Eesti LVI matemaatikaolümpiaad

28. märts 2009 Lõppvoor **9. klass**

Lahendused

1. *Vastus:* 45%.

Lahendus 1. Olgu koerte koguarv k, haukuvate koerte arv a ja hammustavate koerte arv b ning olgu c nende koerte arv, kes nii hauguvad kui ka hammustavad. Siis vastavalt ülesande tingimustele $a - c = 3 \cdot (b - c)$ ning $\frac{c}{b} = 2 \cdot \frac{c}{a}$, ehk $\frac{a}{c} = 2 \cdot \frac{b}{c}$, kust $a = 2b$. Asendades selle esimesse võrdusse, saame $2b - c = 3b - 3c$, ehk $b = 2c$ ning $a = 2b = 4c$.

Ülesande viimasest tingimusest saame, et $c = \frac{3}{5} \cdot \big(k - (a + b - c)\big)$. Asendades siia eespool saadud võrdused $a = 4c$ ja $b = 2c$ saame, et $c = \frac{3}{5} \cdot (k - 5c)$, kust $c = \frac{3}{20} \cdot k$ ning $a - c = 3c = \frac{9}{20} \cdot k$. Haukuvaid koeri, kes ei hammusta, on niisiis $\frac{9}{20} \cdot 100 = 45$ protsenti kõigist Oskari ümbruskonna koertest.

Lahendus 2. Olgu hammustavate, aga mitte haukuvate koerte arv x, siis haukuvate, aga mitte hammustavate koerte arv on $3x$. Tähistame haukuvate ja hammustavate koerte arvu tähega z, siis annab ülesande teine tingimus, et $2 \cdot \frac{z}{3x + z} = \frac{z}{x + z}$. Siit järeldub, et $2x + 2z = 3x + z$, millest $z = x$. Niisiis on haukuvate ja hammustavate koerte arv samuti x.

Olgu nüüd koerte arv, kes ei hammusta ega haugu, y. Ülesande viimase tingimuse põhjal on hammustavate ja haukuvate koerte arv $0{,}6y$, millest saame $x = 0{,}6y$ ehk $3x = 1{,}8y$. Koeri on kokku

$$1{,}8y + 0{,}6y + 0{,}6y + y = 4y,$$

millest haukuvaid koeri, kes ei hammusta, on

$$\frac{1{,}8y}{4y} \cdot 100\% = 45\%.$$

2. *Lahendus 1.* Paneme tähele, et $\triangle ABF \sim \triangle CLF$ ja $\triangle ABE \sim \triangle KCE$ sarnasusteguriga 2 (joonis 1). Tõepoolest, $\angle BFA = \angle LFC$ ja $\angle BEA = \angle CEK$ (tippnurgad) ning ülesande tingimuste põhjal $|AF| = 2|CF|$, $|BE| = 2|CE|$, $|BF| = 2|LF|$ ja $|AE| = 2|KE|$. Saadud sarnasustest järeldub, et LC ja CK on paralleelsed lõiguga AB ning $2|LC| = 2|CK| = |AB|$. Seega asuvad punktid L, C ja K ühel sirgel, kusjuures $|LK| = |AB|$ ja $LK \parallel AB$. Järelikult on nelinurk $ABKL$ rööpkülik.

Lahendus 2. Vahetult ülesande tingimustest järelduvad järgmised sarnasused:

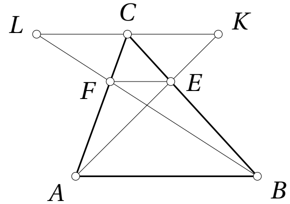
- $\triangle ABC \sim \triangle FEC$ sarnasusteguriga 3;
- $\triangle AKC \sim \triangle AEF$ sarnasusteguriga $\dfrac{3}{2}$;
- $\triangle BCL \sim \triangle BEF$ sarnasusteguriga $\dfrac{3}{2}$.

Siit järeldub, et $3|EF| = |AB|$, $\dfrac{3}{2}|EF| = |KC|$ ning $\dfrac{3}{2}|EF| = |CL|$, kusjuures lõik EF, aga siis ka lõigud KC ning CL on paralleelsed lõiguga AB. Kokkuvõttes asuvad punktid K, C ja L ühel sirgel, $KL \parallel AB$, kusjuures $|KL| = |KC| + |CK| = 3|EF| = |AB|$. Järelikult on nelinurk $ABKL$ rööpkülik.

Lahendus 3. Olgu N sirgete BC ja AL lõikepunkt, M sirgete AC ja BK lõikepunkt. Kuna $\dfrac{BF}{FL} = \dfrac{AF}{FC} = 2$, on BL ja AC kolmnurga ABN mediaanideks ning LC on küljele AB vastav kesklõik: $LC \parallel AB$ ning $|AB| = 2|LC|$. Sarnaselt on BC ja AK kolmnurga ABM mediaanideks ning CK küljele AB vasavaks kesklõiguks: $CK \parallel AB$ ning $|AB| = 2|CK|$. Seega L, C ja K asuvad ühel sirgel, $LK \parallel AB$ ning $|LK| = |AB|$. Järelikult on nelinurk $ABKL$ rööpkülik.

3. *Lahendus 1.* a) Sobivad maagilised arvud on näiteks 1, 22, 123, 1124, 11125, 111126, 1111127, 11111128, 111111129 ja 1111111144.

b) Paneme tähele, et mistahes naturaalarvust, mille numbrite korrutis on numbrite summast suurem, saame maagilise arvu, lisades sellele sobiva arvu numbreid 1. Tõepoolest, iga numbri 1 lisamine suurendab arvu numbrite summat 1 võrra, jättes numbrite korrutise muutmata. Nüüd piisab tähele panna, et mistahes naturaalarvu n korral arvu $\underbrace{22\ldots2}_{n}$ numbrite korrutis 2^n on kas võrdne numbrite summaga $2n$ (kui $n = 1$ või $n = 2$) või sellest suurem (kui $n > 2$), st sobiva arvu numbrite 1 lisamisel saame sellest vähemalt n-kohalise maagilise arvu.



Joonis 1

Lahendus 2. b) Piisab näidata, et iga maagilise naturaalarvu $m > 1$ korral leidub sellest suurema kümnendkohtade arvuga maagiline naturaalarv m'. Tõepoolest, lisame arvule m lõppu esmalt numbri 2 (sellega suureneb numbrite summa 2 võrra ja numbrite korrutis 2 korda, st vähemalt 2 võrra) ning seejärel sobiva arvu numbreid 1, nii et saame jällegi maagilise arvu.

4. *Vastus:* Jah, Jukul.

Lahendus. Paneme tähele, et teisel mängijal ei ole võimalik alustaja nuppu laualt ära võtta. Selleks värvime mängulaua väljad kahe värviga nii, et „tipuga üles" väljad on üht ja „tipuga alla" väljad teist värvi. Siis mistahes kaks ühise küljega välja on eri värvi, st igal käigul liigutatakse nupp üht värvi väljalt teist värvi väljale, ning ka mängulaua ülemine ja alumine väli, kus nupud paiknevad mängu algul, on eri värvi. Seega alustaja käigu järel on nupud sama värvi väljadel, tema vastase käigu järel aga eri värvi väljadel ning sama kordub järgnevatel käikudel. Järelikult alustaja vastane ei saa ühelgi oma käigul alustaja nuppu lüüa.

Niisiis piisab alustajal liikuda oma nupuga lühimat teed pidi mängulaua vastastippu, pööramata tähelepanu vastase käikudele. Kuna see lühim tee on mõlema mängija jaoks ühepikkune, siis jõuab alustaja oma nupuga sihile kindlasti enne kui tema vastane.

5. *Vastus:* $(5,12)$, $(6,8)$, $(8,6)$, $(12,5)$.

Kui $m = 1$ või $n = 1$, siis ruudustiku kõik ruudud piirnevad äärega, seega nõutud tingimus ei kehti.

Eeldame nüüd, et $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$. Ristküliku äärtega puutub kokku $2m + 2n - 4$ ruutu, ülejäänud ruutusid on aga $(m-2)(n-2) = mn - 2m - 2n + 4$. Ülesande tingimuse põhjal

$$2m + 2n - 4 = mn - 2m - 2n + 4,$$

mis on samaväärne võrrandiga $mn-4m-4n+8 = 0$. Liites mõlemale poole 8 ja tegurdades vasaku poole, saame võrrandi

$$(m-4)(n-4) = 8.$$

Seega $m-4$ ja $n-4$ on arvu 8 tegurid (võib-olla ka negatiivsed). Kuna $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, siis $m-4 \geqslant -2$ ja $n-4 \geqslant -2$. Kuid kui üks teguritest $m-4$ ja $n-4$ oleks -2 või -1, peaks teine olema vastavalt -4 ja -8, mis pole võimalik. Seega on $m-4$ ja $n-4$ siiski mõlemad positiivsed. Tekivad järgmised võimalused.

$m-4$	$n-4$	(m,n)
1	8	$(5,12)$
2	4	$(6,8)$
4	2	$(8,6)$
8	1	$(12,5)$

Lahendused

1. Märkame, et

$$\frac{180}{x} = \frac{x+y+z}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}. \tag{1}$$

a) Ülesande tingimuste kohaselt $\frac{y}{x}$ ehk $\frac{1}{\frac{x}{y}}$ ja $\frac{z}{x}$ on ratsionaalarvud. Seose (1) põhjal niisiis on $\frac{180}{x}$ ratsionaalarvude summana ratsionaalarv. Järelikult x esitub kahe ratsionaalarvu suhtena ja on seega samuti ratsionaalarv. Ratsionaalarvulistest suhetest $\frac{x}{y}$ ja $\frac{z}{x}$ järeldub nüüd, et ka y ja z on ratsionaalarvud.

b) Olgu üldisust kitsendamata $\frac{x}{y}$ (seega ka $\frac{y}{x}$) ratsionaalarv ja $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ (seega ka $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$) irratsionaalarvud. Seos (1) esitab arvu $\frac{180}{x}$ kahe ratsionaalarvu ja irratsionaalarvu summana. Järelikult $\frac{180}{x}$ on irratsionaalarv, kust x on samuti irratsionaalarv. Et $\frac{x}{y}$ on ratsionaalarv, siis ka y on irratsionaalarv.

Oletame, et z on ratsionaalarv. Siis ka $x+y$ on ratsionaalarv, sest $x+y = 180-z$. Aga nüüd $\frac{x+y}{y}$ on ühelt poolt ratsionaalarvu ja irratsionaalarvu suhtena irratsionaalarv, teisalt aga esitub summana $\frac{x}{y}+1$, kus liidetavad on ratsionaalarvud, mistõttu on hoopis ratsionaalarv. Vastuolu näitab, et z peab olema irratsionaalarv.

2. *Vastus:* $(1,9,10)$, $(2,7,11)$, $(3,5,12)$, $(4,3,13)$ ning $(5,1,14)$.

Kõigepealt hindame lähtevõrrandi vasakut poolt:

$$\begin{aligned} 2009 = 99x + 100y + 101z &\leqslant 101(x+y+z), \\ 2009 = 99x + 100y + 101z &\geqslant 99(x+y+z). \end{aligned}$$

Saadud võrratused annavad, et

$$\frac{2009}{101} \leqslant x+y+z \leqslant \frac{2009}{99}.$$

Kuna $\dfrac{2009}{101} > 19$ ja $\dfrac{2009}{99} < 21$ ning $x+y+z$ on täisarv, siis $x+y+z = 20$. Kirjutame lähtevõrrandi kujul $100(x+y+z)+z-x = 2009$, siis saame, et eeldusel $x+y+z = 20$ on lähtevõrrand samaväärne tingimusega $z-x = 9$ ehk $z = x+9$, st lähtevõrrand on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} x+y+z = 20, \\ z = x+9. \end{cases}$$

Asetades saadud z avaldise võrdusse $x+y+z = 20$, saame $x+y+x+9 = 20$, millest $2x+y = 11$ ehk $y = 11-2x$. See tähendab, et lähtevõrrand on samaväärne süsteemiga

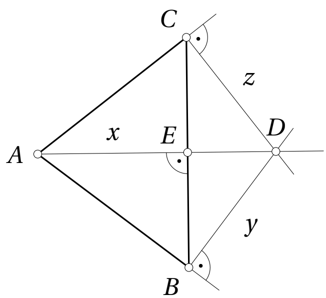
$$\begin{cases} y = 11-2x, \\ z = x+9. \end{cases}$$

Kuna x ja y on positiivsed täisarvud, siis $0 < x \leqslant 5$. Vaatame läbi võimalikud variandid:

- kui $x = 1$, siis $(x,y,z) = (1,9,10)$;
- kui $x = 2$, siis $(x,y,z) = (2,7,11)$;
- kui $x = 3$, siis $(x,y,z) = (3,5,12)$;
- kui $x = 4$, siis $(x,y,z) = (4,3,13)$;
- kui $x = 5$, siis $(x,y,z) = (5,1,14)$.

3. *Lahendus 1.* Olgu tipust A küljele BC tõmmatud ristsirge x ning olgu E sirgete x ja BC lõikepunkt (joonis 2). Lõikugu sirged x, y ja z punktis D. Eukleidese teoreemist $|AB|^2 = |AD|\cdot|AE| = |AC|^2$, mistõttu $|AB| = |AC|$.

Vastupidi, kui $|AB| = |AC|$, siis kolmnurk ABC on võrdhaarne tipunurgaga A. Kõrgus AE on tipunurga poolitaja, mistõttu lõigud AB ja AC asetsevad tema suhtes sümmeetriliselt. Järelikult ka punktides B ja C tõmmatud ristsirged y ja z asetsevad sirge x suhtes sümmeetriliselt. Seega nende lõikepunktid sirgega x langevad kokku.



Joonis 2

Lahendus 2. Kehtigu eelmise lahenduse tähistused. Et AB ja BD ristuvad ja samuti AC ja CD, asuvad punktid A, B, C, D ühel ringjoonel, mille diameeter on AD. Lõik BC on selle ringjoone kõõl ja eelduse kohaselt ristub diameetriga AD; seega lõikepunkt E poolitab lõigu BC. Järelikult AE on kolmnurgas ABC nii kõrgus kui mediaan, seega $|AB| = |AC|$.

Vastupidi, kui $|AB| = |AC|$, siis $\angle ACB = \angle ABC$ ja kolmnurgas ABC langevad tipust A tõmmatud kõrgus ja nurgapoolitaja kokku. Olgu sirgete y ja z lõikepunkt F. Kuna

$$\angle BAF = \angle FCB = \frac{\pi}{2} - \angle ACB = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \angle CBF = \angle CAF,$$

siis AF on samuti kolmnurga ABC nurgapoolitaja. Seega sirged AF ja x ühtivad, mis tähendab, et x, y ja z lõikuvad punktis F.

4. *Vastus:* Mari, kui n on paaritu, Jüri, kui n on paaris.

Lahendus 1. Valigu kumbki mängija, kuni võimalik, alati ruute, mille väljalõikamisest ringühendus ei katke. Teistsugused strateegiad, mis tähendaksid vabatahtlikku kaotust, ilmselt paremad ei ole.

Uurime seisu enne mängu viimast käiku, s.o võitja viimase käigu järel. Vaatleme plokke 1-st või enamast järjestikusest kadunud ruudust (õigupoolest nende asukohtadest enne väljalõikamist) samas servas. Ilmselt ei saa erinevate servade äärsed plokid ulatuda üksteisega kohakuti, muidu oleks ring katkenud.

Kui ühes servas ulatub üks plokk üle terve silindri, siis teises servas on kõik ruudud alles. Sel juhul seni tehtud käikude arv on n. See tähendab, et võitja on alustaja paaritu n korral ja tema vastane paaris n korral.

Eeldame nüüd, et ükski plokk ei ulatu üle terve silindri. Paneme tähele, et plokile järgneva ruuduga kohakuti teises servas asuv ruut on alles, muidu oleks ring sellest kohast katkenud. Seega naaberplokkide vahel on vähemalt üks terve tulp. Kui terveid tulpi naaberplokkide vahel oleks rohkem, saaks teha veel ühe käigu – eemaldada ploki kõrvalt ruut nii, et see pikendaks plokki. Kui naaberplokid asuksid samas servas, saaks samuti teha veel ühe käigu – eemaldada ruut nende vahelt.

Järelikult naaberplokid on alati vastasservades, mistõttu on neid kokku paarisarv. Et nende vahel on alati üks terve tulp, on tervete tulpade arv seesama paarisarv. Eemaldatud ruutude arv on selle paarisarvu võrra n-st väiksem, st n-ga sama paarsusega. Seega siingi on viimati käinu alustaja paaritu n korral ja tema vastane paaris n korral.

Lahendus 2. Vaatleme silindri sümmeetriatasandeid, mis läbivad silindri põhjade keskpunkte; neist saab valida sellise sümmeetriatasandi p, mis läbib silindri külgpinda vähemalt ühes kohas piki ruutude piire.

Kui n on paaris, siis silindri külgpinna kummastki ruudureast jääb kummalegi poole tasandit p täisarv ruute, st tasand p läbib silindri külgpinda kahel pool piki ruutude piire. Peegeldamine tasandi p suhtes jagab seega kõik ruudud paaridesse. Olgu Jüri strateegia lõigata iga Mari käigu järel välja Mari valitud ruuduga tasandi p suhtes sümmeetriline ruut. Kui siis enne mingit Mari käiku jagunevad kõik allesolevad ruudud sümmeetrilistesse paaridesse, siis Mari käigu järel on tema valitud ruudu paariline alles, mistõttu Jüri saab strateegiat jätkata. Et Mari ja Jüri käikude tulemusel eemaldatakse parajasti üks sümmeetriline paar, siis ka enne järgmist Mari käiku jagunevad kõik allesolevad ruudud sümmeetrilistesse paaridesse. Järelikult Jüri saab oma strateegiat kasutada mängu lõpuni.

Veendume nüüd, et kui Mari mingi käik ringühendust ei katkesta, siis seda ei tee ka järgnev Jüri käik. Tõepoolest, kui Mari eemaldab ruudu, mis pole otse sümmeetriatasandi p kõrval, siis tema käigu järel on Jüri valitava ruudu ümbrus peegelpilt Mari valitud ruudu ümbrusest enne tema käiku, seega Jüri käigu mõju ei erine Mari omast. Kui aga Mari eemaldab ruudu tasandi p kõrvalt, siis sellega on Jüri valitava ruudu üks naaberruutudest äsja eemaldatud, muus osas on aga Jüri käigu ümbrus peegelpilt Mari valitud ruudu ümbrusest enne tema käiku. Seega kui ühendus katkeks, siis peaks see toimuma Mari ja Jüri eemaldatud ruutude vahelt; et aga need on eemaldatud samast reast ja teises reas on ruudud alles (muidu oleks Mari oma käiguga kaotanud), siis ühendus ei katke ka sealt.

Järelikult ringühendus katkeb Jüri sellise strateegia korral just Mari käigu järel ehk Jüri strateegia viib võiduni.

Kui n on paaritu, siis tasand p läbib silindri külgpinda ühel pool piki ruutude piire, teisel pool aga ruutude keskelt. Peegeldamine tasandi p suhtes jagab paaridesse kõik ruudud peale nende kahe, mida tasand p läbib; need on kumbki paaris iseendaga. Olgu Mari strateegia valida alguses üks neist kahest ruudust ja edasi valida Jüri viimativalitud ruuduga sümmeetriline ruut. Kui siis Jüri oma ühelgi käigul ei vali teist neist kahest ruudust, millel paariline puudub, siis analoogiliselt paaris n juhuga saab nüüd Mari oma strateegiat kasutada mängu lõpuni; kui aga Jüri valib mingil käigul paariliseta ruudu, siis ta katkestab ühenduse ja kaotab, nii et ka siis on Mari oma strateegiat lõpuni kasutanud. Analoogiliselt paaris n juhuga võidab mängu sümmeetrilisi ruute valiv mängija ehk Mari.

5. *Vastus:* 11.

Kuna $2009 = 7^2 \cdot 41$, kus 7 ja 41 on algarvud, siis on arvu 2009^{10} kõik tegurid kujul $7^n \cdot 41^m$, kus $0 \leqslant n \leqslant 20$ ja $0 \leqslant m \leqslant 10$. Et m võimalikke väärtusi on 11, siis ei saa Arno rohkem kui 11 arvu välja valida – vastasel korral oleks kahel valitud teguril arvu 41 astendaja sama (Dirichlet' printsiip) ning neist kahest tegurist see, milles 7 astendaja on kõrgem, jaguks teisega.

Teiselt poolt näitame, et 11 teguri seas, mis on kujul $7^{20-m} \cdot 41^m$, kus $m = 0, 1, \dots, 10$, ükski ühegi teisega ei jagu. Oletame väitevastaselt, et leiduvad erinevad m_1 ja m_2 nii, et arv $7^{20-m_1} \cdot 41^{m_1}$ jagub arvuga $7^{20-m_2} \cdot 41^{m_2}$. Siis $20 - m_1 \geqslant 20 - m_2$ ja $m_1 \geqslant m_2$. Nendest kahest võrratusest järeldub aga, et $m_1 = m_2$, vastuolu.

Lahendused

1. *Lahendus 1.* Näitame kõigepealt, et arv n jagub 6-ga. Kuna $n+1$ on algarv, siis $n+1$ ei jagu 2-ga ega 3-ga. Seega n jagub 2-ga. Analoogiliselt ka $n-1$ ei jagu 3-ga; et aga kolmest järjestikusest täisarvust üks jagub 3-ga, siis n jagub 3-ga. Kuna 2 ja 3 on ühistegurita, siis see annabki, et n jagub 6-ga.

   Sellest tulenevalt kuuluvad n jagajate hulka arvud 1, 2, 3, 6. Ülesande tingimuste põhjal $n > 18 = 3 \cdot 6$. Juhul $n = 5 \cdot 6 = 30$ on arvul n lisaks ülalloetletutele jagajad 5, 10, 15, 30, kokku 8 nagu tarvis. Juhud $n = 4 \cdot 6 = 24$ ja $n = 6 \cdot 6 = 36$ ei vasta ülesande tingimustele, sest $24+1$ ja $36-1$ jaguvad 5-ga. Kui $n > 6 \cdot 6$, siis $6 < \frac{n}{6}$, mistõttu arvu n jagajad $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{6}$ on senileitutest suuremad ja seega kokku leidub vähemalt 8 jagajat.

   Lahendus 2. Lähtudes n jaguvusest 6-ga, võib lahenduse lõpule viia ka järgmisel viisil, kasutades tuntud valemit, mille kohaselt n jagajate arv võrdub algarvude astendajatest kanoonilises esituses 1 võrra suuremate arvude korrutisega. Ülal saime, et n algtegurite hulka kuuluvad vähemalt 2 ja 3. Kui arvul n on veel mõni algtegur, siis on kanoonilises esituses vähemalt 3 algtegurit astendajaga vähemalt 1, mistõttu jagajate arv tuleb vähemalt $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)$ ehk 8. Oletame nüüd, et arvul n on vaid algtegurid 2 ja 3. Arvud, kus üks neist esineb astmel 2 ja teine astmel 1, on 12 ja 18, millest n ülesande tingimuste põhjal on suurem. Järelikult peab kas üks arvudest 2 ja 3 olema astendajaga vähemalt 3 või mõlemad esinema astendajaga vähemalt 2. Esimesel juhul on jagajate arv vähemalt $(1+1)\cdot(3+1)$ ehk 8, teisel juhul vähemalt $(2+1)\cdot(2+1)$ ehk 9.

2. *Vastus:* $1 \leqslant k \leqslant 2$.

   Veendume kõigepealt, et kui arv k rahuldab tingimust $1 \leqslant k \leqslant 2$, siis ülesandes toodud väide kehtib. Olgu $0 \leqslant a, b \leqslant 1$, siis $a^2 \leqslant a$ ja $b^2 \leqslant b$. Me saame, et

$$0 \leqslant (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \leqslant a + b - kab \leqslant$$
$$\leqslant a + b - ab = 1 - (1-a)(1-b) \leqslant 1.$$

   Veendume nüüd, et kui $k < 1$ või $k > 2$, siis ülesandes toodud väide ei kehti. Valime $a = b = 1$, siis $a + b - kab = 2 - k$, seega juhul $k < 1$ leiab aset võrratus $a - b - kab = 2 - k > 1$ ja juhul $k > 2$ leiab aset võrratus $a - b - kab = 2 - k < 0$.

3. *Lahendus 1.* Tõmbame ringjoone ω keskpunktiga A ja raadiusega AB ning pikendame lõiku AC üle punkti A kuni teistkordse lõikumiseni ringjoonega ω (joonis 3). Olgu AC ja ω lõikepunkt E. Piirde- ja kesknurga vahelisest seosest saame, et $2\angle ACD = \angle BAC = 2\angle BEC$ ning $2\angle ACB = \angle DAC = 2\angle DEC$. Oleme saanud, et $\angle ACD = \angle AEB$ ja $\angle ACB = \angle DEC$, mis tähendab, et nelinurga $BCDE$ vastasküljed on paralleelsed ehk ta on rööpkülik. Olgu selle rööpküliku diagonaalide BD ja EC lõikepunkt F.

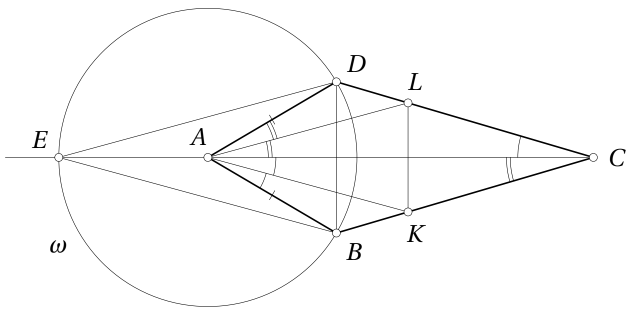
Kuna rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, on AF kolmnurga ABD mediaan. Tingimuse $|AB| = |AD|$ tõttu on AF kolmnurgas ABD seega ka nurgapoolitaja. Nüüd $\angle BAC = \angle DAC$, mistõttu ka $\angle ACD = \angle ACB$. Oleme saanud, et kolmnurgas BCD on lõik CF samal ajal mediaan ja nurgapoolitaja, järelikult $|BC| = |DC|$.

Lahendus 2. Olgu K ja L vastavalt nurga BAC poolitaja lõikepunkt küljega BC ja nurga DAC poolitaja lõikepunkt küljega DC. Et $\angle KAC = \angle LCA$, siis $AK \parallel LC$; et $\angle LAC = \angle KCA$, siis $AL \parallel KC$. Seega $AKCL$ on rööpkülik. Lõigud AC ja KL rööpküliku diagonaalidena poolitavad teineteist.

Nurgapoolitaja omadusest $\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ ja $\frac{|DL|}{|LC|} = \frac{|AD|}{|AC|}$. Et $|AB| = |AD|$, siis need suhted on võrdsed, st $\frac{|BK|}{|KC|} = \frac{|DL|}{|LC|}$. Seega kolmnurgad CBD ja CKL on sarnased ning $KL \parallel BD$. Kuna AC poolitab KL, siis sarnasuse tõttu ta poolitab ka BD. Edasi jätkame nagu lahenduses 1.

Lahendus 3. Olgu U sirgete BA ja CD lõikepunkt ning V sirgete DA ja CB lõikepunkt. Kuna nurk BAC on kolmnurga ACU välisnurk, siis $\angle AUC = \angle ACD$. Analoogiliselt saame, et $\angle AVC = \angle ACB$. Seega kolmnurgad CAU ja CAV on võrdhaarsed, kusjuures $|AU| = |AC| = |AV|$.

Nüüd on kolmnurgad AUD ja AVB võrdsed tunnuse KNK põhjal, niisiis on nurgad AVB ja AUD võrdsed. Lõpuks saame, et ka kolmnurgad ADC ja ABC on võrdsed tunnuse NKN põhjal, millest järeldubki tulemus $|DC| = |BC|$.



Joonis 3

4. *Vastus:* $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Lahendus 1. Tähistame $n \times n$ ruudustiku i. reas j. veerus olevat ruutu (i, j) ning sellel olevat arvu t_{ij}. Tähistame $D = t_{11} + t_{22} + \ldots + t_{nn}$ (diagonaalil asuvate arvude summa). Iga $i, j = 1, 2, \ldots, n$ korral kehtib võrdus $t_{ii} + t_{jj} = t_{ij} + t_{ji}$. Liites kokku kõik sellised võrdused, mis tekivad i ja j sõltumatust muutumisest üle arvude $1, 2, \ldots, n$ (selliseid võrdusi saame n^2 tükki), tekib vasakule $2n$-kordne diagonaali arvude summa (kummagi liidetavana esineb diagonaali iga arv täpselt n võrduses, mis teeb kokku $2n$ korda seda liidetavat), paremale aga kahekordne kõigi arvude summa (kuna iga arvu t_{kl} loetakse summasse nii $(k, l) = (i, j)$ kui ka $(k, l) = (j, i)$ juures). Kokkuvõttes

$$2nD = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + n^2) = 2 \cdot \frac{n^2(n^2+1)}{2},$$

millest

$$D = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Lahendus 2. Kõigepealt kopeerime ruudustikust paremale täpselt samasuguse (samade arvudega) ruudustiku ning saame seega $n \times 2n$ ristküliku. Ülesandes kirjeldatud omadus kehtib kogu laiendatud pinna jaoks, sest vahetades suvalise ristküliku nurgaruudud, mis jäävad uude pinnaossa, nende originaalruutude vastu, määravad nurgaruudud algsel pinnaosal samuti ristküliku.

Tähistame laiendatud pinna i. reas j. veerus olevat ruutu (i, j) ning veendume järgnevalt, et diagonaali $\big((1,1), (2,2), \ldots, (n,n)\big)$ *k-nihetel*

$$\big((1, 1+k), (2, 2+k), \ldots, (n, n+k)\big)$$

(kus $k = 0, 1, \ldots, n-1$) olevate arvude summad on võrdsed.

Olgu k selline täisarv, et $0 \leqslant k < n-1$. Näitame, et diagonaali k-nihkel ja $(k+1)$-nihkel olevate arvude summad on võrdsed. Asugu k-nihke ruutudel arvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ning $(k+1)$-nihke ruutudel arvud $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Asugu ruutudel $(1, 1+k)$, $(2, 1+k)$, $(3, 1+k)$, $\ldots$, $(n, 1+k)$ arvud $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$. Siis $c_1 = a_1$ ja $c_n = b_n$. Vastavalt ruudustikus kehtivale omadusele saame võrdused

$$\begin{array}{rcl}
c_1 + a_2 & = & b_1 + c_2, \\
c_2 + a_3 & = & b_2 + c_3, \\
c_3 + a_4 & = & b_3 + c_4, \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
c_{n-1} + a_n & = & b_{n-1} + c_n,
\end{array}$$

mille liitmisel ja sarnaste liikmete koondamisel selgub, et

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

On jäänud märgata, et diagonaali k-nihetel, kus $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on parajasti kõik esialgse $n \times n$ ruudustiku arvud, mille summa on

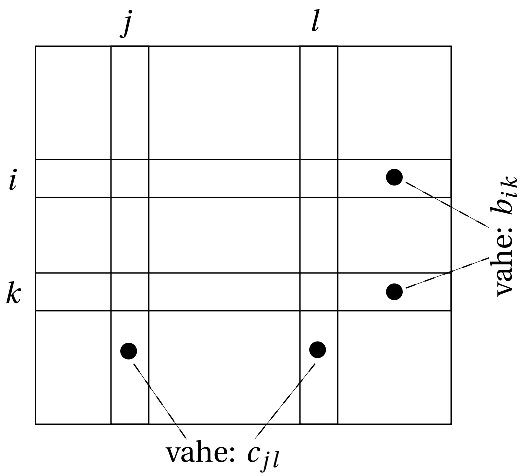
$$1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Järelikult on diagonaali igal k-nihkel, seega ka 0-nihkel ehk diagonaalil endal olevate arvude summa

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Lahendus 3. Olgu i-ndas reas ja j-ndas veerus asuvasse ruutu kirjutatud arv t_{ij}. Vastavalt ülesande tingimustele kehtib siis iga i, j, k, l jaoks $(1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n)$ $t_{ij} + t_{kl} = t_{il} + t_{kj}$ ehk $t_{ij} - t_{kj} = t_{il} - t_{kl}$. Teisisõnu, kui me võtame mingi ruudu i-ndas reas ning temaga samas veerus asuva ruudu k-ndas reas, siis nendes ruutudes asuvate arvude vahe ei sõltu sellest, millises veerus nad asuvad. Olgu $b_{ik} = t_{ij} - t_{kj}$; eelmise lause kohaselt ei sõltu see avaldis suurusest j.

Kui vahetame omavahel read ja veerud, siis võime arutada täpselt samamoodi: ülesande tingimustes antud võrdus $t_{ij} + t_{kl} = t_{il} + t_{kj}$ on samaväärne võrdusega $t_{ij} - t_{il} = t_{kj} - t_{kl}$ ehk suurus $c_{jl} = t_{ij} - t_{il}$ ei sõltu suurusest i. Arve b_{ik} ja c_{jl} illustreerib joonis 4.



Joonis 4

Olgu $A = t_{11}$, $B_i = b_{i1}$ ja $C_i = c_{i1}$. Suurused A, B_i ja C_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ määravad ära kõigi ruutude väärtused: $t_{ij} = A + B_i + C_j$. Muuhulgas võime nende suuruste kaudu avaldada ruudustiku kõigi ruutude summa S:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A + B_i + C_j) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_j\right) = \\ &= n^2 \cdot A + n \cdot \sum_{i=1}^{n} B_i + n \cdot \sum_{i=1}^{n} C_i. \end{aligned}$$

Samuti võime avaldada ruudustiku peadiagonaalil olevate arvude summa d:

$$d = \sum_{i=1}^{n} t_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(A + B_i + C_i) = n \cdot A + \sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{i=1}^{n} C_i \ .$$

Näeme, et $d = \dfrac{S}{n}$. Kuna $S = \sum_{i=1}^{n^2} i = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$, siis $d = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

5. *Vastus:* a) ei; b) jah.

a) Erinevad ratsionaalsed punktid $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ määravad sirge, mille võrrand on

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1),$$

millest $ax + by + c = 0$, kus $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ ja $c = y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)$ on kõik ratsionaalarvud.

Tõestame, et punkt $(x, y) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ ei rahulda võrdust $ax + by + c = 0$ ühegi ratsionaalarvukolmiku (a, b, c) korral. Tõepoolest, kui kehtiks $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c = 0$, siis saaksime, et $a\sqrt{2} = -b\sqrt{3} - c$, millest $2a^2 = 3b^2 + 2bc\sqrt{3} + c^2$, seega oleks $2bc\sqrt{3} = 2a^2 - 3b^2 - c^2$ ratsionaalarv. Järelikult $b = 0$ või $c = 0$.

Kui $b = 0$, siis $a\sqrt{2} = -c$ on ratsionaalarv. Siit on ainus võimalus, et $a = c = 0$, misjuhul punktid A ja B langeksid kokku.

Kui aga $c = 0$, siis $a\sqrt{2} = -b\sqrt{3}$. Kui $a = 0$, siis ka $b = 0$ ja vastupidi; see aga tähendaks punktide A ja B kokkulangevust. Järelikult $a, b \neq 0$ ning $-\dfrac{a}{b} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ on ratsionaalarv. Kuna $\sqrt{6}$ on irratsionaalarv, oleme jõudnud vastuoluni.

Niisiis punkt (x, y) ei asu ühegi ratsionaalsete punktide paari poolt määratud sirgel.

b) Olgu antud punkt (x, y). Vaatleme punkte $A\left(x+\alpha_1, y+\beta_1\right)$ ja $B\left(x+\alpha_2, y+\beta_2\right)$, kus

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} (1,2), & x \in \mathbb{I}, \\ \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right), & x \in \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad \left(\beta_1, \beta_2\right) = \begin{cases} (1,2), & y \in \mathbb{I}, \\ \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right), & y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Punktid A ja B on irratsionaalsed, kuna nende mõlemad koordinaadid on ratsionaal- ja irratsionaalarvu summad. Kerge on ka veenduda, et punkt (x, y) asub sirgel AB:

$$\frac{x-(x+\alpha_1)}{(x+\alpha_2)-(x+\alpha_1)} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} = -1 = \frac{-\beta_1}{\beta_2-\beta_1} = \frac{y-\left(y+\beta_1\right)}{\left(y+\beta_2\right)-\left(y+\beta_1\right)}.$$

Lahendused

1. *Vastus:* väiksem.

Lahendus 1. Oletame, et väikeste kerade koguruumala on vähemalt pool suure kera ruumalast. Olgu väikese kera raadius r ja suurel keral R. Kuna kerade ruumalad suhtuvad nagu raadiuste kuubid, siis $2\cdot 4\cdot r^3 \geqslant R^3$ ehk $r \geqslant \frac{R}{2}$. Võrratus $r > \frac{R}{2}$ on ilmselt võimatu, sest siis peaks suure kera keskpunkt paiknema iga väikese kera sees. Kui aga $r = \frac{R}{2}$, siis peaksid mistahes kaks väikest kera puutuma teineteist suure kera keskpunktis (st väikeste kerade omavahelised puutepunktid peaksid kõik kokku langema), mis on samuti võimatu. Seega peab väikeste kerade koguruumala olema väiksem kui pool suure kera ruumalast.

Lahendus 2. Näitame, et väikeste kerade koguruumala on väiksem kui pool suure kera ruumalast. Olgu väikese kera raadius 1, siis suure kera raadius on $1+a$, kus a on servapikkusega 2 korrapärase tetraeedri keskpunkti kaugus tetraeedri tippudest. Vaatleme kolmnurka mille tippudeks on vaadeldava korrapärase tetraeedri keskpunkt ja tema kaks tippu (st kahe väikese kera keskpunktid). Selle kolmnurga küljepikkused on 2, a ja a. Kolmnurga võrratuse põhjal saame, et $2a = a + a > 2$, millest $a > 1$.

Pool suure kera ruumalast on $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(1+a)^3$, aga nelja väikese kera koguruumala on $4\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 1$. Kuna $a > 1$, siis $(1+a)^3 > 8$, seetõttu $\frac{4}{3}\pi$ kordaja poole suure kera ruumala avaldises on suurem kui $\frac{4}{3}\pi$ kordaja nelja väikse kera ruumala avaldises.

Märkus. Lahenduses 2 vaadeldud suuruse a täpne väärtus on $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. *Lahendus 1.* Tuues 3^n sulgude ette, saame

$$3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n} = 3^n \cdot \left(1 + 3 + \ldots + 3^n\right).$$

Saadud kaks tegurit on omavahel ühistegurita, sest 3^n saab algarvudest jaguda ainult 3-ga, kuid summas $1+3+\ldots+3^n$ jaguvad kõik liidetavad 3-ga peale ühe, mistõttu summa 3-ga ei jagu. Et korrutis on täisruut, on järelikult mõlemad tegurid täisruudud.

Tegurist 3^n saame nüüd, et n on paaris. Mis puutub tegurisse $1+3+\ldots+3^n$, siis $3^2 \equiv 1 \pmod 8$ näitab, et $3^i \equiv 1 \pmod 8$, kui i on paarisarv, ja $3^i \equiv 3 \pmod 8$, kui i on paaritu arv. Järelikult selle summa liidetavaid järjest liites on vahetulemused $1, 4, 5, 0, 1, 4, 5, 0, \ldots \pmod 8$. Kuna n on paaris, siis liidetavate arv on paaritu, mistõttu arvesse tulevad ainult paarituarvulistel kohtadel paiknevad 1 ja 5. Kuid täisarvu ruut ei saa anda jääki 5 mooduli 8 järgi. Seega täisruut võib tulla ainult igal neljandal liitmisel, kus 3 astendaja jagub 4-ga.

Lahendus 2. Tegurdades ja kasutades geomeetrilise jada summa valemit, saame

$$3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n} = 3^n \cdot \left(1 + 3 + \ldots + 3^n\right) = 3^n \cdot \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Tegurid 3^n ja $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$ on ühistegurita: esimene neist jagub algarvudest vaid 3-ga, kuid teine tegur 3-ga ei jagu, sest murru lugeja 3-ga ei jagu. Analoogiliselt lahendusega 1 leiame nüüd, et n on paaris.

Oletame väitevastaselt, et n ei jagu 4-ga. Kuna n on paarisarv, siis $n \equiv 2 \pmod 4$, mistõttu $n + 1 \equiv 3 \pmod 4$. Paneme tähele, et $3^4 = 81$; et $16 \mid 80$, siis $3^4 \equiv 1 \pmod{16}$, kust $3^{n+1} \equiv 3^3 \equiv 11 \pmod{16}$ ja $3^{n+1} - 1 \equiv 10 \pmod{16}$, kust omakorda $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2} \equiv 5 \pmod 8$. Kuid täisarvu ruut ei saa anda jääki 5 mooduli 8 järgi.

Lahendus 3. Oletusest, et $n \equiv 2 \pmod 4$, võib vastuoluni jõuda ka mooduli 5 järgi arutledes. Et $5 \mid 80$, siis $3^4 \equiv 1 \pmod 5$, kust $3^{n+1} \equiv 3^3 \equiv 2 \pmod 5$ ja $3^{n+1} - 1 \equiv 1 \equiv 6 \pmod 5$, kust omakorda $\dfrac{3^{n+1} - 1}{2} \equiv 3 \pmod 5$. Kuid täisarvu ruut ei saa anda jääki 3 mooduli 5 järgi.

Märkus. Näiteks juhul $n = 0$ on $3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n} = 3^0 \cdot \dfrac{3^1 - 1}{2} = 1^2$ ja juhul $n = 4$ saame $3^n + 3^{n+1} + \ldots + 3^{2n} = 3^4 \cdot \dfrac{3^5 - 1}{2} = 99^2$.

3. *Vastus:* -12, -3.

Lahendus 1. Paneme tähele, et

$$x^3 + ax - 2(a + 4) = (x - 2) \cdot \left(x^2 + 2x + (a + 4)\right).$$

Järelikult arv 2 on antud kuuppolünoomi nullkoht sõltumata a valikust. Et $x - 2$ mujal nulliks ei saa, peab kuuppolünoomi teine nullkoht olema ruutkolmliikme $x^2 + 2x + (a + 4)$ nullkoht. Vaatame kahte juhtu.

Kui 2 on ka ruutkolmliikme $x^2+2x+(a+4)$ nullkoht, siis $2^2+2\cdot2+(a+4) = 0$, kust $a = -12$. Kuna $x^2 + 2x - 8 \neq (x - 2)^2$, erineb selle ruutkolmliikme teine nullkoht arvust 2.

Kui 2 ei ole ruutkolmliikme $x^2+2x+(a+4)$ nullkoht, siis sel ruutkolmliikmel peab olema täpselt üks 2-st erinev nullkoht. Seega tema diskriminant on null ehk $4-4(a+4)=0$, kust $a=-3$. Ainsaks nullkohaks saame -1, mis tõepoolest erineb 2-st.

Järelikult ainsad võimalused on $a=-12$ ja $a=-3$.

Lahendus 2. Kuna reaalsete kordajatega polünoomil ei saa olla üks nullkoht mittereaalne ja ülejäänud nullkohad reaalsed, siis peab antud kuuppolünoomil $P(x)=x^3+ax-2(a+4)$ olema täpselt kaks erinevat reaalarvulist nullkohta, kusjuures üks neist on kahekordne nullkoht. Olgu see kahekordne nullkoht x_0, siis on x_0 ka polünoomi tuletise $P'(x)=3x^2+a$ ühekordne nullkoht, st $3x_0^2+a=0$ ja $a\neq 0$. Siit $a=-3x_0^2$. Et $P(x_0)=0$, siis saame tingimuse

$$x_0^3+(-3x_0^2)\cdot x-2\cdot(-3x_0^2+4)=0$$

ehk

$$-2x_0^3+6x_0^2-8=0,$$

millest tegurdades

$$-2(x_0-2)^2(x_0+1)=0.$$

Järelikult saab kõnealune kahekordne nullkoht olla kas $x_0=2$ või $x_0=-1$. Tingimuse $3x_0^2+a=0$ abil leiame nüüd ainsad võimalused $a=-12$ ja $a=-3$.

Lahendus 3. Ülesande tingimuse kohaselt saab võrrandi vasaku poole kirjutada kujul $(x-x_0)^2(x-x_1)$, kus x_0 ja x_1 on teatud erinevad reaalarvud. Polünoomi kahe kuju kordajate võrdlemisest

$$\begin{aligned} x^3+ax-2(a+4) &= (x-x_0)^2(x-x_1)=(x^2-2xx_0+x_0^2)(x-x_1)= \\ &= x^3-(2x_0+x_1)x^2+(2x_0x_1+x_0^2)x-x_0^2x_1 \end{aligned}$$

saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x_0+x_1=0, \\ 2x_0x_1+x_0^2=a, \\ -x_0^2x_1=-2(a+4). \end{cases}$$

Kirjutades esimese võrrandi põhjal $x_1=-2x_0$ ning asendades x_1 teise võrrandisse, saame seose $-3x_0^2=a$. Paigutades nüüd a avaldise kolmandasse võrrandisse, tekib x_0 suhtes kuupvõrrand

$$-2x_0^3+6x_0^2-8=0.$$

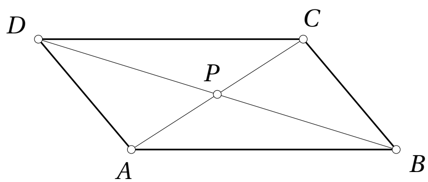
Lahenduse viime lõpule samal viisil nagu eelmises lahenduses.

4. *Lahendus 1.* Olgu P rööpküliku $ABCD$ diagonaalide AC ja BD lõikepunkt (joonis 5). Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis võrdus $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ on samaväärne võrdusega $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|PD|}$. Rakendades siinusteoreemi kolmnurgas BCD saame, et $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}$, ning siinusteoreemist kolmnurgas CPD saame, et $\frac{|CP|}{|PD|} = \frac{\sin\angle PDC}{\sin\angle PCD} = \frac{\sin\angle BDC}{\sin\angle PCD}$. Seega $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|PD|}$ parajasti siis, kui $\sin\angle CBD = \sin\angle PCD$. Kolmnurgast BCD näeme, et $\angle CBD + \angle PCD < 180^\circ$, seega $\sin\angle CBD = \sin\angle PCD$ on samaväärne sellega, et $\angle CBD = \angle PCD$. Et kolmnurkadel CPD ja BCD on ühine nurk $\angle PDC = \angle BDC$, siis on see omakorda samaväärne sellega, et $\angle CPD = \angle BCD$.

Kokkuvõttes leidsime, et võrdus $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ on samaväärne võrdusega $\angle CPD = \angle BCD$. Analoogiliselt saame näidata, et võrdus $\frac{|DC|}{|CB|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ on samaväärne võrdusega $\angle CPB = \angle BCD$, st rööpküliku diagonaalide pikkuste suhe langeb kokku külgede pikkuste suhtega siis ja ainult siis, kui diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad on võrdsed rööpküliku sisenurkadega.

Lahendus 2. Olgu P rööpküliku $ABCD$ diagonaalide AC ja BD lõikepunkt, ning olgu selle rööpküliku diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad võrdsed rööpküliku sisenurkadega. Üldisust kitsendamata olgu $\angle CPD = \angle BCD$ (kui $\angle CPB = \angle BCD$, siis vahetame tippude B ja D tähistused). Et kolmnurkades BCD ja CPD on $\angle BDC = \angle CDP$ ning $\angle CPD = \angle BCD$, siis need kolmnurgad on sarnased, mistõttu $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|PD|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ (viimane võrdus kehtib seetõttu, et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist), st rööpküliku $ABCD$ diagonaalide pikkuste suhe on võrdne külgede pikkuste suhtega.

Olgu nüüd rööpküliku $ABCD$ diagonaalide pikkuste suhe võrdne külgede pikkuste suhtega. Üldisust kitsendamata olgu $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|BD|}$ (vastasel



Joonis 5

korral vahetame jällegi tippude B ja D tähistused), siis $\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{|CP|}{|PD|}$. Et kolmnurkadel CPD ja BCD on ühine nurk tipu D juures, siis juhul, kui kolmnurgad BCD ja CPD ei ole sarnased, peab (et ei kehtiks sarnasuse tunnus KKN) sirgel CD leiduma selline punkt E, et $|CP| = |PE|$ ja kolmnurgad BCD ja EPD on sarnased. Sel juhul asuvad punktid B, C, P ja E ühel ringjoonel, mis tähendab, et B asub kolmnurga CEP ümberringjoonel. Teisest küljest, kuna $|PE| = |PC|$ ning punkt D asub sirgel CE, peab sirge DP ja kolmnurga CEP ümberringjoone teine lõikepunkt asuma P ja D vahel. Seega ei saa see lõikepunkt olla B, sest P on lõigu BD keskpunkt. Saadud vastuolu näitab, et kolmnurgad BCD ja CPD peavad olema sarnased ning $\angle CPD = \angle BCD$, st rööpküliku $ABCD$ diagonaalide lõikumisel tekkivad nurgad on võrdsed selle rööpküliku sisenurkadega.

Lahendus 3. Olgu P rööpküliku $ABCD$ diagonaalide AC ja BD lõikepunkt ning olgu $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |AD|$ ja $d = |BD|$, $e = |AC|$. Näitame, et $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ siis ja ainult siis, kui $\angle BCD = \angle CPD$ (analoogiliselt saab näidata, et $\frac{a}{b} = \frac{e}{d}$ siis ja ainult siis, kui $\angle BCD = \angle CPB$).

Rööpkülikus kehtib võrdus $2(a^2+b^2) = d^2+e^2$, ehk $2a^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = d^2\left(1+\frac{e^2}{d^2}\right)$ (selle võrduse kehtivus järeldub koosinusteoreemist kolmnurkades ABC ja BCD). Seega on võrdus $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ siin samaväärne võrdusega $2a^2 = d^2$. Võrdused $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ ja $2a^2 = d^2$ on aga omakorda samaväärsed võrdustega $\frac{2b}{e} = \frac{2a}{d} = \frac{d}{a}$, ehk sellega, et kolmnurk BCD küljepikkustega b, a ja d ning kolmnurk CPD küljepikkustega $\frac{e}{2}$, $\frac{d}{2}$ ja a on sarnased, ehk $\angle BCD = \angle CPD$.

Märkus. Kerkib küsimus, kuidas konstrueerida selliseid rööpkülikuid, mille külgede suhe langeb kokku diagonaalide suhtega. Fikseerime rööpküliku ühe külje a ning selle lähisnurga α ning otsime rööpküliku teist külge b selliselt, et külgede suhe võrduks diagonaalide suhtega, st $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$. Rööpküliku võrdusest ja koosinusteoreemist saame tingimused

$$\begin{cases} 2a^2 + 2b^2 = \dfrac{a^2}{b^2}e^2 + e^2, \\ e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \end{cases}$$

Nendest tingimustest saame ruutvõrrandi $b^2 + (2a\cos\alpha)\,b - a^2 = 0$, mille positiivne lahend on $b = a\sqrt{1+\cos^2\alpha} - a\cos\alpha$.

5. Vaatleme ruudustikku, kust on mõned ruudud ülesande tingimuste kohaselt välja lõigatud ning järelejäänud ruutudesse ülesandes kirjeldatud arvud kirjutatud.

Veendume, et korraga täpselt kahe kõrvutise ruudu eemaldamine, kui selle tagajärjel on tulemuseks jälle ülesande tingimustele vastav seis ning arvud ruutudes on vastavalt muudetud, vähendab nii paaris- kui paaritute arvude kogust täpselt 1 võrra. Tõepoolest, kui eemaldame kaks samas reas asuvat ruutu, ei tohi nende ruutude kohal olla alles ühtki ruutu ja nende ruutude all peavad olema kõik ruudud alles. Selles reas, kust me kaks ruutu eemaldame, vähenevad ülejäänud ruutudesse kirjutatud arvud kahe võrra (st paarsus ei muutu). Eemaldatavate ruutude all peavad olema igas reas üks paaritu ja üks paarisarv, sest nende kohal on ühepalju ruute ja paremal olevate ruutude arv erineb ühe võrra. Pärast eemaldamist muutub paarisarv paarituks ja vastupidi, seega allesjäänud ruutudes paaritute arvude koguarv ja paarisarvude koguarv ei muutu. Eemaldatud ruutudes olid arvud 0 ja 1, mis on eri paarsusega, seega kokkuvõttes sai kumbagi sorti arve 1 võrra vähem. Analoogiliselt arutleme juhul, kui eemaldame kaks kõrvutist samas veerus asuvat ruutu.

Pärast ruutude kahekaupa eemaldamist, kuni see enam pole võimalik, jõuame üheni järgmisest kahest seisust.

- Seis, kus pole ühtki ruutu; sellises seisus pole ühtki paaritut ega paarisarvu, seega paarisarve on vähemalt sama palju kui paarituid.
- Seis, kus on k rida ($k \geqslant 1$), kusjuures kõige ülemises reas on 1 ruut, järgmises reas 2 ruutu jne. kuni kõige alumises reas on k ruutu. Nüüd kõige ülemise rea ruutu on kirjutatud arv 0, järgmise rea ruutudesse 2 ja 0, ülalt kolmanda rea ruutudesse 4, 2 ja 0 jne. Niisiis taolise „trepi” kõikidesse ruutudesse on kirjutatud paarisarv, seega selles seisus on paarisarve vähemalt sama palju kui paarituid.

Et ruutude kahekaupa eemaldamisel jäi paarisarve ja paarituid arve samavõrra vähemaks, pidi ka algseisus olema paarisarve vähemalt sama palju kui paarituid.