b \neq 0$ ning $-\dfrac{a}{b} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ on ratsionaalarv. Kuna $\sqrt{6}$ on irratsionaalarv, oleme jõudnud vastuoluni.

Niisiis punkt (x, y) ei asu ühegi ratsionaalsete punktide paari poolt määratud sirgel.

b) Olgu antud punkt (x, y). Vaatleme punkte $A\left(x+\alpha_1, y+\beta_1\right)$ ja $B\left(x+\alpha_2, y+\beta_2\right)$, kus

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} (1,2), & x \in \mathbb{I}, \\ \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right), & x \in \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad \left(\beta_1, \beta_2\right) = \begin{cases} (1,2), & y \in \mathbb{I}, \\ \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right), & y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Punktid A ja B on irratsionaalsed, kuna nende mõlemad koordinaadid on ratsionaal- ja irratsionaalarvu summad. Kerge on ka veenduda, et punkt (x, y) asub sirgel AB:

$$\frac{x-(x+\alpha_1)}{(x+\alpha_2)-(x+\alpha_1)} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} = -1 = \frac{-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} = \frac{y-\left(y+\beta_1\right)}{\left(y+\beta_2\right)-\left(y+\beta_1\right)}.$$

Lahendused

1. *Vastus:* väiksem.

   Lahendus 1. Oletame, et väikeste kerade koguruumala on vähemalt pool suure kera ruumalast. Olgu väikese kera raadius r ja suurel keral R. Kuna kerade ruumalad suhtuvad nagu raadiuste kuubid, siis $2 \cdot 4 \cdot r^3 \geqslant R^3$ ehk $r \geqslant \frac{R}{2}$. Võrratus $r > \frac{R}{2}$ on ilmselt võimatu, sest siis peaks suure kera keskpunkt paiknema iga väikese kera sees. Kui aga $r = \frac{R}{2}$, siis peaksid mistahes kaks väikest kera puutuma teineteist suure kera keskpunktis (st väikeste kerade omavahelised puutepunktid peaksid kõik kokku langema), mis on samuti võimatu. Seega peab väikeste kerade koguruumala olema väiksem kui pool suure kera ruumalast.

   Lahendus 2. Näitame, et väikeste kerade koguruumala on väiksem kui pool suure kera ruumalast. Olgu väikese kera raadius 1, siis suure kera raadius on $1 + a$, kus a on servapikkusega 2 korrapärase tetraeedri keskpunkti kaugus tetraeedri tippudest. Vaatleme kolmnurka mille tippudeks on vaadeldava korrapärase tetraeedri keskpunkt ja tema kaks tippu (st kahe väikese kera keskpunktid). Selle kolmnurga küljepikkused on 2, a ja a. Kolmnurga võrratuse põhjal saame, et $2a = a + a > 2$, millest $a > 1$.

   Pool suure kera ruumalast on $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1 + a)^3$, aga nelja väikese kera koguruumala on $4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1$. Kuna $a > 1$, siis $(1 + a)^3 > 8$, seetõttu $\frac{4}{3}\pi$ kordaja poole suure kera ruumala avaldises on suurem kui $\frac{4}{3}\pi$ kordaja nelja väikse kera ruumala avaldises.

   Märkus. Lahenduses 2 vaadeldud suuruse a täpne väärtus on $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. *Lahendus 1.* Tuues 3^n sulgude ette, saame

$$3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n} = 3^n \cdot \left(1 + 3 + \ldots + 3^n\right).$$

   Saadud kaks tegurit on omavahel ühistegurita, sest 3^n saab algarvudest jaguda ainult 3-ga, kuid summas $1 + 3 + \ldots + 3^n$ jaguvad kõik liidetavad 3-ga peale ühe, mistõttu summa 3-ga ei jagu. Et korrutis on täisruut, on järelikult mõlemad tegurid täisruudud.

Tegurist 3^n saame nüüd, et n on paaris. Mis puutub tegurisse $1+3+\ldots+3^n$, siis $3^2 \equiv 1 \pmod 8$ näitab, et $3^i \equiv 1 \pmod 8$, kui i on paarisarv, ja $3^i \equiv 3 \pmod 8$, kui i on paaritu arv. Järelikult selle summa liidetavaid järjest liites on vahetulemused $1, 4, 5, 0, 1, 4, 5, 0, \ldots \pmod 8$. Kuna n on paaris, siis liidetavate arv on paaritu, mistõttu arvesse tulevad ainult paarituarvulistel kohtadel paiknevad 1 ja 5. Kuid täisarvu ruut ei saa anda jääki 5 mooduli 8 järgi. Seega täisruut võib tulla ainult igal neljandal liitmisel, kus 3 astendaja jagub 4-ga.

Lahendus 2. Tegurdades ja kasutades geomeetrilise jada summa valemit, saame

$$3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n} = 3^n \cdot \left(1 + 3 + \ldots + 3^n\right) = 3^n \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Tegurid 3^n ja $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$ on ühistegurita: esimene neist jagub algarvudest vaid 3-ga, kuid teine tegur 3-ga ei jagu, sest murru lugeja 3-ga ei jagu. Analoogiliselt lahendusega 1 leiame nüüd, et n on paaris.

Oletame väitevastaselt, et n ei jagu 4-ga. Kuna n on paarisarv, siis $n \equiv 2 \pmod 4$, mistõttu $n + 1 \equiv 3 \pmod 4$. Paneme tähele, et $3^4 = 81$; et $16 \mid 80$, siis $3^4 \equiv 1 \pmod{16}$, kust $3^{n+1} \equiv 3^3 \equiv 11 \pmod{16}$ ja $3^{n+1} - 1 \equiv 10 \pmod{16}$, kust omakorda $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2} \equiv 5 \pmod 8$. Kuid täisarvu ruut ei saa anda jääki 5 mooduli 8 järgi.

Lahendus 3. Oletusest, et $n \equiv 2 \pmod 4$, võib vastuoluni jõuda ka mooduli 5 järgi arutledes. Et $5 \mid 80$, siis $3^4 \equiv 1 \pmod 5$, kust $3^{n+1} \equiv 3^3 \equiv 2 \pmod 5$ ja $3^{n+1} - 1 \equiv 1 \equiv 6 \pmod 5$, kust omakorda $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2} \equiv 3 \pmod 5$. Kuid täisarvu ruut ei saa anda jääki 3 mooduli 5 järgi.

Märkus. Näiteks juhul $n = 0$ on $3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n} = 3^0 \cdot \dfrac{3^1 - 1}{2} = 1^2$ ja juhul $n = 4$ saame $3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n} = 3^4 \cdot \dfrac{3^5 - 1}{2} = 99^2$.

3. *Vastus:* -12, -3.

Lahendus 1. Paneme tähele, et

$$x^3 + ax - 2(a + 4) = (x - 2) \cdot \left(x^2 + 2x + (a + 4)\right).$$

Järelikult arv 2 on antud kuuppolünoomi nullkoht sõltumata a valikust. Et $x - 2$ mujal nulliks ei saa, peab kuuppolünoomi teine nullkoht olema ruutkolmliikme $x^2 + 2x + (a + 4)$ nullkoht. Vaatame kahte juhtu.

Kui 2 on ka ruutkolmliikme $x^2+2x+(a+4)$ nullkoht, siis $2^2+2\cdot 2+(a+4) = 0$, kust $a = -12$. Kuna $x^2+2x-8 \neq (x-2)^2$, erineb selle ruutkolmliikme teine nullkoht arvust 2.

Kui 2 ei ole ruutkolmliikme $x^2+2x+(a+4)$ nullkoht, siis sel ruutkolmliikmel peab olema täpselt üks 2-st erinev nullkoht. Seega tema diskriminant on null ehk $4 - 4(a + 4) = 0$, kust $a = -3$. Ainsaks nullkohaks saame -1, mis tõepoolest erineb 2-st.

Järelikult ainsad võimalused on $a = -12$ ja $a = -3$.

Lahendus 2. Kuna reaalsete kordajatega polünoomil ei saa olla üks nullkoht mittereaalne ja ülejäänud nullkohad reaalsed, siis peab antud kuuppolünoomil $P(x) = x^3 + ax - 2(a + 4)$ olema täpselt kaks erinevat reaalarvulist nullkohta, kusjuures üks neist on kahekordne nullkoht. Olgu see kahekordne nullkoht x_0, siis on x_0 ka polünoomi tuletise $P'(x) = 3x^2 + a$ ühekordne nullkoht, st $3x_0^2 + a = 0$ ja $a \neq 0$. Siit $a = -3x_0^2$. Et $P(x_0) = 0$, siis saame tingimuse

$$x_0^3 + (-3x_0^2) \cdot x - 2 \cdot (-3x_0^2 + 4) = 0$$

ehk

$$-2x_0^3 + 6x_0^2 - 8 = 0,$$

millest tegurdades

$$-2(x_0 - 2)^2(x_0 + 1) = 0.$$

Järelikult saab kõnealune kahekordne nullkoht olla kas $x_0 = 2$ või $x_0 = -1$. Tingimuse $3x_0^2 + a = 0$ abil leiame nüüd ainsad võimalused $a = -12$ ja $a = -3$.

Lahendus 3. Ülesande tingimuse kohaselt saab võrrandi vasaku poole kirjutada kujul $(x - x_0)^2(x - x_1)$, kus x_0 ja x_1 on teatud erinevad reaalarvud. Polünoomi kahe kuju kordajate võrdlemisest

$$\begin{aligned} x^3 + ax - 2(a + 4) &= (x - x_0)^2(x - x_1) = (x^2 - 2xx_0 + x_0^2)(x - x_1) = \\ &= x^3 - (2x_0 + x_1)x^2 + (2x_0x_1 + x_0^2)x - x_0^2x_1 \end{aligned}$$

saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x_0 + x_1 = 0, \\ 2x_0x_1 + x_0^2 = a, \\ -x_0^2x_1 = -2(a + 4). \end{cases}$$

Kirjutades esimese võrrandi põhjal $x_1 = -2x_0$ ning asendades x_1 teise võrrandisse, saame seose $-3x_0^2 = a$. Paigutades nüüd a avaldise kolmandasse võrrandisse, tekib x_0 suhtes kuupvõrrand

$$-2x_0^3 + 6x_0^2 - 8 = 0.$$

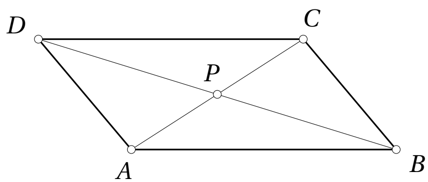
Lahenduse viime lõpule samal viisil nagu eelmises lahenduses.

4. *Lahendus 1.* Olgu P rööpküliku $ABCD$ diagonaalide AC ja BD lõikepunkt (joonis 5). Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis võrdus $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ on samaväärne võrdusega $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|PD|}$. Rakendades siinusteoreemi kolmnurgas BCD saame, et $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}$, ning siinusteoreemist kolmnurgas CPD saame, et $\frac{|CP|}{|PD|} = \frac{\sin\angle PDC}{\sin\angle PCD} = \frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle PCD}$. Seega $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|PD|}$ parajasti siis, kui $\sin\angle CBD = \sin\angle PCD$. Kolmnurgast BCD näeme, et $\angle CBD + \angle PCD < 180^\circ$, seega $\sin\angle CBD = \sin\angle PCD$ on samaväärne sellega, et $\angle CBD = \angle PCD$. Et kolmnurkadel CPD ja BCD on ühine nurk $\angle PDC = \angle BDC$, siis on see omakorda samaväärne sellega, et $\angle CPD = \angle BCD$.

Kokkuvõttes leidsime, et võrdus $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ on samaväärne võrdusega $\angle CPD = \angle BCD$. Analoogiliselt saame näidata, et võrdus $\frac{|DC|}{|CB|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ on samaväärne võrdusega $\angle CPB = \angle BCD$, st rööpküliku diagonaalide pikkuste suhe langeb kokku külgede pikkuste suhtega siis ja ainult siis, kui diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad on võrdsed rööpküliku sisenurkadega.

Lahendus 2. Olgu P rööpküliku $ABCD$ diagonaalide AC ja BD lõikepunkt, ning olgu selle rööpküliku diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad võrdsed rööpküliku sisenurkadega. Üldisust kitsendamata olgu $\angle CPD = \angle BCD$ (kui $\angle CPB = \angle BCD$, siis vahetame tippude B ja D tähistused). Et kolmnurkades BCD ja CPD on $\angle BDC = \angle CDP$ ning $\angle CPD = \angle BCD$, siis need kolmnurgad on sarnased, mistõttu $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|PD|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ (viimane võrdus kehtib seetõttu, et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist), st rööpküliku $ABCD$ diagonaalide pikkuste suhe on võrdne külgede pikkuste suhtega.

Olgu nüüd rööpküliku $ABCD$ diagonaalide pikkuste suhe võrdne külgede pikkuste suhtega. Üldisust kitsendamata olgu $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ (vastasel



Joonis 5

korral vahetame jällegi tippude B ja D tähistused), siis $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|PD|}$. Et kolmnurkadel CPD ja BCD on ühine nurk tipu D juures, siis juhul, kui kolmnurgad BCD ja CPD ei ole sarnased, peab (et ei kehtiks sarnasuse tunnus KKN) sirgel CD leiduma selline punkt E, et $|CP| = |PE|$ ja kolmnurgad BCD ja EPD on sarnased. Sel juhul asuvad punktid B, C, P ja E ühel ringjoonel, mis tähendab, et B asub kolmnurga CEP ümberringjoonel. Teisest küljest, kuna $|PE| = |PC|$ ning punkt D asub sirgel CE, peab sirge DP ja kolmnurga CEP ümberringjoone teine lõikepunkt asuma P ja D vahel. Seega ei saa see lõikepunkt olla B, sest P on lõigu BD keskpunkt. Saadud vastuolu näitab, et kolmnurgad BCD ja CPD peavad olema sarnased ning $\angle CPD = \angle BCD$, st rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad on võrdsed selle rööpküliku sisenurkadega.

Lahendus 3. Olgu P rööpküliku $ABCD$ diagonaalide AC ja BD lõikepunkt ning olgu $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |AD|$ ja $d = |BD|$, $e = |AC|$. Näitame, et $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ siis ja ainult siis, kui $\angle BCD = \angle CPD$ (analoogiliselt saab näidata, et $\frac{a}{b} = \frac{e}{d}$ siis ja ainult siis, kui $\angle BCD = \angle CPB$).

Rööpkülikus kehtib võrdus $2(a^2+b^2) = d^2+e^2$, ehk $2a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = d^2\left(1+\frac{e^2}{d^2}\right)$ (selle võrduse kehtivus järeldub koosinusteoreemist kolmnurkades ABC ja BCD). Seega on võrdus $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ siin samaväärne võrdusega $2a^2 = d^2$. Võrdused $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ ja $2a^2 = d^2$ on aga omakorda samaväärsed võrdustega $\frac{2b}{e} = \frac{2a}{d} = \frac{d}{a}$, ehk sellega, et kolmnurk BCD küljepikkustega b, a ja d ning kolmnurk CPD küljepikkustega $\frac{e}{2}$, $\frac{d}{2}$ ja a on sarnased, ehk $\angle BCD = \angle CPD$.

Märkus. Kerkib küsimus, kuidas konstrueerida selliseid rööpkülikuid, mille külgede suhe langeb kokku diagonaalide suhtega. Fikseerime rööpküliku ühe külje a ning selle lähisnurga α ning otsime rööpküliku teist külge b selliselt, et külgede suhe võrduks diagonaalide suhtega, st $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$. Rööpküliku võrdusest ja koosinusteoreemist saame tingimused

$$\begin{cases} 2a^2 + 2b^2 = \dfrac{a^2}{b^2}e^2 + e^2, \\ e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \end{cases}$$

Nendest tingimustest saame ruutvõrrandi $b^2 + (2a\cos\alpha)\,b - a^2 = 0$, mille positiivne lahend on $b = a\sqrt{1+\cos^2\alpha} - a\cos\alpha$.

5. Vaatleme ruudustikku, kust on mõned ruudud ülesande tingimuste kohaselt välja lõigatud ning järelejäänud ruutudesse ülesandes kirjeldatud arvud kirjutatud.

Veendume, et korraga täpselt kahe kõrvutise ruudu eemaldamine, kui selle tagajärjel on tulemuseks jälle ülesande tingimustele vastav seis ning arvud ruutudes on vastavalt muudetud, vähendab nii paaris- kui paaritute arvude kogust täpselt 1 võrra. Tõepoolest, kui eemaldame kaks samas reas asuvat ruutu, ei tohi nende ruutude kohal olla alles ühtki ruutu ja nende ruutude all peavad olema kõik ruudud alles. Selles reas, kust me kaks ruutu eemaldame, vähenevad ülejäänud ruutudesse kirjutatud arvud kahe võrra (st paarsus ei muutu). Eemaldatavate ruutude all peavad olema igas reas üks paaritu ja üks paarisarv, sest nende kohal on ühepalju ruute ja paremal olevate ruutude arv erineb ühe võrra. Pärast eemaldamist muutub paarisarv paarituks ja vastupidi, seega allesjäänud ruutudes paaritute arvude koguarv ja paarisarvude koguarv ei muutu. Eemaldatud ruutudes olid arvud 0 ja 1, mis on eri paarsusega, seega kokkuvõttes sai kumbagi sorti arve 1 võrra vähem. Analoogiliselt arutleme juhul, kui eemaldame kaks kõrvutist samas veerus asuvat ruutu.

Pärast ruutude kahekaupa eemaldamist, kuni see enam pole võimalik, jõuame üheni järgmisest kahest seisust.

- Seis, kus pole ühtki ruutu; sellises seisus pole ühtki paaritut ega paarisarvu, seega paarisarve on vähemalt sama palju kui paarituid.
- Seis, kus on k rida ($k \geqslant 1$), kusjuures kõige ülemises reas on 1 ruut, järgmises reas 2 ruutu jne. kuni kõige alumises reas on k ruutu. Nüüd kõige ülemise rea ruutu on kirjutatud arv 0, järgmise rea ruutudesse 2 ja 0, ülalt kolmanda rea ruutudesse 4, 2 ja 0 jne. Niisiis taolise „trepi" kõikidesse ruutudesse on kirjutatud paarisarv, seega selles seisus on paarisarve vähemalt sama palju kui paarituid.

Et ruutude kahekaupa eemaldamisel jäi paarisarve ja paarituid arve samavõrra vähemaks, pidi ka algseisus olema paarisarve vähemalt sama palju kui paarituid.

Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **9. klass**

Hindamisskeemid

1. *(Hannes Jukk)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Pole saadud aru, kuidas küla koerad jaotuvad sisuliselt nelja rühma – tavaliselt ei saadud aru, et neljas rühm moodustub mittehaukuvatest koertest, kes ei hammusta: 0 p
- Saadud aru ja tähistatud neli koerte rühma ning koostatud mõned õiged seosed vastavalt ülesande tekstile: 1 p
- Tingimuses „selliste koerte arv, kes nii hauguvad kui ka hammustavad (x), on 40% võrra väiksem nende koerte arvust, kes ei haugu ega hammusta (y)” pole arvestatud õigesti tervikut ja on pakutud, et $y = 1{,}4x$, mitte $x = 0{,}6y$: 4 p
- Osade vahelised seosed leitud õigesti, kuid pole suudetud leida õiget avaldist viimasele küsimusele vastamiseks: 5 p
- Kuskil tehtud tehniline arvutusviga, kuid lahendusidee ja muud arvutused õigesti teostatud – nt jagatud kaks murdu valesti: 6 p
- Täielik lahendus. 7 p

Valdavalt kenasti lahendatud. Esines näitelahendusest mõnevõrra erinevaid (koerte rühmade tähistamisel) ja paar pigem rohkem erinevat lahendust.

Üks viga, mille eest punkte maha ei arvestatud, oli siiski õige mitmel õpilasel. Lahenduses tekkis olukord, kus oli vaja lahendada ruutvõrrand $y^2 = xy$, mille pooli jagati suurusega y. Siin ei pandud tähele, et ruutvõrrandil on tegelikult veel üks lahend $y = 0$, mis ei oma küll sisulist tähendust.

2. *(Juhan Aru)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Märgatud kolmnurkade CEK ja BEA, CFL ja AFB või CFE ja ACB sarnasust: 2 p
- Tõestatud väide eeldusel $|OB| = 3|OF|$: 2 p
- Täielik lahendus pisiveaga (vt. kommentaar): 6 p
- Täielik lahendus: 7 p

Põhiline pisiviga: nurkade EKC ja EAB võrdsusest järeldati, et $LK \parallel AB$, kusjuures tegelikult järeldub vaid, et $CK \parallel AB$. Et kehtiks ka $AB \parallel LK$, peavad L, C ja K asuma ühel sirgel. See järeldub näiteks tähelepanekust, et ka $CL \parallel AB$.

3. *(Uve Nummert)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 3 p

  Sealhulgas

  - Juht $n = 1$ ja vähemalt üks juht $n = 2, \ldots, 9$: *1 p*
  - *Kõik* ülejäänud juhud $n = 2, \ldots, 9$: *1 p*
  - Juht $n = 10$: *1 p*
- b)-osa: 4 p

  Sealhulgas

  - Idee lähtuda arvust, mille numbrite korrutis on suurem numbrite summast, ja lisada sellele numbreid 1: *2 p*
  - Arutluse lõpuleviimine: *2 p*

4. *(Konstantin Tretjakov)*

Korrektseks lahenduseks loeti ainult selline lahendus, mis ühel või teisel viisil mainis asjaolu, et Miku ei saa mitte mingil viisil Juku nuppu ära võtta. Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Antud asjaolu oli mainitud, kuid polnud põhjendatud: 2 p
- Antud asjaolu põhjendus kasutas väidet, et „nuppude vaheline kaugus on paarisarv”, kuid kuidas seda kaugust arvutada ning miks see nii on, polnud selgitanud: 4 p
- Täielik lahendus: 7 p

Täielikuks lahenduseks loeti selline lahendus, milles oli selgelt näidatud, miks Juku saab võita Miku suvalise strateegia puhul. Need lahendused, milles vaadati läbi ainult alamhulk võimalikke Miku strateegiaid (enamasti „minna otse” ja „oodata oma algpunkti juures”), punkte ei saanud.

5. *(Reimo Palm)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud äärtega piirnevate ruutude arv ristkülikus: 1 p
- Leitud ristküliku ülejäänud ruutude arv: 1 p
- Kirjutatud välja võrrand ja leitud selle lahendid: 5 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:

  - kirjutatud välja ainult kahe avaldise vaheline võrdus: *0 p*
  - võrduses sarnased liikmed kokku võetud, nt saadud võrrand $mn - 4m - 4n + 8 = 0$: *1 p*

- viidud võrrand kujule $(m-4)(n-4)=8$: *3 p*
- leitud võrrandi lahendid, aga variantide läbivaatus mittetäielik (nt proovimata negatiivsed tegurid või vaadeldutest suuremad arvud), või täielikkuse põhjendus puudulik: *3–4 p*
- leitud võrrandi lahendid, kõik variandid ammendatud: *5 p*

Hindamisskeemid

1. *(Jevgeni Martjušev)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Ülesande a)-osa: 3 p

  Sealhulgas

  - Tõestus, et kõik kolm arvu (x, y, z) on korraga kas ratsionaalsed või irratsionaalsed: *0 p*
- Ülesande b)-osa: 4 p

  Sealhulgas 1. lahenduskäigu korral

  - Kahe arvu ratsionaalsus on tõestatud: *2 p*
  - Kolmanda arvu ratsionaalsus on tõestatud: *2 p*

  2. lahenduskäigu korral (arvestades, et $\frac{x}{y}$ on ratsionaalarv)

  - Juhtum, kui nii x, kui ka y on ratsionaalsed: *2 p*
  - Juhtum, kui nii x, kui ka y on irratsionaalsed: *2 p*

Mõned õpilased arvasid ekslikult, et irratsionaalarv on arv kujul $a\sqrt{b}$, kus a ja b on ratsionaalarvud.

2. *(Aleksei Lissitsin)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $x + y + z = 20$: 4 p
- Siit järeldatud, et $z - x = 9$: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Ainult õige vastuse eest anti 1 punkt.

Mõned lahendajad hakkasid tegema suhteliselt pika läbivaatusega. Reeglina selline lähenemine ei ole edukas, sest mõned juhud jäävad läbi vaatamata. Sellised lahendused said tavaliselt mitte rohkem kui 2 punkti.

3. *(Laur Tooming)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kui need kolm sirget lõikuvad ühes punktis, siis $|AB| = |AC|$: 4 p

Sealhulgas

- Arvutatud lõikude suhteid või leitud sarnaseid kolmnurki: *1 p*
- Kasutatud Eukleidese teoreemi: *2 p*
- Tehtud mõni kasulik lisakonstruktsioon, näiteks joonestatud kolmnurga ABC kõrgused, külgede keskristsirged või ümberringjoon või konstrueeritud kolmnurk, mille kõrgusteks või külgede keskristsirgeteks on sirged y ja z: *2 p*

◦ Tõestatud eelmise pöördteoreem: 3 p

Mõlema osa eest kaotati 1 punkt, kui puudu oli üks lihtne samm või põhjendamata lihtsalt põhjendatav geomeetriline väide, ning 2 punkti, kui selliseid lihtaid samme oli mitu.

Mitmed õpilased kaotasid 3 punkti, jättes tõestamata lihtsama pöördteoreemi.

4. *(Härmel Nestra)*

Mõlema skeemi korral lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Lahendus võitja viimase käigu järel tekkiva seisu analüüsiga (nagu žürii lahenduses).

◦ Selgitus, et järelejäänud ruudud moodustavad „ussi" laiusega 1 ruut: 2 p
◦ Selgitus, et uss teeb paarisarvu „jõnkse": 1 p
◦ Eemaldatud ruutude arvu paarsuse analüüs: 3 p
◦ Võitja järeldamine: 1 p

Lahendus sümmeetrilisusstrateegia abil.

◦ Strateegia kirjeldus: 2 p
◦ Tõestus, et strateegiat on võimalik järgida: 2 p
◦ Tõestus, et strateegia on võitev: 3 p

Õige vastus ega väikeste juhtude läbivaatus punkte ei andnud.

Punkte kaotati tihti lihtsalt sellepärast, et väiteid polnud ammendavalt põhjendatud, kuigi lahendusidee oli olemas. Näiteks mitmed žürii lahenduse moodi teinud võtsid lihtsalt laest, et tekib „uss", või põhjendasid seda väga ebamääraselt; siis anti selle osa 2 punktist vastavalt 0 või 1.

Eriti ebamääraselt olid aga kirjas kõik lahendused sümmeetriastrateegia abil. Sellises lahenduses tuleb lisaks strateegia kirjeldamisele näidata esiteks, et seda on üldse võimalik rakendada, ja teiseks, et see on võitev. Rakenduse võimalikkuse jaoks tuleb märgata, et ruudud jagunevad sümmeetrilisteks paarideks ja et seni, kuni seda strateegiat rakendatakse, on iga teise käigu järel seis sümmeetriline, nii et strateegiat saab edasi rakendada. Võitvuse jaoks on vaja näidata, et vastase käik ei muuda mängija sümmeetrilist käiku kaotavaks – see pole ilmne, kui vastane käib otse sümmeetriatelje kõrvale. Need kaalutlused olid alati puudu ja seetõttu saadi sümmeetriaga lahenduste eest väga vähe punkte.

5. *(Hendrik Nigul)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näitamine, et üle 11 teguri ei saa valida: 4 p

  Sealhulgas

  - Arvu 2009^{10} tegurdamine: *1 p*
- Sobiva 11 teguri leidmine: 3 p

Suur osa õpilasi vaatles võimalike teguritena vaid algtegureid (või nende astmeid). Sel juhul leiti, et valida saab vaid 2 tegurit. Sellised tööd said tüüpiliselt ülimalt 1 punkti.

Paljudel õpilastel oli siiski leitud õige vastus ning sobiv näide 11 teguriga. Punkte võis kaotada ebapiisava või puuduva põhjenduse eest, et rohkem tegureid valida ei õnnestu.

Hindamisskeemid

1. *(Ahti Peder)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et n jagub 1-ga ja 6-ga: 1 p
- Näidatud, et n jagub arvudega 2, 3 ja 6: 3 p
- Näidatud, et väide kehtib juhul $n \leqslant 36$: 1 p
- Näidatud, et juhul $n > 36$ on jagajateks ka $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ ja $\frac{n}{6}$: 2 p

Ülesanne osutus lihtsaks. Mõnedel juhtudel ei põhjendatud, et jagajad $1, 2, 3, 6, n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$ on kõik erinevad. Selline lahendus andis maksimaalselt 5 punkti.

2. *(Mati Abel)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Alustatud uurimist: 1 p
- Midagi arukat tehtud või kirjutatud vaid vastus: 2 p
- Leitud piirid, mille vahel paikneb k, kuid ei ole üle mindud arvväärtustele: 3 p
- Saadud õige piirkond, kuid kusagil tehtud viga: 4 p
- Saadud õige piirkond, kuid ei ole uuritud, mis juhtub väljaspool piirkonda: 5 p
- On saadud õige vastus ja väidetud, et $k < 0$ ei saa kehtida: 6 p
- Täielik lahendus: 7 p

3. *(Maksim Ivanov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lisakonstruktsiooni kasutamine (kas nurkade BAC ja DAC nurgapoolitajate või ringjoone keskpunktiga A ja raadiusega $AB = AD$ joonestamine): 1 p
- Tõestatud, et lisakonstruktsiooni tulemusena tekib rööpkülik: 1 p
- Tõestatud, et diagonaal AC jaotab nelinurga $ABCD$ vastavad sisenurgad pooleks: 4 p
- Tõestatud, et $BC = DC$: 1 p

4. *(Peeter Laud)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Ainult vastus: 1 p
- Vastus, ühes summa $1 + \cdots + n^2$ arvutamisega: 1 p
- Uuritud ainult juhtu, kus ruudustik on arvudega täidetud järjest: 1 p
- Lahendatud ülesanne ainult mingite fikseeritud n-ide jaoks, mille korral pole ülesanne enam triviaalne ($n \geqslant 5$): 3 p
- Märgatud, et ruudustikus olevad väärtused on üheselt määratud arvuga a_{11} ruudustiku ülemises vasakus nurgas ning arvudega $b_1 = 0, b_2, \ldots, b_n$ ja $c_1 = 0, c_2, \ldots, c_n$, nii et $a_{kl} = a_{11} + b_k + c_l$: 3 p
- Täielik lahendus: 7 p

5. *(Vladimir Kutšmei)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- a)-osa: 3 p

  Sealhulgas
  - Lahendus on toodud vaid kujul $y = kx$ olevate sirgete jaoks: *1 p*
  - Lahendus on toodud kujul $y = kx + b$ olevate sirgete jaoks: *2 p*
- b)-osa: 4 p

  Sealhulgas
  - Lahendus töötab juhul, kui mõlemad punkti koordinaadid on nullist erinevad: *3 p*

Hindamisskeemid

1. *(Elts Abel)*

Mõlema skeemi korral lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Traditsiooniline lahendus.

- Idee vaadelda väikeste kerade keskpunktide ühendamisel tekkinud tetraeedrit: 1 p
- Näidatud võimalus suure kera raadiuse avaldamiseks väikese kera raadiuse kaudu: 1 p
- Avaldatud väikese kera ja suure kera keskpunkte ühendava lõigu pikkus väiksema kera raadiuse kaudu: 2 p
- Leitud suure ja väikese kera raadiuste vaheline seos: 1 p
- Avaldatud kerade ruumaalad: 1 p
- Näidatud, et väikeste kerade koguruumla on väiksem ülejäänud ruumalast: 1 p

Lahendus raadiuste võrdlemise abil.

- Näidatud, et väiksema kera raadius ei saa olla suurem suure kera poolest raadiusest: 5 p
- Avaldatud kerade ruumalad: 1 p
- Näidatud, et väikeste kerade koguruumala on väiksem ülejäänud ruumalast: 1 p

Lahendus raadiuste võrdlemise abil esines vaid ühes töös.

2. *(Meelis Kull)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Korrektselt rakendatud geomeetrilise jada summa valemit: 1 p
- Tõestatud, et n on paaris: 2 p
- Idee uurida avaldise väärtust mooduli 5 või 8 järgi: 2 p
- Tõestuse lõpule viimine: 2 p

Lahendustes, kus geomeetrilise jada summa valemit ei kasutata, on tõestuse lõpule viimine väärt 3 punkti.

3. *(Indrek Zolk)*

Kõigi skeemide korral lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem žürii lahenduse 1 järgi.

- Lähtevõrrandi vasaku poole tegurdamine ning sedastamine, et $x = 2$ on igal juhul lähtevõrrandi lahend: 3 p
- Vaadeldud juht, kus ülejäänud kaks lahendit on võrdsed ja erinevad arvust 2: 2 p
- Vaadeldud juht, kus ülejäänud kaks lahendit on erinevad ning üks neist võrdub arvuga 2: 2 p

Skeem žürii lahenduse 2 järgi.

- Selgitatud, et lähtevõrrandi kahekordne nullkoht x_0 on ka tuletise nullkoht ning tuletatud seos $a = -3x_0^2$: 3 p
- Lahendus lõpule viidud: 4 p

Skeem lahenduste järgi, mis kasutavad kuju $f(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)$ või uurivad funktsiooni $f(x) = x^3 - ax$ ekstreemume ning tuletavad lahendamiseks vajalikud tingimused polünoomi kordajate võrdlemise teel.

- Ülesande tingimustest tuletatud polünoomi ja lähtevõrrandi vasaku poole kordajate võrdlemine: 3 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 4 p

Ülesandel leidus kaks lisalahendust:

- ülesande tingimuse põhjal kirjutada võrrandi vasak pool välja polünoomina $(x - x_1)^2(x - x_2)$ (kus $x_1 \neq x_2$), võrrelda selle polünoomi ja lähtevõrrandi kordajaid ning seeläbi leida x_1, x_2 ja a kõik võimalikud väärtused;
- panna tähele, et ülesande tingimuse rahuldamiseks peab võrrandi vasak pool olema polünoomi $f(x) = x^3 + ax$ $(a < 0)$ selline nihe y-telje suunas, kus x-telg osutub polünoomi f graafiku puutujaks; leida polünoomi f ekstreemumpunktid ning panna tähele, et nihke väärtus võrdub f väärtusega ekstreemumpunktis.

4. *(Heiki Niglas)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Vastavate nurkade võrdsusest oli järeldatud vastav külgede ja diagonaalide suhete võrdus: 3 p
- Diagonaalide ja külgede suhete võrduse põhjal tõestatud vastavate nurkade võrdus: 4 p

Seose $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$ eest anti 1 punkt. Mõned õpilased olid valesti järeldanud kahe paari külgede suhete võrdusest ja ühe ühise nurga olemasolust kolmnurkade sarnasuse, aga seda tunnust saab kasutada vaid siis, kui mõlemad vaadeldavad küljed on selle nurga lähisküljed.

5. *(Oleg Košik)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Vaadeldud ainut erijuht, kus suurest ristkülikust on välja lõigatud väiksem ristkülik: 0 p
- On tehtud mõtestatud katse vaadelda äralõikamisi/juurdepanekuid, mille tulemusena paaritute ja paarisarvude vahe oleks (pool)invariant: 1 p

Üksikud lahendajad said ülesande tekstist valesti aru ning arvasid, et koos äralõigatava ruuduga lõigatakse lisaks ära ainult samas reas ja samas veerus asuvad ruudud.