Hindamisskeemid

1. *(Hannes Jukk)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Pole saadud aru, kuidas küla koerad jaotuvad sisuliselt nelja rühma – tavaliselt ei saadud aru, et neljas rühm moodustub mittehaukuvatest koertest, kes ei hammusta: 0 p
- Saadud aru ja tähistatud neli koerte rühma ning koostatud mõned õiged seosed vastavalt ülesande tekstile: 1 p
- Tingimuses „selliste koerte arv, kes nii hauguvad kui ka hammustavad (x), on 40% võrra väiksem nende koerte arvust, kes ei haugu ega hammusta (y)" pole arvestatud õigesti tervikut ja on pakutud, et $y = 1{,}4x$, mitte $x = 0{,}6y$: 4 p
- Osade vahelised seosed leitud õigesti, kuid pole suudetud leida õiget avaldist viimasele küsimusele vastamiseks: 5 p
- Kuskil tehtud tehniline arvutusviga, kuid lahendusidee ja muud arvutused õigesti teostatud – nt jagatud kaks murdu valesti: 6 p
- Täielik lahendus. 7 p

Valdavalt kenasti lahendatud. Esines näitelahendusest mõnevõrra erinevaid (koerte rühmade tähistamisel) ja paar pigem rohkem erinevat lahendust.

Üks viga, mille eest punkte maha ei arvestatud, oli siiski õige mitmel õpilasel. Lahenduses tekkis olukord, kus oli vaja lahendada ruutvõrrand $y^2 = xy$, mille pooli jagati suurusega y. Siin ei pandud tähele, et ruutvõrrandil on tegelikult veel üks lahend $y = 0$, mis ei oma küll sisulist tähendust.

2. *(Juhan Aru)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Märgatud kolmnurkade CEK ja BEA, CFL ja AFB või CFE ja ACB sarnasust: 2 p
- Tõestatud väide eeldusel $|OB| = 3|OF|$: 2 p
- Täielik lahendus pisiveaga (vt. kommentaar): 6 p
- Täielik lahendus: 7 p

Põhiline pisiviga: nurkade EKC ja EAB võrdsusest järeldati, et $LK \parallel AB$, kusjuures tegelikult järeldub vaid, et $CK \parallel AB$. Et kehtiks ka $AB \parallel LK$, peavad L, C ja K asuma ühel sirgel. See järeldub näiteks tähelepanekust, et ka $CL \parallel AB$.

3. *(Uve Nummert)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- a)-osa: 3 p

  Sealhulgas
  - Juht $n = 1$ ja vähemalt üks juht $n = 2, \ldots, 9$: *1 p*
  - *Kõik* ülejäänud juhud $n = 2, \ldots, 9$: *1 p*
  - Juht $n = 10$: *1 p*
- b)-osa: 4 p

  Sealhulgas
  - Idee lähtuda arvust, mille numbrite korrutis on suurem numbrite summast, ja lisada sellele numbreid 1: *2 p*
  - Arutluse lõpuleviimine: *2 p*

4. *(Konstantin Tretjakov)*

Korrektseks lahenduseks loeti ainult selline lahendus, mis ühel või teisel viisil mainis asjaolu, et Miku ei saa mitte mingil viisil Juku nuppu ära võtta. Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Antud asjaolu oli mainitud, kuid polnud põhjendatud: 2 p
- Antud asjaolu põhjendus kasutas väidet, et „nuppude vaheline kaugus on paarisarv", kuid kuidas seda kaugust arvutada ning miks see nii on, polnud selgitanud: 4 p
- Täielik lahendus: 7 p

Täielikuks lahenduseks loeti selline lahendus, milles oli selgelt näidatud, miks Juku saab võita Miku suvalise strateegia puhul. Need lahendused, milles vaadati läbi ainult alamhulk võimalikke Miku strateegiaid (enamasti „minna otse" ja „oodata oma algpunkti juures"), punkte ei saanud.

5. *(Reimo Palm)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Leitud äärtega piirnevate ruutude arv ristkülikus: 1 p
- Leitud ristküliku ülejäänud ruutude arv: 1 p
- Kirjutatud välja võrrand ja leitud selle lahendid: 5 p

  Sealhulgas tüüpiliste lahenduste eest:
  - kirjutatud välja ainult kahe avaldise vaheline võrdus: *0 p*
  - võrduses sarnased liikmed kokku võetud, nt saadud võrrand $mn - 4m - 4n + 8 = 0$: *1 p*

- viidud võrrand kujule $(m-4)(n-4)=8$: *3 p*
- leitud võrrandi lahendid, aga variantide läbivaatus mittetäielik (nt proovimata negatiivsed tegurid või vaadeldutest suuremad arvud), või täielikkuse põhjendus puudulik: *3–4 p*
- leitud võrrandi lahendid, kõik variandid ammendatud: *5 p*

Hindamisskeemid

1. *(Jevgeni Martjušev)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Ülesande a)-osa: 3 p

  Sealhulgas
  - Tõestus, et kõik kolm arvu (x, y, z) on korraga kas ratsionaalsed või irratsionaalsed: *0 p*
- Ülesande b)-osa: 4 p

  Sealhulgas 1. lahenduskäigu korral
  - Kahe arvu ratsionaalsus on tõestatud: *2 p*
  - Kolmanda arvu ratsionaalsus on tõestatud: *2 p*

  2. lahenduskäigu korral (arvestades, et $\frac{x}{y}$ on ratsionaalarv)
  - Juhtum, kui nii x, kui ka y on ratsionaalsed: *2 p*
  - Juhtum, kui nii x, kui ka y on irratsionaalsed: *2 p*

Mõned õpilased arvasid ekslikult, et irratsionaalarv on arv kujul $a\sqrt{b}$, kus a ja b on ratsionaalarvud.

2. *(Aleksei Lissitsin)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et $x + y + z = 20$: 4 p
- Siit järeldatud, et $z - x = 9$: 1 p
- Lahendus lõpule viidud: 2 p

Ainult õige vastuse eest anti 1 punkt.

Mõned lahendajad hakkasid tegema suhteliselt pika läbivaatusega. Reeglina selline lähenemine ei ole edukas, sest mõned juhud jäävad läbi vaatamata. Sellised lahendused said tavaliselt mitte rohkem kui 2 punkti.

3. *(Laur Tooming)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Tõestatud, et kui need kolm sirget lõikuvad ühes punktis, siis $|AB| = |AC|$: 4 p

Sealhulgas

- Arvutatud lõikude suhteid või leitud sarnaseid kolmnurki: *1 p*
- Kasutatud Eukleidese teoreemi: *2 p*
- Tehtud mõni kasulik lisakonstruktsioon, näiteks joonestatud kolmnurga ABC kõrgused, külgede keskristsirged või ümberringjoon või konstrueeritud kolmnurk, mille kõrgusteks või külgede keskristsirgeteks on sirged y ja z: *2 p*

◦ Tõestatud eelmise pöördteoreem: 3 p

Mõlema osa eest kaotati 1 punkt, kui puudu oli üks lihtne samm või põhjendamata lihtsalt põhjendatav geomeetriline väide, ning 2 punkti, kui selliseid lihtaid samme oli mitu.

Mitmed õpilased kaotasid 3 punkti, jättes tõestamata lihtsama pöördteoreemi.

4. *(Härmel Nestra)*

Mõlema skeemi korral lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Lahendus võitja viimase käigu järel tekkiva seisu analüüsiga (nagu žürii lahenduses).

◦ Selgitus, et järelejäänud ruudud moodustavad „ussi” laiusega 1 ruut: 2 p
◦ Selgitus, et uss teeb paarisarvu „jõnkse”: 1 p
◦ Eemaldatud ruutude arvu paarsuse analüüs: 3 p
◦ Võitja järeldamine: 1 p

Lahendus sümmeetrilisusstrateegia abil.

◦ Strateegia kirjeldus: 2 p
◦ Tõestus, et strateegiat on võimalik järgida: 2 p
◦ Tõestus, et strateegia on võitev: 3 p

Õige vastus ega väikeste juhtude läbivaatus punkte ei andnud.

Punkte kaotati tihti lihtsalt sellepärast, et väiteid polnud ammendavalt põhjendatud, kuigi lahendusidee oli olemas. Näiteks mitmed žürii lahenduse moodi teinud võtsid lihtsalt laest, et tekib „uss”, või põhjendasid seda väga ebamääraselt; siis anti selle osa 2 punktist vastavalt 0 või 1.

Eriti ebamääraselt olid aga kirjas kõik lahendused sümmeetriastrateegia abil. Sellises lahenduses tuleb lisaks strateegia kirjeldamisele näidata esiteks, et seda on üldse võimalik rakendada, ja teiseks, et see on võitev. Rakenduse võimalikkuse jaoks tuleb märgata, et ruudud jagunevad sümmeetrilisteks paarideks ja et seni, kuni seda strateegiat rakendatakse, on iga teise käigu järel seis sümmeetriline, nii et strateegiat saab edasi rakendada. Võitvuse jaoks on vaja näidata, et vastase käik ei muuda mängija sümmeetrilist käiku kaotavaks – see pole ilmne, kui vastane käib otse sümmeetriatelje kõrvale. Need kaalutlused olid alati puudu ja seetõttu saadi sümmeetriaga lahenduste eest väga vähe punkte.

5. *(Hendrik Nigul)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näitamine, et üle 11 teguri ei saa valida: 4 p

  Sealhulgas

  - Arvu 2009^{10} tegurdamine: *1 p*
- Sobiva 11 teguri leidmine: 3 p

Suur osa õpilasi vaatles võimalike teguritena vaid algtegureid (või nende astmeid). Sel juhul leiti, et valida saab vaid 2 tegurit. Sellised tööd said tüüpiliselt ülimalt 1 punkti.

Paljudel õpilastel oli siiski leitud õige vastus ning sobiv näide 11 teguriga. Punkte võis kaotada ebapiisava või puuduva põhjenduse eest, et rohkem tegureid valida ei õnnestu.

Hindamisskeemid

1. *(Ahti Peder)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Näidatud, et n jagub 1-ga ja 6-ga: 1 p
- Näidatud, et n jagub arvudega 2, 3 ja 6: 3 p
- Näidatud, et väide kehtib juhul $n \leqslant 36$: 1 p
- Näidatud, et juhul $n > 36$ on jagajateks ka $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ ja $\frac{n}{6}$: 2 p

Ülesanne osutus lihtsaks. Mõnedel juhtudel ei põhjendatud, et jagajad $1, 2, 3, 6, n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$ on kõik erinevad. Selline lahendus andis maksimaalselt 5 punkti.

2. *(Mati Abel)* Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Alustatud uurimist: 1 p
- Midagi arukat tehtud või kirjutatud vaid vastus: 2 p
- Leitud piirid, mille vahel paikneb k, kuid ei ole üle mindud arvväärtustele: 3 p
- Saadud õige piirkond, kuid kusagil tehtud viga: 4 p
- Saadud õige piirkond, kuid ei ole uuritud, mis juhtub väljaspool piirkonda: 5 p
- On saadud õige vastus ja väidetud, et $k < 0$ ei saa kehtida: 6 p
- Täielik lahendus: 7 p

3. *(Maksim Ivanov)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Lisakonstruktsiooni kasutamine (kas nurkade BAC ja DAC nurgapoolitajate või ringjoone keskpunktiga A ja raadiusega $AB = AD$ joonestamine): 1 p
- Tõestatud, et lisakonstruktsiooni tulemusena tekib rööpkülik: 1 p
- Tõestatud, et diagonaal AC jaotab nelinurga $ABCD$ vastavad sisenurgad pooleks: 4 p
- Tõestatud, et $BC = DC$: 1 p

4. *(Peeter Laud)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Ainult vastus: 1 p
- Vastus, ühes summa $1 + \dots + n^2$ arvutamisega: 1 p
- Uuritud ainult juhtu, kus ruudustik on arvudega täidetud järjest: 1 p
- Lahendatud ülesanne ainult mingite fikseeritud n-ide jaoks, mille korral pole ülesanne enam triviaalne ($n \geqslant 5$): 3 p
- Märgatud, et ruudustikus olevad väärtused on üheselt määratud arvuga a_{11} ruudustiku ülemises vasakus nurgas ning arvudega $b_1 = 0, b_2, \dots, b_n$ ja $c_1 = 0, c_2, \dots, c_n$, nii et $a_{kl} = a_{11} + b_k + c_l$: 3 p
- Täielik lahendus: 7 p

5. *(Vladimir Kutšmei)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- a)-osa: 3 p

  Sealhulgas
  - Lahendus on toodud vaid kujul $y = kx$ olevate sirgete jaoks: *1 p*
  - Lahendus on toodud kujul $y = kx + b$ olevate sirgete jaoks: *2 p*
- b)-osa: 4 p

  Sealhulgas
  - Lahendus töötab juhul, kui mõlemad punkti koordinaadid on nullist erinevad: *3 p*

Hindamisskeemid

1. *(Elts Abel)*

Mõlema skeemi korral lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Traditsiooniline lahendus.

- Idee vaadelda väikeste kerade keskpunktide ühendamisel tekkinud tetraeedrit: 1 p
- Näidatud võimalus suure kera raadiuse avaldamiseks väikese kera raadiuse kaudu: 1 p
- Avaldatud väikese kera ja suure kera keskpunkte ühendava lõigu pikkus väiksema kera raadiuse kaudu: 2 p
- Leitud suure ja väikese kera raadiuste vaheline seos: 1 p
- Avaldatud kerade ruumaalad: 1 p
- Näidatud, et väikeste kerade koguruumla on väiksem ülejäänud ruumalast: 1 p

Lahendus raadiuste võrdlemise abil.

- Näidatud, et väiksema kera raadius ei saa olla suurem suure kera poolest raadiusest: 5 p
- Avaldatud kerade ruumalad: 1 p
- Näidatud, et väikeste kerade koguruumala on väiksem ülejäänud ruumalast: 1 p

Lahendus raadiuste võrdlemise abil esines vaid ühes töös.

2. *(Meelis Kull)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Korrektselt rakendatud geomeetrilise jada summa valemit: 1 p
- Tõestatud, et n on paaris: 2 p
- Idee uurida avaldise väärtust mooduli 5 või 8 järgi: 2 p
- Tõestuse lõpule viimine: 2 p

Lahendustes, kus geomeetrilise jada summa valemit ei kasutata, on tõestuse lõpule viimine väärt 3 punkti.

3. *(Indrek Zolk)*

Kõigi skeemide korral lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

Skeem žürii lahenduse 1 järgi.

- Lähtevõrrandi vasaku poole tegurdamine ning sedastamine, et $x = 2$ on igal juhul lähtevõrrandi lahend: 3 p
- Vaadeldud juht, kus ülejäänud kaks lahendit on võrdsed ja erinevad arvust 2: 2 p
- Vaadeldud juht, kus ülejäänud kaks lahendit on erinevad ning üks neist võrdub arvuga 2: 2 p

Skeem žürii lahenduse 2 järgi.

- Selgitatud, et lähtevõrrandi kahekordne nullkoht x_0 on ka tuletise nullkoht ning tuletatud seos $a = -3x_0^2$: 3 p
- Lahendus lõpule viidud: 4 p

Skeem lahenduste järgi, mis kasutavad kuju $f(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)$ või uurivad funktsiooni $f(x) = x^3 - ax$ ekstreemume ning tuletavad lahendamiseks vajalikud tingimused polünoomi kordajate võrdlemise teel.

- Ülesande tingimustest tuletatud polünoomi ja lähtevõrrandi vasaku poole kordajate võrdlemine: 3 p
- Lahenduse lõpuleviimine: 4 p

Ülesandel leidus kaks lisalahendust:

- ülesande tingimuse põhjal kirjutada võrrandi vasak pool välja polünoomina $(x - x_1)^2(x - x_2)$ (kus $x_1 \neq x_2$), võrrelda selle polünoomi ja lähtevõrrandi kordajaid ning seeläbi leida x_1, x_2 ja a kõik võimalikud väärtused;
- panna tähele, et ülesande tingimuse rahuldamiseks peab võrrandi vasak pool olema polünoomi $f(x) = x^3 + ax$ $(a < 0)$ selline nihe y-telje suunas, kus x-telg osutub polünoomi f graafiku puutujaks; leida polünoomi f ekstreemumpunktid ning panna tähele, et nihke väärtus võrdub f väärtusega ekstreemumpunktis.

4. *(Heiki Niglas)*

Lahenduse allpool märgitud osade eest antud punktid summeeriti.

- Vastavate nurkade võrdsusest oli järeldatud vastav külgede ja diagonaalide suhete võrdus: 3 p
- Diagonaalide ja külgede suhete võrduse põhjal tõestatud vastavate nurkade võrdus: 4 p

Seose $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$ eest anti 1 punkt. Mõned õpilased olid valesti järeldanud kahe paari külgede suhete võrdusest ja ühe ühise nurga olemasolust kolmnurkade sarnasuse, aga seda tunnust saab kasutada vaid siis, kui mõlemad vaadeldavad küljed on selle nurga lähisküljed.

5. *(Oleg Košik)*

Tüüpiliste lahenduste eest anti punkte järgmiselt.

- Vaadeldud ainut erijuht, kus suurest ristkülikust on välja lõigatud väiksem ristkülik: 0 p
- On tehtud mõtestatud katse vaadelda äralõikamisi/juurdepanekuid, mille tulemusena paaritute ja paarisarvude vahe oleks (pool)invariant: 1 p

Üksikud lahendajad said ülesande tekstist valesti aru ning arvasid, et koos äralõigatava ruuduga lõigatakse lisaks ära ainult samas reas ja samas veerus asuvad ruudud.