LVI Олимпиада Эстонии по математике

28 марта 2009 г. Заключительный тур **9 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Оскар выяснил, что в его окружении тех собак, которые лают, но не кусают, в три раза больше, чем тех собак, которые кусают, но не лают, а также доля лающих собак среди кусающих в два раза больше доли кусающих собак среди лающих. Ещё Оскар обнаружил, что число тех собак, которые как лают, так и кусают, на 40% меньше числа тех собак, которые не лают и не кусают. Сколько процентов собак из окружения Оскара лают, но не кусают?

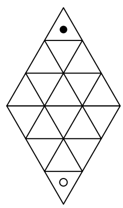
2. На сторонах AC и BC треугольника ABC выберем соответственно точки F и E так, что $2|CF| = |FA|$ и $2|CE| = |EB|$. На лучах AE и BF выберем вне треугольника ABC соответственно точки K и L так, что $2|KE| = |EA|$ и $2|LF| = |FB|$. Доказать, что четырёхугольник $ABKL$ является параллелограммом.

3. Натуральное число m назовём *магическим*, если сумма цифр числа m равна произведению его цифр.

а) Для каждого $n = 1, 2, \ldots, 10$ показать, что найдётся ровно n-значное магическое натуральное число.

б) Доказать, что для любого натурального числа n найдётся по меньшей мере n-значное магическое натуральное число.

4. Состоящий из двух равносторонних треугольников ромб с длиной стороны n поделён на игровые поля в форме равносторонних треугольников с длиной стороны 1 (на рисунке $n = 3$). У Юры и Миши по одной фишке, одна из которых в начале игры расположена на крайнем верхнем, а другая – на крайнем нижнем поле. При каждом ходе игрок передвигает свою фишку с того поля, где она находится, на имеющее общую с ним сторону другое поле. Если на этом поле оказывается фишка противника, то игрок её забирает и выигрывает. Если же этого не происходит, то выигрывает тот игрок, чья фишка первой доберётся до поля, где в начале игры была фишка противника. Ходят по очереди, начинает Юра. Найдётся ли у кого-то из игроков выигрышная стратегия (т.е. этот игрок может победить при любой игре соперника) и если да, то у кого?



5. Найти все пары положительных целых чисел (m, n), при которых на квадратной доске размером $m \times n$ тех клеток, которые граничат по крайней мере с одним краем доски, ровно столько же, сколько и остальных клеток.

LVI Олимпиада Эстонии по математике

28 марта 2009 г. Заключительный тур **10 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Величины углов треугольника равны x, y, z градусов.

а) Доказать, что если все числа $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ являются рациональными, то все числа x, y, z также являются рациональными.

б) Доказать, что если ровно одно из чисел $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ является рациональным, то все числа x, y, z являются иррациональными.

2. Найти все тройки (x, y, z) положительных целых чисел, при которых

$$99x + 100y + 101z = 2009.$$

3. К стороне AB остроугольного треугольника ABC через точку B проведена перпендикулярная прямая y, а к стороне AC через точку C проведена перпендикулярная прямая z. Доказать, что точка пересечения прямых y и z лежит на перпендикулярной прямой, проведённой из вершины A к стороне BC, тогда и только тогда, когда $|AB| = |AC|$.

4. Дана клетчатая доска размером $n \times 2$, где $n > 1$. Стороны длиной 2 склеивают между собой, при этом образуется цилиндрическая поверхность. Маша и Юра начинают игру, в которой каждый игрок при своём ходе вырезает из этой поверхности одну клетку. Ходят по очереди, начинает Маша. Проигрывает тот игрок, после хода которого прерывается круговое соединение поверхности (касание клеток только в вершинах не считается соединением). У кого из игроков существует выигрышная стратегия (т.е. этот игрок может победить при любой игре соперника)?

5. Учитель дал Артёму задание выбрать среди положительных делителей числа 2009^{10} такие, чтобы никакое из выбранных чисел не делилось ни на одно другое выбранное число. Какое наибольшее количество делителей Артём может выбрать?

LVI Олимпиада Эстонии по математике

28 марта 2009 г. Заключительный тур **11 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Положительное целое число n таково, что как $n-1$, так и $n+1$ являются простыми числами, причём $n > 18$. Доказать, что число n делится по меньшей мере на 8 различных положительных целых чисел.

2. Найти все действительные числа k, для которых верно следующее утверждение: если действительные числа a и b удовлетворяют условиям $0 \leqslant a \leqslant 1$ и $0 \leqslant b \leqslant 1$, то всегда

$$0 \leqslant a + b - kab \leqslant 1.$$

3. Пусть $ABCD$ такой выпуклый четырёхугольник, что угол BAC в два раза больше угла ACD, а угол DAC в два раза больше угла ACB. Доказать, что если $|AB| = |AD|$, то и $|BC| = |DC|$.

4. Клетки квадрата $n \times n$ пронумерованы числами от 1 до n^2 в некотором порядке, причём все порядковые номера записаны в соответствующие клетки. Оказалось, что в каждом прямоугольнике, образованном из этих клеток, сумма чисел, расположенных в угловых клетках одной пары противоположных углов, равна сумме чисел, расположенных в угловых клетках другой пары противоположных углов. Найти все возможности, чему может равняться сумма чисел, записанных в клетках, лежащих на одной диагонали квадрата $n \times n$.

5. Назовём точку координатной плоскости *рациональной*, если обе её координаты являются рациональными числами, и *иррациональной*, если обе её координаты являются иррациональными числами.

а) Лежит ли каждая точка плоскости на некоторой прямой, определённой двумя рациональными точками?

б) Лежит ли каждая точка плоскости на некоторой прямой, определённой двумя иррациональными точками?

LVI Олимпиада Эстонии по математике

28 марта 2009 г. Заключительный тур **12 класс**

Время, отводимое для решения: 5 часов.
Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи даёт 7 баллов.
Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. В большой шар помещают четыре одинаковых маленьких шара так, что каждый из них касается трёх остальных и большого шара. Будет ли общий объём маленьких шаров равен объёму остальной части большого шара, больше него или меньше него?

2. Пусть n – неотрицательное целое число, при котором

$$3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n}$$

является квадратом целого числа. Доказать, что n делится на 4.

3. Найти все действительные числа a, при которых у уравнения

$$x^3 + ax - 2(a+4) = 0$$

имеется ровно два различных действительных корня.

4. Доказать, что отношение длин диагоналей параллелограмма равно отношению длин сторон тогда и только тогда, когда углы, возникающие при пересечении диагоналей, равны внутренним углам параллелограмма.

5. Из прямоугольного клетчатого поля вырезают некоторые клетки так, что вместе с каждой вырезаемой клеткой вырезают также и все клетки, которые расположены кверху от неё в том же или более правом столбце, а также справа от неё в той же строке. После этого в каждую оставшуюся клетку записывают число, которое показывает, сколько всего оставшихся клеток находится выше неё в том же столбце и правее неё в той же строке. Доказать, что клеток, в которые записано чётное число не меньше, чем клеток, в которые записано нечётное число.